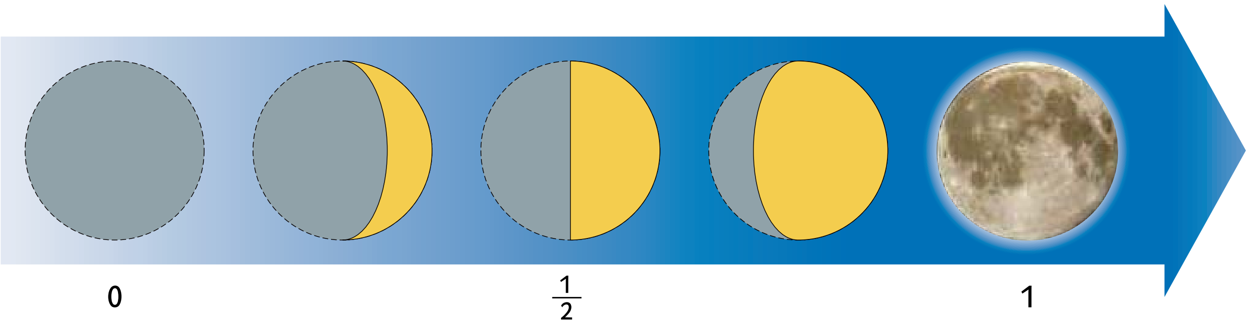
I Rationale Zahlen

Bruch, Komma und Prozent

Wir schreiben für den Beginn
mal ein paar neue Zahlen hin:
1; 0,1; 0,001; 0,0001 …
Kaum steh'n sie da, hört man die Worte:
Von uns gibt's auch noch diese Sorte
$\frac{1}{1}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$; $\frac{1}{10000}$ …
Und schließlich darf man nicht vergessen,
dass wir ganz viel in Prozenten messen
100 %; 10 %; 1 %; 0,1 %; 0,01 % …



Das kannst du schon

- Mit ganzen Zahlen rechnen
- Mit Längen, Gewichten und Uhrzeiten rechnen
- Flächeninhalte und Rauminhalte berechnen

Das kannst du bald

- Anteile mit Brüchen beschreiben
- Anteile in Prozenten angeben
- Die Kommaschreibweise verstehen

Argumentieren/ Kommunizieren

Problemlösen

Modellieren

Werkzeuge

Siehe Lerneinheit 1, Seite 14.

1. Teiler untersuchen

Forschungsauftrag 1: Anzahl der Teiler untersuchen

Die Zahl 6 kann man durch 1 teilen, durch 2 teilen, durch 3 teilen und durch 6 teilen. Die Zahl 6 hat folglich vier Teiler. Die Zahl 7 hat weniger Teiler als die Zahl 6, die Zahl 16 hat mehr Teiler.

Untersuche jeweils die natürlichen Zahlen von 1 bis 20:

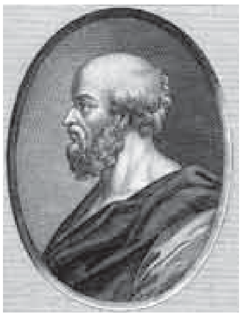
- Welche Zahlen haben genau drei Teiler? Welche Besonderheit haben diese Zahlen?
- Welches ist die Zahl mit den meisten Teilern?
- Welche Zahlen haben nur zwei Teiler, nämlich 1 und sich selbst?
- Gibt es Zahlen mit nur einem Teiler?

Wenn ihr euch die Arbeit in der Klasse aufteilt, könnt ihr auch die Teiler der Zahlen 1 bis 100 untersuchen.

Forschungsauftrag 2: Das Sieb des Eratosthenes

Schreibt die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 in einer Tabelle wie in Fig. 1 auf.

- Streicht alle Zahlen durch, die durch 2 teilbar sind, aber nicht die 2 selbst. Welche Zahlen bleiben übrig?
- Streicht nun alle Zahlen durch, die durch 3 teilbar sind, aber nicht die 3 selbst. Fahre so mit den anderen Zahlen (4, 5, 6 …) fort.
- Welche Besonderheit haben die Zahlen, die am Ende übrig bleiben?



Eratosthenes von Kyrene (275–195 v. Chr.)

1	2	3	~~4~~	5
~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~
~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~
~~26~~	…	…	…	…

Fig. 1

Forschungsauftrag 3: Teiler sofort sehen

- Beschreibt, wie man sofort sehen kann, ob man eine Zahl durch 2, durch 5 oder durch 10 teilen kann. Schreibt jeweils drei sechsstellige Zahlen auf, die durch 2, 5 bzw. 10 teilbar sind.
- Man kann auch leicht sehen, ob eine Zahl durch 3 oder durch 9 teilbar ist. Hierzu berechnet man die so genannte Quersumme der Zahl. Diese ergibt sich als Summe der Ziffern der Zahl (z. B. die Quersumme von 456 ist 4 + 5 + 6 = 15). Berechnet bei verschiedenen dreistelligen Zahlen aus der 3er- und der 9er-Reihe die Quersumme. Manchmal lässt sich auch noch die Quersumme der Quersumme usw. berechnen (vgl. Fig. 2 und Fig. 3). Was fällt auf? Versucht eine Regel aufzustellen: „Wenn eine Zahl durch 3 (durch 9) teilbar ist, dann…“
- Schreibt jeweils drei sechsstellige Zahlen auf, die durch 3 bzw. durch 9 teilbar sind.

Es kann sinnvoll sein, die Arbeit in der Klasse so aufzuteilen, dass sich eine Gruppe mit der 3er-Reihe und eine mit der 9er-Reihe beschäftigt.

Es ist sinnvoll, die wichtigsten Ergebnisse der drei Forschungsaufträge z. B. auf einem Poster zusammen zu fassen. Ihr könnt dann die Poster verschiedener Gruppen vergleichen.

Zahlen aus der 3er-Reihe:

Zahl	Quersumme	Quersumme der Quersumme
333	9	9
336	12	3
339	15	6
342	…	…
345	…	…
348	…	…
…	…	…

Fig. 2

Zahlen aus der 9er-Reihe:

Zahl	Quersumme	Quersumme der Quersumme
900	9	9
909	18	…
918	18	…
927	…	…
936	…	…
…	…	…

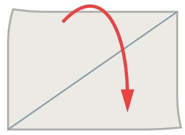
Fig. 3

2. Falten

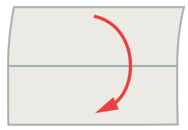
Siehe Lerneinheit 1, Seite 14, und Lerneinheit 2, Seite 18.

Faltet ein Blatt Papier so, dass ihr ein Zwölftel des Papiers erhaltet. Findet möglichst viele unterschiedliche Weisen, das Papier zu falten. Vergleicht eure Ergebnisse untereinander.

diagonal falten



rechteckig falten



Systematisch Falten:
Nehmt mehrere Blätter und faltet noch andere Anteile. Beginnt zunächst mit $\frac{1}{2}$.
Aber Achtung: Jetzt ist diagonal falten nicht mehr erlaubt. Faltet dann $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ usw. bis $\frac{1}{8}$.
- Überlegt euch jeweils, wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, die Anteile zu falten.
- Warum kann man bei manchen Anteilen häufiger falten als bei anderen?

