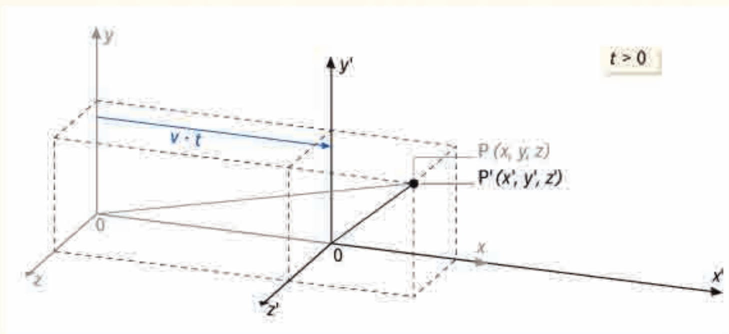
Exkurs Transformationen

Ein Auto, das mit $u = 100\,\text{km/h}$ einen mit $v = 80\,\text{km/h}$ fahrenden Bus überholt, entfernt sich relativ zum Bus mit der Differenz von 20 km/h. Fahren sie sich entgegen, so geschieht dies mit der Summe, also mit 180 km/h. Diesen Werten für die Geschwindigkeit liegt die **Galilei-Transformation** zu Grunde. Die Transformation besteht aus Gleichungen, die die Ortskoordinaten und Zeitpunkte zwischen gegenseitig bewegten Bezugssystemen S und S′ umzurechnen gestatten (→ **B1**):



B1 Zur Galilei-Transformation: $t = t' = 0$ sei $x = x' = 0$

Vom System S in S′	vom System S′ in S
$x' = x - v \cdot t$	$x = x' + v \cdot t'$
$y' = y$	$y = y'$
$t' = t$	$t = t'$

Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928)
Er hatte bereits vor der Veröffentlichung von Einsteins Spezieller Relativitätstheorie die Formeln zur Transformation bei elektromagnetischen Vorgängen entwickelt.

Diese Gleichungen berücksichtigen Zeitdilatation und Längenkontraktion nicht. Bei größeren Geschwindigkeiten v weicht aber $\sqrt{1-(v/c)^2}$ merklich von 1 ab, so dass die Transformationsgleichung für die x-Koordinate, in der v vorkommt, geändert werden muss. Nach dem Relativitätsprinzip müssen die Bewegungsgleichungen in allen Inertialsystemen physikalisch gleich lauten. Nimmt man an, dass es einen Korrekturfaktor k gibt, der die Unterschiede in der Transformation zwischen den Systemen ausgleicht, so lauten die Gleichungen für die x-Koordinaten:

$k \cdot x' = x - v \cdot t$ bzw. $k \cdot x = x' + v \cdot t'$

Wird zur Zeit $t = t' = 0$ ein Lichtsignal bei $x = x' = 0$ in x-Richtung abgesandt, so hat es im System S den Weg $x = c \cdot t$, im System S′ den Weg $x' = c \cdot t'$ zurückzulegen (→ **B2**). Setzt man diese Beziehungen in die vorherigen Gleichungen ein, so erhält man:

$$k \cdot c \cdot t' = c \cdot t - v \cdot t \qquad k \cdot c \cdot t = c \cdot t' + v \cdot t'$$
$$k \cdot c \cdot t' = t \cdot (c - v) \qquad k \cdot c \cdot t = t' \cdot (c - v)$$

Werden die gleichen Seiten miteinander multipliziert, so ergibt sich:

$$k^2 \cdot c^2 \cdot t \cdot t' = t \cdot t' \cdot (c^2 - v^2)$$

$$k = \sqrt{1-(v/c)^2} = 1/\gamma$$

Damit gilt für Transformationen, die das Relativitätsprinzip berücksichtigen:

$$x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t) \text{ bzw. } x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t')$$

Wird die zweite Beziehung nach t' aufgelöst und x' durch die erste Beziehung ersetzt, so führt dies zu:

$$t' = \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{x}{\gamma} - \gamma \cdot (x - v \cdot t)\right)$$

$$t' = \frac{1}{v} \cdot \left(x \cdot \sqrt{1-(v/c)^2} - \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)$$

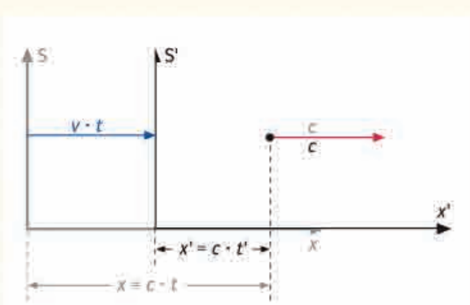
$$t' = \frac{\frac{x}{v} \cdot (1-(v/c)^2) - \frac{x}{v} + t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$t' = \frac{t - v \cdot x/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Die Beziehungen

$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \text{ sowie } t' = \frac{t - v \cdot x/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

heißen **Lorentz-Transformationen.**



B2 Zur Lorentz-Transformation

Ereignisse, die in einem System zur gleichen Zeit, aber an verschiedenen Orten stattfinden, finden in einem anderen Inertialsystem nicht gleichzeitig statt.

- **Die Zeit hängt nicht nur von der Geschwindigkeit des Systems, sondern auch vom Ort des Ereignisses ab, für die sie bestimmt wird.**