Energiebilanz verschiedener Verkehrsmittel pro Reisenden:

Flugzeug:	0,41 kWh pro Kilometer + 95,2 kWh pro Start (bei mittlerer Auslastung)
Auto:	0,80 kWh pro Kilometer (bei einem Insassen)
Bahn:	0,09 kWh pro Kilometer (bei mittlerer Auslastung)

„Vielleicht sollten wir doch lieber das Flugzeug nehmen …“

Eine Gerade mit der Steigung 0 ist eine Parallele zur x-Achse

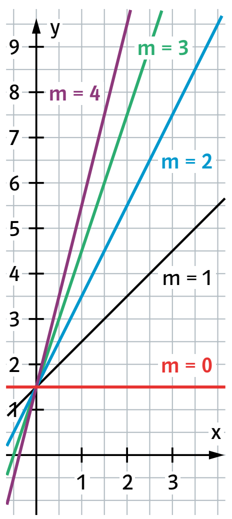


Fig. 1

Funktionen, deren Gleichung man in der Form **$f(x) = mx + b$** schreiben kann, heißen **lineare Funktionen**. Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.
Eine Gerade ist durch zwei Angaben eindeutig bestimmt. Sind m und b bekannt, so kann man die Geradengleichung $y = mx + b$ direkt angeben.
Da $f(0) = b$ ist, verläuft die Gerade durch den Punkt $P(0|b)$ der y-Achse. Daher heißt b auch **y-Achsenabschnitt**.
In Fig. 2 lautet die Gleichung der roten Geraden $y = \frac{3}{4}x$, die der blauen Geraden $y = \frac{3}{4}x + 2$. Der Faktor $m = \frac{3}{4}$ kann so gedeutet werden: Wächst x um eine Einheit, so wächst y um $\frac{3}{4}$ Einheiten. Die Zahl $\frac{3}{4}$ ist die **Steigung** der Geraden. Geraden mit der gleichen Steigung sind zueinander parallel.

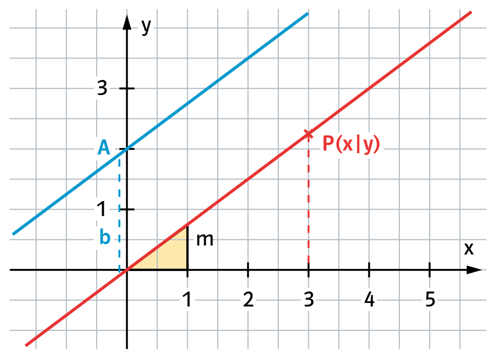


Fig. 2

Sind zwei Punkte der Geraden gegeben, so lässt sich die Steigung mithilfe eines Steigungsdreiecks berechnen. Die Gerade in Fig. 3 verläuft durch die Punkte $P(x_P|y_P)$ und $Q(x_Q|y_Q)$. Im **Steigungsdreieck** PRQ ist $m = \frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$. Der Quotient $\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ wird auch **Änderungsrate** genannt. Lineare Funktionen sind die einzigen Funktionen mit konstanter Änderungsrate. Die Steigung m stimmt mit der Änderungsrate der Funktionswerte überein.

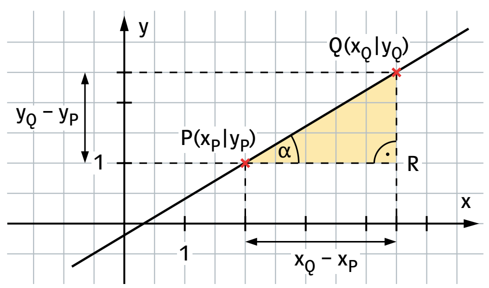


Fig. 3

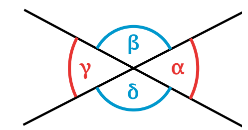
Eine Funktion, deren Gleichung man in der Form $f(x) = mx + b$ $(m, b \in \mathbb{R})$ schreiben kann, heißt **lineare Funktion**. Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade** mit der **Steigung** m und dem **y-Achsenabschnitt** b.