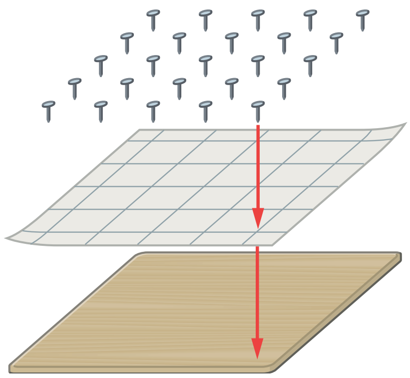
Faltmöglichkeiten vorhersagen:
- Wie sieht es bei den Bruchteilen $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, …, $\frac{1}{20}$ aus? Arbeitet zu zweit. Einer sagt voraus, wie viel Faltmöglichkeiten es gibt und der andere überprüft die Aussagen durch Falten.

3. Geobrett

Siehe Lerneinheit 2, Seite 18.

Erinnert ihr euch noch an das Geobrett? In Fig. 1 seht ihr Geobretter auf denen verschiedene Anteile der Fläche mit einem Gummiband umspannt sind.
- Welche Anteile sind jeweils auf den Geobrettern umspannt?
- Spannt $\frac{1}{4}$ eines gesamten Geobrettes durch eine Figur ab, die höchstens vier Ecken hat. Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt? Haltet eure Lösungen in eurem Heft fest. Beschreibt, wie ihr vorgegangen seid.
- Probiert dasselbe auch für $\frac{2}{8}$ und $\frac{1}{16}$. Was fällt euch auf? Nennt Gründe für eure Beobachtungen.
- Denkt euch selbst andere Bruchteile aus und spannt sie auf möglichst verschiedene Weisen. Gibt es Bruchteile, die sich nicht spannen lassen? Welche?

Du benötigst ein Brett aus Sperrholz von der Größe 12,4 cm × 12,4 cm. Das Sperrholz sollte mindestens 12 mm dick sein. Zeichne ein Gitternetz von derselben Größe wie die Sperrholzplatte auf Papier. Die Gitterlinien sollten jeweils 3 cm Abstand besitzen. Klebe dieses Papier auf die Platte und schlage kleine Nägel in die Gitterpunkte ein.



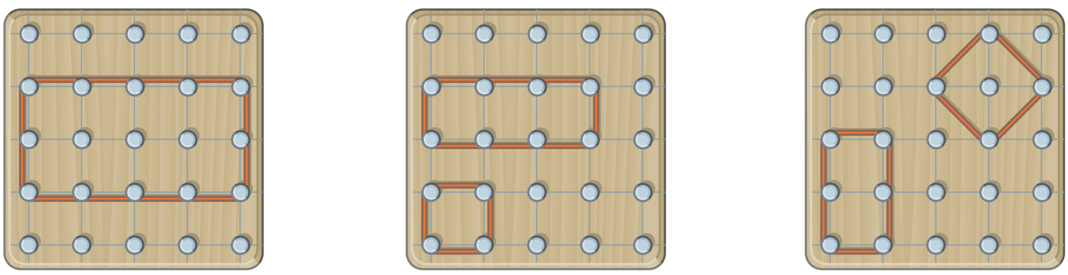


Fig. 1

Siehe Lerneinheit 5, Seite 31.

4. Kommazahlen in Tabellen

Hunderter **H** **100**	Zehner **Z** **10**	Einer **E** **1**	Zehntel **z** $\frac{1}{10}$	Hundertstel **h** $\frac{1}{100}$	Tausendstel **t** $\frac{1}{1000}$

Forschungsauftrag 1: Zahlen mit Plättchen legen
Man kann Kommazahlen in einer Stellenwerttafel darstellen, indem man Zahlen von 0 bis 9 in die Felder der Stellenwerttafel schreibt. Stattdessen kann man auch Plättchen in die Felder der Stellenwerttafel legen. Versucht die folgenden Fragen zu beantworten. Ihr könnt hierzu 1-Cent-Münzen in die obere Stellenwerttafel legen.

Man kann die Stellenwerttafel natürlich nach links und nach rechts erweitern.

Hunderter **H** **100**	Zehner **Z** **10**	Einer **E** **1**	Zehntel **z** $\frac{1}{10}$	Hundertstel **h** $\frac{1}{100}$	Tausendstel **t** $\frac{1}{1000}$
			 		

- Welche Zahl ist in der obigen Tabelle dargestellt?
- Welches ist die größte bzw. kleinste Zahl, die man in der obigen Stellenwerttafel mit fünf Plättchen legen kann?
- Wie viele verschiedene Zahlen kann man in der obigen Stellenwerttafel mit zwei Plättchen legen?
- Wie viele verschiedene Zahlen zwischen 0 und 1 kann man in der obigen Stellenwerttafel mit zwei Plättchen legen?

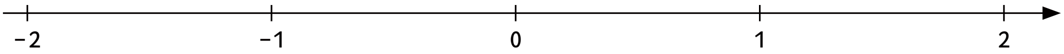
Forschungsauftrag 2: Plättchen wegnehmen oder wandern lassen
- Legt die Zahl 2,12 mit Plättchen. Es darf nun ein Plättchen weggenommen werden. Berechnet den Unterschied zwischen 2,12 und den neuen Zahlen.
- Legt die Zahl 2,13 mit Plättchen. Nun darf man ein Plättchen um eine Stelle verschieben. Berechnet den Unterschied zwischen 2,13 und den neuen Zahlen.

Forschungsauftrag 3: Brüche mit Plättchen legen
- Einige Brüche kann man sehr leicht mithilfe von Plättchen in der Stellenwerttafel darstellen und dann als Dezimalzahl mit Komma schreiben.
  Legt die Brüche $\frac{1}{10}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{4}{100}$; $\frac{2}{1000}$ mithilfe von Plättchen und schreibt sie dann als Dezimalzahl mit Komma.
- Auch Brüche wie $\frac{11}{100}$; $\frac{13}{10}$; $\frac{132}{1000}$ lassen sich leicht mithilfe von Plättchen legen. Beschreibt, wie man dabei vorgehen kann.
- Man kann auch die Brüche $\frac{1}{50}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$ in einer Stellenwerttafel darstellen und als Kommazahl schreiben. Beschreibt, was man hierzu zunächst tun muss, und bestimme die zugehörigen Kommazahlen.
- Es gibt Brüche, die man nicht in einer Stellenwerttafel darstellen kann. Sucht solche Brüche und erklärt, warum man sie nicht in der Stellenwerttafel darstellen kann.

5. Brüche auf der Zahlengerade

Siehe Lerneinheit 4, Seite 27 und Lerneinheit 5, Seite 31.

Die Zahlengerade kennt ihr bereits mit ganzen Zahlen. Aber welche Zahlen liegen zwischen den ganzen Zahlen?



Eine Zahlengerade mit der Klasse zusammenstellen
Arbeitet in Zweierteams. Jedes Zweierteam erstellt einen vergrößerten Ausschnitt der Zahlengerade. Am Ende könnt ihr dann alle Abschnitte eurer Zahlengerade zusammenkleben und in der Klasse aufhängen.

Wenn ihr nicht wisst, wie ihr vorgehen sollt, könnt ihr im Buch suchen, wo sich Informationen zur Zahlengeraden mit Brüchen und Kommazahlen befinden.

- Team 1 beginnt mit dem Abschnitt von −5 bis −4
- Team 2 macht den Abschnitt von −4 bis −3 usw.

Eine Einheit auf der Zahlengerade soll genau 20 cm lang werden.
Jedes Team beschriftet nun seinen Abschnitt der Zahlengerade mit Kommazahlen und Brüchen. Notiert die Brüche jeweils oberhalb der Gerade und die Kommazahlen unterhalb der Gerade. Vergesst nicht, zu jeder Zahl die Stelle auf der Geraden mit einem Strich zu markieren. Ihr könnt auch mit unterschiedlichen Farben arbeiten.

6. Umfrage auswerten

Siehe Lerneinheit 7, Seite 37.

Die Klassen 6 a, 6 b und 6 c haben alle eine Umfrage zu ihrem Lieblingsessen durchgeführt und ausgewertet. In allen drei Klassen sind jeweils 25 Schüler. Die Ergebnisse haben sie aber unterschiedlich dargestellt.



- Vergleicht die Ergebnisse der Umfrage. In welcher Klasse ist der Anteil der Kinder am größten, die am liebsten Nudeln bzw. Pommes essen?
- Schreibt einen Artikel für die Schülerzeitung, in dem die Ergebnisse aus der Tabelle verglichen werden.
- Führt in eurer Klasse eine ähnliche Umfrage durch und vergleicht die Ergebnisse mit denen in der Tabelle. Wie kann man dabei vorgehen? In welcher Klasse ist der Anteil derjenigen am größten, die am liebsten Pizza, Nudeln, Pommes usw. essen?

Umfrageergebnisse zum Lieblingsessen

Essen	6 a	6 b	6 c
Pizza	5	8%	$\frac{1}{5}$
Nudeln	4	28%	$\frac{2}{25}$
Pommes	6	24%	$\frac{3}{25}$
Fischstäbchen	2	8%	$\frac{2}{5}$
Würstchen	4	12%	$\frac{1}{25}$
Sonstiges	4	20%	$\frac{4}{25}$

1 Teilbarkeit

In Erkundung 1, Seite 10, kannst du die wichtigsten Teilbarkeitsregeln selbst herausfinden.

Lottofamilie teilt gerecht
Die drei Brüder, die letzte Woche 25 000 000 € im Lotto gewonnen haben, geben an: „Wir teilen den Gewinn gleich auf!“

„Das geht doch gar nicht“, meint Peter beim Lesen des Zeitungsartikels, „24 Millionen kann man durch 3 teilen, aber 1 Million doch nicht! Höchstens 999 999, das sind dann dreimal 333 333. Den Euro, der übrig bleibt, bekomme ich!“

In diesem Kapitel geht es darum, Brüche zu beschreiben, mit ihnen zu rechnen, sie zu vergleichen oder einen Bruch in einer anderen Schreibweise anzugeben. Hierzu ist es häufig hilfreich, die wichtigsten Teilbarkeitsregeln zu kennen und anwenden zu können.

Eine Zahl besteht oft aus mehreren Ziffern. Die Zahl 248 besteht aus den Ziffern 2, 4 und 8.

248 kann man ohne Rest durch 2 teilen, denn 248 : 2 = 124. Man sagt daher, dass 248 durch 2 **teilbar** und 2 ein **Teiler** von 248 ist bzw. dass 248 ein **Vielfaches** von 2 ist. Um zu prüfen, ob eine Zahl durch 2 teilbar ist, braucht man aber keine Rechnung durchzuführen. Da alle geraden Zahlen durch 2 teilbar sind, reicht es, die letzte Ziffer zu betrachten. Wenn diese gerade ist (d. h. 0, 2, 4, 6 oder 8), dann ist die Zahl gerade und durch 2 teilbar.

5, 10, 15, 20, 25, … sind Vielfache von 5.
10, 20, 30, 40, … sind Vielfache von 10.

In ähnlicher Weise kann man untersuchen, ob eine Zahl durch 5 oder durch 10 teilbar ist. Hier reicht es ebenfalls, die letzte Ziffer zu betrachten, denn die Vielfachen von 5 enden immer auf 5 oder 0 und die Vielfachen von 10 enden stets auf 0.

Alle Vielfachen von 100 sind durch 4 teilbar.
100 : 4 = 25
200 : 4 = 50
300 : 4 = 75
400 : 4 = 100
…

Auch für die Teilbarkeit durch 4 lässt sich eine ähnliche Regel finden. Hierbei reicht es jedoch nicht aus, die letzte Ziffer zu betrachten. Denn 12 ist durch 4 teilbar und endet auf 2, aber 22 endet auch auf 2, ist aber nicht durch 4 teilbar. Weil 100 durch 4 teilbar ist, reicht es jedoch, die letzten beiden Ziffern zu betrachten. So ist z. B. 824 durch 4 teilbar, da 800 durch 4 teilbar ist (800 : 4 = 200) und der Rest 24 auch durch 4 teilbar ist (24 : 4 = 6); 723 ist aber nicht durch 4 teilbar. 700 ist durch 4 teilbar (700 : 4 = 175), aber der Rest 23 ist nicht durch 4 teilbar. Daher bleibt bei der Rechnung 723 : 4 ein Rest.

Endziffernregeln

Endziffernregeln:
Eine Zahl ist durch **2 teilbar**, wenn sie auf 0, 2, 4, 6, oder 8 endet.
Eine Zahl ist durch **10 teilbar**, wenn sie auf 0 endet.
Eine Zahl ist durch **5 teilbar**, wenn sie auf 5 oder 0 endet.
Eine Zahl ist durch **4 teilbar**, wenn die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.

Wenn in einer Summe beide Summanden durch a teilbar sind, so ist auch die Summe durch a teilbar. Wenn ein Summand durch a teilbar ist und der andere nicht, so ist die Summe nicht durch a teilbar.

Wenn man prüfen möchte, ob eine Zahl, z. B. 2465, durch 3 oder durch 9 teilbar ist, muss man anders vorgehen. Man kann hierzu 2465 als Summe von Tausendern, Hundertern, Zehnern und Einern schreiben, wobei bei der Division durch 3 oder 9 pro Tausender, Hunderter usw. jeweils der Rest 1 bleibt.

$$\begin{aligned}2465 &= 2000 + 400 + 60 + 5\\ &= 2\cdot 999 + 2 + 4\cdot 99 + 4 + 6\cdot 9 + 6 + 5\\ &= \underbrace{2\cdot 999 + 4\cdot 99 + 6\cdot 9}_{\substack{\text{durch 3 und 9 teilbar,}\\ \text{denn 9, 99 und 999 sind}\\ \text{durch 3 und 9 teilbar}}} + \underbrace{2 + 4 + 6 + 5}_{\substack{17\\ \text{weder durch 3 noch}\\ \text{durch 9 teilbar}}}\end{aligned}$$

Weil der erste Teil der Summe stets durch 3 und durch 9 teilbar ist, braucht man nur den zweiten Teil zu betrachten, um zu prüfen, ob 2465 durch 3 bzw. durch 9 teilbar ist. Der zweite Teil der Summe $(2 + 4 + 6 + 5)$ entspricht der Summe der Ziffern von 2465. Diese Summe nennt man auch die **Quersumme**. Da die Quersumme in diesem Fall 17 ergibt und weder durch 3 noch durch 9 teilbar ist, ist auch 2465 weder durch 3 noch durch 9 teilbar.