Nullstelle
Die Nullstelle einer linearen Funktion ist diejenige Stelle, an der der Funktionsgraph die x-Achse schneidet. An dieser Stelle ist der Funktionswert 0. Zur Berechnung der Nullstelle einer linearen Funktion muss also die Gleichung $mx + b = 0$ gelöst werden.
Durch Auflösen der Gleichung nach x erhält man:

$mx + b = 0 \quad | -b$
$mx = -b \quad | :m \quad (m \neq 0)$
$x = -\frac{b}{m}$

Jede lineare Funktion f mit $f(x) = mx + b$ $(m \neq 0)$ hat genau eine Nullstelle $x_0 = -\frac{b}{m}$.

Orthogonalität
Schneiden sich zwei Geraden, bilden sie zwei Paare jeweils gleich großer Winkel (Fig. 1). Im Sonderfall sind alle vier Winkel gleich groß: die Geraden sind **orthogonal** (Fig. 2). In diesem Fall gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen den Steigungen.
Da sich die Steigungen von Geraden bei Verschiebungen nicht ändern, genügt es, die Überlegungen an Ursprungsgeraden durchzuführen.



$\alpha = \gamma;\ \beta = \delta$

Fig. 1

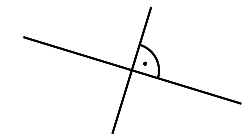


Fig. 2

Dreht man eine gegebene Ursprungsgerade g um 90° um O, erhält man die zu g orthogonale Gerade h. Ist $P_1(a|b)$ ein Punkt auf g, dann liegt $P_2(-b|a)$ auf h.
Die Steigung von g ist $m_1 = \frac{b}{a}$, die Steigung von h ist $m_2 = \frac{a-0}{-b-0} = -\frac{a}{b}$. Somit gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$. Umgekehrt kann man aus $m_1 \cdot m_2 = -1$ auf Orthogonalität schließen.

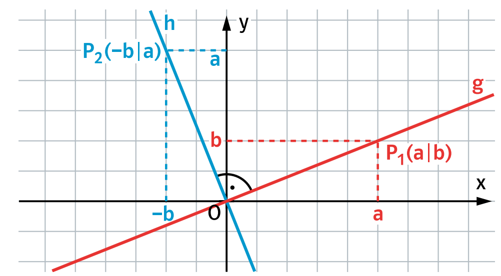


Fig. 3

Beispiel 1
Die Gerade g verläuft durch die Punkte $P(-2|3)$ und $Q(2|1)$.
a) Zeichne die Gerade und ermittle die Gleichung von g.
b) Berechne die Nullstelle von g.
c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes von g und h mit $h(x) = 4{,}5x - 3$.
d) Überprüfe deine Ergebnisse anhand einer Zeichnung.
Lösung:
a) Zeichnung: vgl. Fig. 3
Aus den Koordinaten von P und Q ergibt sich $m = \frac{1-3}{2-(-2)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.
Um b zu ermitteln, setzt man die Koordinaten von P (oder Q) in die Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + b$ *ein.*
$3 = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + b$
$3 = 1 + b$
$2 = b$
Geradengleichung: $y = -\frac{1}{2}x + 2$
b) Nullstelle: *y muss gleich null sein.*
$-\frac{1}{2}x + 2 = 0 \quad | -2$
$-\frac{1}{2}x = -2 \quad | \cdot(-2)$
$x = 4$
Nullstelle: $x_0 = 4$

c) *Gleichsetzen der Funktionsterme von g und h:*
$-\frac{1}{2}x + 2 = 4{,}5x - 3 \quad | -4{,}5x - 2$
$-5x = -5 \quad | :(-5)$
$x = 1$ *(x-Koordinate von S)*
Berechnen der y-Koordinate von S:
$y = 4{,}5 \cdot 1 - 3$
$y = 1{,}5$
Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt $S(1|1{,}5)$.
d) abgelesene Werte: vgl. Fig. 4

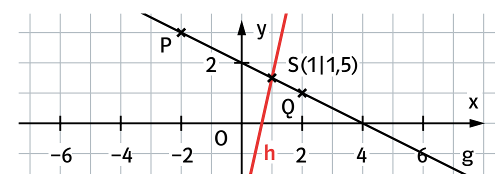


Fig. 4