Quersummenregeln:
Wenn man alle Ziffern einer Zahl addiert, erhält man die **Quersumme** dieser Zahl.
Eine Zahl ist **durch 3** bzw. **durch 9** teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 bzw. durch 9 teilbar ist.

Quersummenregeln

Beispiel
Prüfe, ob die Zahl 27780 durch 2, 3, 4, 5, 9 bzw. 10 teilbar ist.
Lösung:
Da 27780 auf 0 endet, ist 27780 durch 2, 5 und 10 teilbar.
Die Zahl, die sich aus den letzten beiden Ziffern zusammensetzt, ist 80. 80 ist durch 4 teilbar, denn $80 : 4 = 20$. Also ist auch 27780 durch 4 teilbar.
Die Quersumme von 27780 beträgt $2 + 7 + 7 + 8 = 24$. 24 ist durch 3 teilbar, denn $24 : 3 = 8$. Also ist auch 27780 durch 3 teilbar. 24 ist jedoch nicht durch 9 teilbar. Also ist auch 27780 nicht durch 9 teilbar.

Aufgaben

1 Prüfe, ob die folgenden Zahlen durch 2, 4, 5 bzw. 10 teilbar sind.
a) 244; 874; 299; 788; 800; 412; 650; 940; 444
b) 2426; 6788; 5490; 4122; 90 878; 86 334; 105 111; 234 155; 288 124; 9 985 188
c) Überlege dir mithilfe der Teilbarkeitsregeln Zahlen, bei denen bei der Division durch 2, 4, 5 bzw. 10 ein Rest bleibt. Lass deinen Nachbarn durch eine schriftliche Division überprüfen, ob wirklich ein Rest bleibt. Kann man den Rest auch bestimmen, ohne die ganze schriftliche Division durchführen zu müssen? Begründe.

2 Prüfe mithilfe der Quersumme, ob die folgenden Zahlen durch 3 bzw. durch 9 teilbar sind.
a) 912; 423; 549; 112; 397; 555; 946
b) 1999; 324665; 123456; 751252; 978132; 2977128
c) Überlege dir Zahlen, bei denen bei der Division durch 3 oder 9 ein Rest bleibt. Lass deinen Nachbarn durch eine schriftliche Division nachrechnen, ob ein Rest bleibt. Lässt sich anhand der Quersumme bestimmen, wie groß der Rest ist? Wenn ja, wie?

3 Wenn du auf einer Schreibmaschine alle zehn Ziffern einmal anschlägst, so erhältst du unabhängig von der Reihenfolge stets eine durch 3 und durch 9 teilbare Zahl. Warum?

4 a) Zeige, dass die folgenden Zahlen durch 3 teilbar sind:
1011; 2202; 44 004; 80 088; 303 003; 700 070 007
b) Begründe, warum alle Zahlen mit drei gleichen Ziffern und sonst nur Nullen stets durch 3 teilbar sind.

5 a) Bestimme die kleinste fünfstellige Zahl, die durch 3 teilbar ist.
b) Bestimme die kleinste sechsstellige Zahl, die durch 9 teilbar ist.
c) Bestimme die größte fünfstellige Zahl, die durch 4 teilbar ist.
d) Bestimme zwei nicht durch 2 teilbare Zahlen, deren Summe aber durch 4 teilbar ist.

6 Welche durch 9 teilbare Zahl liegt am nächsten an der angegebenen Zahl?
a) 679 b) 421 c) 853 d) 4321 e) 8110 f) 52111

Ein Schaltjahr hat 366 Tage, die anderen Jahre haben nur 365 Tage. Der 29. Februar existiert nur in den Schaltjahren.

7 Ist eine Jahreszahl durch 4 teilbar, so ist das Jahr ein Schaltjahr.
Ausnahme: Ist die Zahl durch 100 teilbar, aber nicht durch 400 teilbar, so gibt es kein Schaltjahr, wie z. B. 1900.
a) Volker wurde am 29. Februar 1980 geboren. In welchen Jahren konnte er bisher seinen Geburtstag feiern?
b) Die oben beschriebene Ausnahmeregelung für Schaltjahre wurde 1582 von Papst Gregor XIII. eingeführt. Wie viele Schaltjahre hat es seitdem gegeben?

Bist du sicher?

1 Prüfe, ob die folgenden Zahlen durch 3, 4, 5 bzw. 9 teilbar sind.
a) 123 b) 124 c) 3285 d) 1234 e) 243 671 f) 1741 989

2 Die Zahl 168 327 ist durch 3 und durch 9 teilbar. Erkläre, warum dann auch alle anderen Zahlen mit denselben Ziffern durch 3 und durch 9 teilbar sind.

Weitere Teilbarkeitsregeln

Tipp:
Notiere die 2er- und die 3er-Reihe und markiere jeweils die durch 2, 3 und 6 teilbaren Zahlen mit unterschiedlichen Farben.

8 a) Gib fünf dreistellige Zahlen an, die durch 3 und durch 2 teilbar sind. Prüfe durch eine schriftliche Division, ob diese Zahlen auch durch 6 teilbar sind.
b) Begründe, wieso folgende Aussagen stimmen müssen:
(1) Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, dann muss sie auch durch 3 teilbar sein.
(2) Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, dann muss sie auch durch 2 teilbar sein.
(3) Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
c) Prüfe mithilfe der Aussagen in b), ob die folgenden Zahlen durch 6 teilbar sind.
311, 516; 999, 5376; 20 454, 7281; 47 288; 51 072; 711 516

9 a) Zeige, dass man mithilfe der Überlegungen in Aufgabe 8 eine Regel für die Teilbarkeit durch 15 finden kann. Formuliere die Regel und probiere sie aus.
b) Jana behauptet „8 = 2 · 4. Wenn eine Zahl durch 4 und durch 2 teilbar ist, so ist sie auch durch 8 teilbar.“ Zeige, dass Jana nicht Recht hat.

Wenn man die Teilbarkeit durch 8 untersuchen möchte, reicht es nicht aus, die letzten 2 Ziffern zu betrachten, weil 100 nicht durch 8 teilbar ist.

10 a) Berechne die folgenden Produkte und vergleiche die letzten drei Ziffern:
1 · 8; 2 · 8; 3 · 8; 4 · 8 126 · 8; 127 · 8; 128 · 8; 129 · 8 251 · 8; 252 · 8; 253 · 8, 254 · 8
b) Erkläre, wie man mithilfe der letzten Ziffern prüft, ob eine Zahl durch 8 teilbar ist.
c) Nenne drei sechsstellige Zahlen, die durch 8 teilbar sind.

11 Notiere Regeln für die Teilbarkeit durch 20; 50; 100; 500; 1000.

12 Erstellt eine Übersicht über alle euch bekannten Teilbarkeitsregeln. Erklärt die Regeln und erläutert sie jeweils durch ein Beispiel.

13 Spiel zur Teilbarkeit
Dieses Spiel könnt ihr zu dritt oder viert spielen. Ihr benötigt zwei Spielwürfel. Ein Schüler eröffnet die erste Spielrunde, indem er mit den beiden Würfeln würfelt, z. B. 3 und 5. Jetzt müssen die anderen Spieler innerhalb von einer Minute in Fig. 1 so viele Zahlen wie möglich finden, die durch die Summe (also 8) teilbar sind. Der Spieler, der gewürfelt hat, achtet auf die Zeit. Der Schüler, der am meisten Zahlen findet, erhält zwei Punkte, der zweite einen Punkt. Anschließend kann der nächste eine Zahl mit den Würfeln bestimmen.

21 22 102
52 244
49
14 43 362 81
34
51
27 48
43
75 92 71
120 3 84
72
12 24
540 501 250

Fig. 1

Info

Primfaktorzerlegung
Eine Zahl, die man nur durch sich selbst und durch 1 teilen kann, heißt **Primzahl**.
Wenn man eine Zahl als Produkt von Primzahlen schreibt, so nennt man das die **Primfaktorzerlegung** dieser Zahl. Hierbei können auch Primzahlen doppelt vorkommen.
So ist zum Beispiel $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ die Primfaktorzerlegung von 144, denn $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 144$ und 2 und 3 sind jeweils Primzahlen.

Statt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ kann man auch 2^4 schreiben.

Der größte gemeinsame Teiler (ggT)
Mithilfe der Primfaktorzerlegung lässt sich **der größte gemeinsame Teiler (ggT)** von zwei Zahlen, z. B. von 144 und 360, bestimmen, d. h. diejenige größte Zahl, durch die sowohl 144 als auch 360 teilbar sind. Hierzu vergleicht man die Primfaktorzerlegungen von 144 und 360 und bildet das Produkt aller Primzahlen, die sowohl in der Primfaktorzerlegung von 144 als auch in der von 360 vorkommen. Wenn eine Primzahl in beiden Primfaktorzerlegungen doppelt, dreifach usw. vorkommt, muss sie auch zur Bestimmung des ggT doppelt, dreifach usw. berücksichtigt werden.

$144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ ist die Primfaktorzerlegung von 144.
$360 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ ist die Primfaktorzerlegung von 360.

Folglich ist $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ der ggT von 144 und 360. Man schreibt ggT(144; 360) = 36.

Beim Bestimmen der Primfaktorzerlegung geht man am besten Schritt für Schritt vor, z. B.:
$48 = 2 \cdot 24$
$= 2 \cdot 2 \cdot 12$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
Am Ende dürfen dann nur noch Primzahlen in dem Produkt stehen.

14 a) Prüft, welche Zahlen zwischen 1 und 30 Primzahlen sind.
b) Warum gibt es keine Primzahl, deren letzte Ziffer eine 0 ist?
c) Kann eine Primzahl gerade sein? Begründe.

15 Bestimme die Primfaktorzerlegungen und den ggT.
a) von 54 und 90 b) von 26 und 117 c) von 78 und 342 d) von 168 und 312
e) von 255 und 76 f) von 180 und 99 g) von 512 und 162 h) von 768 und 486

*Im Selbsttraining, Seite 239, befinden sich weitere Übungsaufgaben zum **größten gemeinsamen Teiler**.*

16 Wenn die Primfaktorzerlegungen von zwei Zahlen keine Primzahl gemeinsam haben, so nennt man die Zahlen teilerfremd und der ggT ist 1.
a) Prüfe, ob die Zahlen 182 und 165 teilerfremd sind.
b) Nenne eine dreistellige Zahl, die teilfremd zu 30 ist.

2 Brüche und Anteile

Helft dem Pferd. Recherchiert die Anteile von Wasser bei verschiedenen Tieren und beim Menschen. Trifft die Behauptung des Hundes zu?

Aus dem Alltag kennt man $\frac{3}{4}$ kg. Das sind drei Viertel von 1 Kilogramm. Den Bruchteil $\frac{3}{4}$ kg kann man auch in Gramm angeben. Dafür teilt man 1 kg in vier gleich große Teile, also 1 kg : 4 = 1000 g : 4 = 250 g. Anschließend nimmt man drei Teile davon und erhält: $\frac{3}{4}$ kg = 3 · 250 g = 750 g.

Brüche wie $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ benutzt man nicht nur, um Gewichte, Längen oder Zeitdauern anzugeben. Sie sind auch beim Teilen von Bedeutung. Je nach Situation kann man Brüche auf zweierlei Weise deuten:

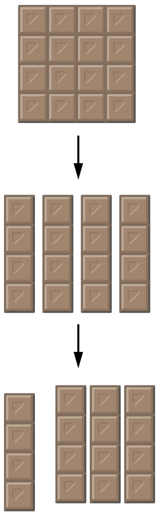
1. Möglichkeit
Peter möchte $\frac{3}{4}$ von einer Tafel Schokolade abtrennen. Dazu teilt er die Tafel im ersten Schritt in vier gleich große Stücke und nimmt dann drei von ihnen:

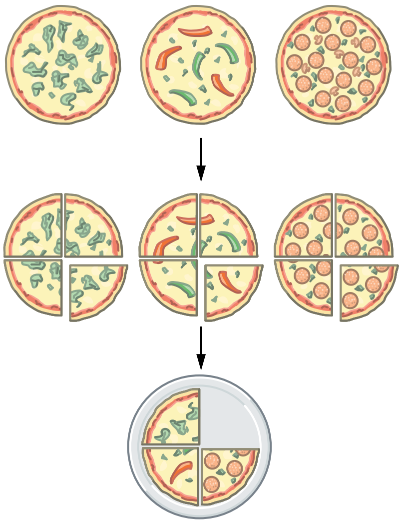
2. Möglichkeit
Julia, Tim, Lene und Fabian wollen sich drei Pizzen teilen, eine mit Spinat, eine mit Paprika und eine mit Salami. Dazu wird jede Pizza in Viertel geschnitten und auf die vier Kinder verteilt. Auf diese Weise bekommt jedes Kind insgesamt drei Viertel $\left(\frac{3}{4}\right)$.

*Nimm ein **Ganzes**.*

Teile erst durch 4.

Nimm drei Teile davon.





*Nimm drei **Ganze**.*

Nimm von jedem ein Viertel.

Fasse zu drei Viertel zusammen.

Zur Beschreibung von Anteilen verwendet man **Brüche** wie $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$ ...
Die obere Zahl nennt man **Zähler**, die untere **Nenner** des Bruches.

Es gibt zwei Möglichkeiten, den Bruch $\frac{3}{4}$ zu erhalten:

1. Möglichkeit:
Man zerlegt ein Ganzes in vier Teile und nimmt dann drei 3 Teile.

2. Möglichkeit
Man teilt drei Ganze jeweils in vier gleiche Teile und nimmt dann von jedem Ganzen ein Viertel.

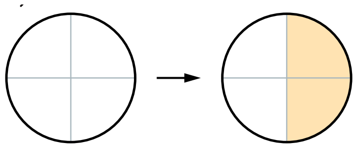
*Der **Zähler** „zählt" die Teile.*

Bruchstrich $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

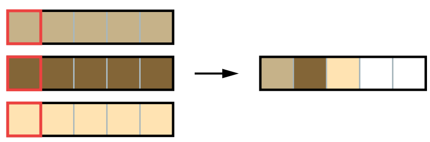
*Der **Nenner** beschreibt, in wie viele Teile unterteilt wurde.*

Beispiel 1
Stelle die folgenden Situationen grafisch dar. Beschreibe, wie du vorgegangen bist.
a) Joana kauft $\frac{2}{4}$ einer Torte.
b) Drei unterschiedliche Schokoriegel sollen auf fünf Kinder verteilt werden.
Mögliche Lösungen:

In Erkundung 2 und 3, Seite 11, geht es auch um die Darstellung von Brüchen.

a)


Eine Torte kann man mit einem Kreisbild veranschaulichen.
Man teilt den Kreis in vier gleiche Teile und markiert zwei davon. Dies sind die Teile, die Joana kauft.

b)


Die Schokoriegel lassen sich mit Rechteckbildern darstellen. Ich nehme drei Rechtecke, markiere ein Fünftel von jedem Rechteck und fasse zu $\frac{3}{5}$ zusammen. Somit bekommt jedes Kind insgesamt drei Fünftel Schokoriegel.

Beispiel 2 Bruchteile berechnen
Schreibe ohne Verwendung eines Bruches.

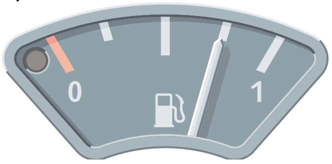
a) $\frac{3}{4}$ m b) $\frac{7}{10}$ t c) $\frac{2}{5}$ von 20 Personen d) $\frac{5}{6}$ von 2 h

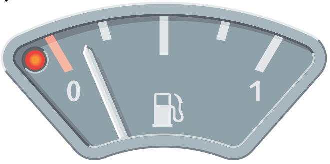
Lösung:
a) $\frac{1}{4}$ m = 25 cm; $\frac{3}{4}$ m = 3 · 25 cm = 75 cm. *$\frac{3}{4}$ heißt: Teile durch 4; nimm 3 dieser Teile.*
b) $\frac{1}{10}$ t = 100 kg; $\frac{7}{10}$ t = 7 · 100 kg = 700 kg. *$\frac{7}{10}$ heißt: Teile durch 10; nimm 7 dieser Teile.*
c) $\frac{1}{5}$ von 20 Personen sind 4 Personen; $\frac{2}{5}$ von 20 Personen sind 8 Personen.
d) 2 h = 120 min; $\frac{1}{6}$ von 120 min sind 20 min; *Schreibe 2 h zunächst in Minuten.*
$\frac{5}{6}$ von 120 min sind 5 · 20 min = 100 min. *Teile dann durch 6; nimm 5 dieser Teile.*

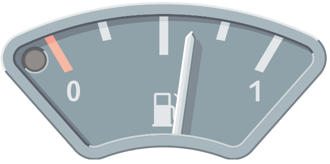
Zu d):
2 h = 120 min
: 6
20 min
· 5
100 min

Aufgaben

1 Wenn die Tankanzeige „voll" anzeigt, sind 80 Liter im Tank. Wie viel Liter sind jeweils im Tank?

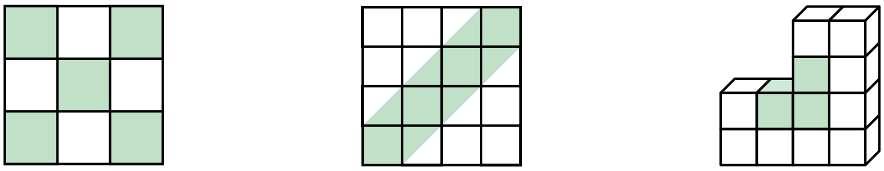
a)


b)


c)


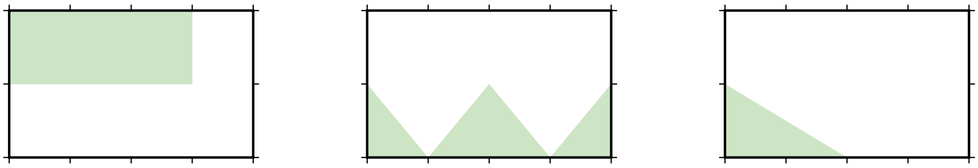
2 Schreibe den gefärbten Anteil als Bruch und beschreibe deinen Lösungsweg.

a) b) c)

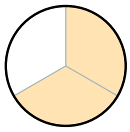


3 Welcher Anteil des Rechtecks ist gefärbt und welcher Anteil ist nicht gefärbt?

a) b) c)



Kreisbild:

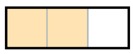


$\frac{2}{3}$

Stabbild:

$\frac{2}{3}$

Rechteckbild:



$\frac{2}{3}$

Fig. 1

4 Stelle drei Brüche deiner Wahl als Kreis-, Stab- oder als Rechteckbild (siehe Fig. 1) dar. Lasse deinen Nachbarn bestimmen, welchen Bruch du dargestellt hast.

5 Erfinde Situationen, in denen die folgenden Brüche eine Rolle spielen.

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{6}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{3}{7}$ e) $\frac{4}{8}$

6 Gib die Größen ohne Bruch an.

a) $\frac{1}{2}$ km b) $\frac{1}{4}$ m c) $\frac{1}{5}$ cm d) $\frac{1}{4}$ h e) $\frac{1}{3}$ h

$\frac{3}{4}$ € $\frac{3}{4}$ km $\frac{3}{10}$ kg $\frac{3}{4}$ h $\frac{4}{5}$ km

$\frac{3}{4}$ kg = 750 g: Ein Mathebuch.

7 Schreibe ohne Bruch und gib zu den Größen jeweils ein passendes Beispiel an.

a) $\frac{1}{20}$ m b) $\frac{3}{100}$ kg c) $\frac{20}{100}$ € d) $\frac{1}{8}$ km e) $\frac{1}{60}$ h

$\frac{1}{12}$ h $\frac{3}{10}$ min $\frac{6}{20}$ t $\frac{7}{60}$ min $\frac{99}{100}$ m

8 Schreibe wie in Beispiel 2 ohne Bruch.

a) $\frac{1}{4}$ von 8 kg b) $\frac{2}{3}$ von 60 m c) $\frac{1}{10}$ von 1 cm d) $\frac{2}{5}$ von 100 Personen

$\frac{3}{10}$ von 20 Äpfeln $\frac{1}{2}$ von 5 € $\frac{7}{8}$ von 40 Eiern $\frac{3}{100}$ von 8 km

9 In der Klassenstufe 6 sind 80 Kinder. Wie viele Kinder sind davon

a) drei Viertel, b) vier Achtel, c) ein Zehntel, d) fünf Fünftel?

Zur Erinnerung:
$1\,m^2 = 100\,dm^2$
$1\,dm^2 = 100\,cm^2$
$1\,m^3 = 1000\,dm^3$
$1\,dm^3 = 1000\,cm^3$
$1\,a = 100\,m^2$
$1\,ha = 100\,a$
$500\,m = \frac{1}{2}\,km$

10 Schreibe die Flächeninhalte und Volumina ohne Bruch in einer anderen Einheit.

a) $\frac{1}{2}\,m^2$ b) $\frac{1}{5}\,m^2$ c) $\frac{1}{5}\,cm^2$ d) $\frac{1}{4}\,dm^2$ e) $\frac{1}{10}\,cm^2$

$\frac{1}{2}\,m^3$ $\frac{3}{10}\,dm^3$ $\frac{3}{4}\,m^3$ $\frac{1}{4}\,m^3$ $\frac{1}{5}\,dm^3$

$\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{10}$ a $\frac{1}{2}$ ha $\frac{1}{10}$ ha $\frac{1}{5}$ ha

11 Schreibe in einer größeren Einheit und verwende dabei einen Bruch.

a) 50 cm b) 500 m c) 750 g d) 400 mg e) 30 min

f) 45 min g) 50 Cent h) 54 min i) $5000\,cm^2$ j) $100\,cm^3$

Bist du sicher?

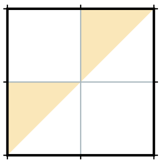
1 Stelle die Brüche als Kreis-, Rechteck- oder Stabbild dar (vgl. Fig. 1 auf S. 20): a) $\frac{2}{4}$ b) $\frac{3}{5}$

2 Gib die Größen ohne Bruch an.

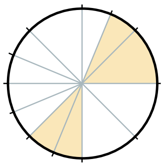
a) $\frac{3}{10}$ kg b) $\frac{1}{4}$ m^2 c) $\frac{2}{3}$ von 30 min d) $\frac{1}{8}$ von 4 m^3

3 Welcher Anteil der Figur ist gefärbt?

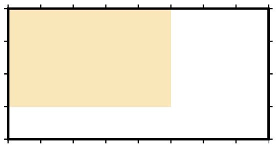
a)



b)



c)



4 Von einer Tafel Schokolade mit 24 Stückchen isst Yvonne $\frac{1}{6}$ und Ricki $\frac{2}{3}$. Wie viele Stückchen bleiben übrig?

12 Rothirsche und Impala-Antilopen haben mit 10 m die größte Sprungweite aller Tiere. Löwen kommen auf $\frac{2}{5}$ dieser Weite, Füchse auf $\frac{1}{4}$ und Flöhe auf $\frac{1}{20}$. Berechne die Sprungweiten dieser Tiere.

13 a) Welchem Anteil von drei Schokoladentafeln mit je 24 Stücken entsprechen 12 Stücke?
b) Welchem Anteil einer Schokoladentafel mit 24 Stücken entsprechen 8; 10; 16; 20 Stücke?

14 Nina und ihre Mutter spielen für 12 € Lotto. Davon bezahlt Nina 2 € und ihre Mutter 10 €. Zu ihrer Freude gewinnen sie 300 €. Wie würdest du den Gewinn aufteilen?

15 Ordne die Strecken von kurz nach lang, die Gewichte von leicht nach schwer und die Zeiten von kurz nach lang. Tipp: $\frac{1}{2}$ km sind 500 m.

$\frac{1}{2}$ km	$\frac{1}{4}$ m	$\frac{1}{5}$ cm	$\frac{1}{4}$ h	$\frac{1}{3}$ h
$\frac{3}{4}$ cm	$\frac{3}{4}$ km	$\frac{3}{10}$ kg	$\frac{3}{4}$ h	$\frac{4}{5}$ km
$\frac{3}{10}$ t	$\frac{1}{6}$ h	$\frac{2}{6}$ h	$\frac{1}{2}$ g	$\frac{1}{10}$ cm

16 a) 80 Kinder gehen in die Jahrgangsstufe 6. Vier Achtel der Kinder sind blond, zwei Viertel haben blaue Augen, drei Fünftel sind Mädchen. Wie viele Kinder sind das jeweils?
b) Denke dir selbst Aufgaben wie in a) aus. Bei welchen Aufgaben erhältst du ein sinnvolles Ergebnis? Begründe.

17 Dreieck und Parallelogramm
Von dem Parallelogramm in Fig. 1 wird ein Dreieck abgeschnitten. Welcher Anteil von der Parallelogrammfläche ist das?

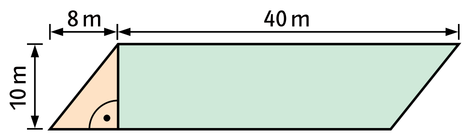


Fig. 1

18 Zeichne die Figuren (Fig. 1) in dein Heft und ergänze sie zu einem Ganzen.

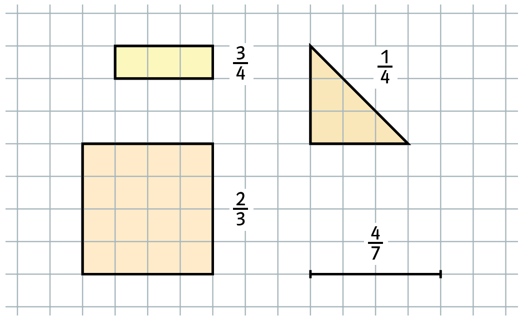


Fig. 1

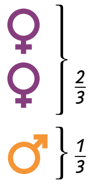
19 Gero hat von seinen Einnahmen des letzten halben Jahres $\frac{2}{3}$ für einen Kletterkurs gespart. Seine Einnahmen waren: Das monatliche Taschengeld von 6 € und Geldgeschenke von 15 € und 60 €. Wie viel hat er für den Kletterkurs gespart?

Info

Anteile und Verhältnisse

Mit Brüchen kann man auch Verhältnisse angeben. Zum Beispiel gehen 16 Mädchen und 8 Jungen in die Klasse 6a. Das bedeutet, das Verhältnis von Mädchen zu Jungen beträgt 16 : 8 (gesprochen 16 zu 8). Pro Junge sind demnach zwei Mädchen in der Klasse. Daher kann man auch sagen, dass das Verhältnis 2 : 1 beträgt. Man kann die Klasse 6a also in drei gleich große Teile teilen, sodass zwei dieser Teile Mädchen und ein Teil Jungen sind. Der Anteil an Jungen beträgt folglich $\frac{1}{3}$, der Anteil an Mädchen $\frac{2}{3}$.

Verhältnis 2 : 1



20 In der Klasse 6c gibt es 12 Kinder, die mit dem Fahrrad zur Schule kommen. Die anderen 16 Kinder gehen zu Fuß. Wie groß ist das Verhältnis der Kinder, die zu Fuß gehen, zu denen, die mit dem Fahrrad zur Schule kommen? Gib jeweils auch die Anteile an.

21 a) In der Klasse 6a ist das Verhältnis von Mädchen zu Jungen 3 : 2. Wie groß ist der Anteil an Mädchen in dieser Klasse? Wie viele Mädchen könnten in der Klasse sein?
b) Wie groß ist das Verhältnis von Mädchen zu Jungen in eurer Klasse?

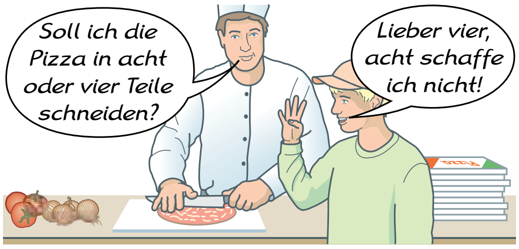
22 Fabians Fruchtcocktail ist der „absolute Renner". Nimmt man genau ein Teil Bananensaft, vier Teile Apfelsaft, ein Teil roten Traubensaft, zwei Teile Waldmeistersirup und zwei Teile Sprudelwasser, dann ist die Mischung kaum noch zu überbieten.
a) Bestimme den Anteil der verschiedenen Säfte in Fabians Cocktail.
b) Fabian hat drei Freunde eingeladen. Dafür sind 2 Liter gerade gut. Dann bekommt jeder ungefähr zwei Gläser. Wie viel der einzelnen Säfte und Wasser muss besorgt werden?
c) Lukas und Hanno haben von dem großen Erfolg von Fabians Fruchtcocktail gehört. Sie wollen bei einer Wiederholung auch teilnehmen. Wie viel Saft benötigt Fabian dann?

Kannst du das noch?

23 Berechne.
a) $24 : (-8)$ b) $(-6) \cdot 7$ c) $(-11) \cdot (-10)$ d) $(-40) : (-8)$ e) $72 : (-12)$ f) $-9 : (-3)$

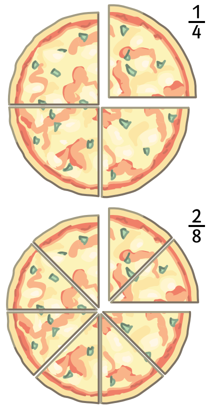
24 Welche Zahl gehört in das Kästchen?
a) $\square \cdot 4 = -36$ b) $\square \cdot (-7) = 28$ c) $60 : \square = -12$ d) $\square : (-8) = -5$ e) $7 : \square = 1$

3 Kürzen und erweitern



Was könnte der Pizza-Verkäufer antworten?

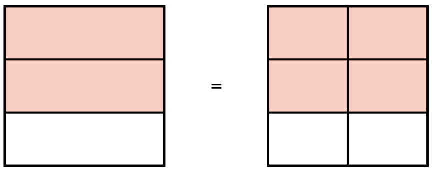
Um eine Pizza gerecht auf vier Personen zu verteilen, kann man sie in vier gleich große Stücke teilen. Dann bekommt jeder ein Viertel $\left(\frac{1}{4}\right)$ der Pizza. Teilt man die Pizza in acht Stücke, dann bekommt jeder zwei Stücke, also zwei Achtel $\left(\frac{2}{8}\right)$ Pizza. In beiden Fällen ist die Gesamtgröße der Pizza, die jede Person bekommt, gleich.



Die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{8}$ beschreiben denselben Anteil.

Ob zwei Brüche denselben Anteil bezeichnen, ist nicht immer leicht zu erkennen. Hier können wieder Bilder von Stäben, Rechtecken oder Kreisen helfen:

Das Verfeinern einer Unterteilung heißt **erweitern**.

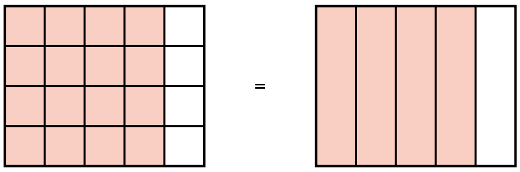


$$\frac{2}{3} \overset{\cdot 2}{\underset{\cdot 2}{=}} \frac{4}{6}$$

Fig. 1

Zähler und Nenner werden mit derselben Zahl multipliziert.

Das Vergröbern einer Unterteilung heißt **kürzen**.



$$\frac{16}{20} \overset{:4}{\underset{:4}{=}} \frac{4}{5}$$

Fig. 2

Zähler und Nenner werden durch dieselbe Zahl dividiert.

Erweitern eines Bruches bedeutet: Der Zähler und der Nenner des Bruches werden mit derselben Zahl multipliziert, z. B. $\frac{1}{4}$ erweitert mit 3 ergibt $\frac{3}{12}$.

Kürzen eines Bruches bedeutet: Der Zähler und der Nenner des Bruches werden durch dieselbe Zahl dividiert, z. B. $\frac{2}{6}$ gekürzt mit 2 ergibt $\frac{1}{3}$.

Wird ein Bruch erweitert oder gekürzt, dann bezeichnet der ursprüngliche und der entstandene Bruch denselben Anteil. Man schreibt: $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$; $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Die Teilbarkeitsregeln können helfen herauszufinden, mit welcher Zahl man kürzen kann.

Man kann einen Bruch mit jeder natürlichen Zahl erweitern. Kürzen kann man einen Bruch nur mit einer Zahl, durch die man den Zähler und Nenner ohne Rest dividieren kann. Eine solche Zahl heißt **gemeinsamer Teiler** von Zähler und Nenner.

Statt „kürze so weit wie möglich“ sagt man auch: „kürze vollständig“.

Beispiel 1 Erweitern und kürzen

a) Erweitere $\frac{3}{7}$ mit 3. b) Kürze $\frac{16}{28}$ mit 4. c) Kürze $\frac{48}{72}$ so weit wie möglich.

Lösung:

a) $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$ *Zähler: $3 \cdot 3 = 9$; Nenner $7 \cdot 3 = 21$*

b) $\frac{16}{28} = \frac{4}{7}$ *Zähler $16 : 4 = 4$; Nenner: $28 : 4 = 7$*

c) $\frac{48}{72} = \frac{24}{36} = \frac{12}{18} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ *Weitere Möglichkeiten: $\frac{48}{72} = \frac{2}{3}$ (gekürzt mit 24) oder*
$\frac{48}{72} = \frac{24}{36} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ oder $\frac{48}{72} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ oder $\frac{48}{72} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ oder ...

Beispiel 2

Ist es egal, ob du eine Torte in acht Stücke unterteilst und davon sechs Stücke nimmst oder eine Torte in zwölf Stücke unterteilst und davon neun Stücke nimmst? Begründe.

Mögliche Lösung:

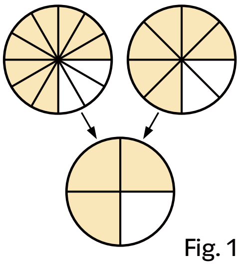


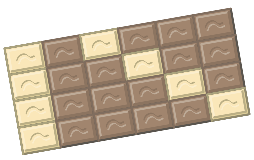
Fig. 1

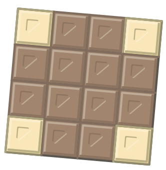
Bei der Teilung in acht Stücke erhält man $\frac{6}{8}$ der Torte, bei der Teilung in zwölf Stücke $\frac{9}{12}$.
Die beiden Brüche kann man z. B. mithilfe von Kreisbildern vergleichen.
In den oberen Kreisen in Fig. 1 werden die Brüche $\frac{6}{8}$ und $\frac{9}{12}$ dargestellt. Der gefärbte Anteil ist in beiden Kreisen gleich groß. Besonders gut kann man dies erkennen, wenn man in beiden Kreisbildern die Einteilung vergröbert. Man erhält jeweils drei Viertel (vgl. Fig. 1).
Man kann die Brüche auch miteinander vergleichen, indem man $\frac{6}{8}$ mit 2 und $\frac{9}{12}$ mit 3 kürzt. Man erhält jeweils denselben Bruch $\frac{3}{4}$:

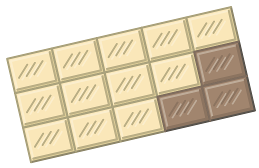
$\frac{6}{8} = \frac{\cancel{2} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot 4} = \frac{3}{4}$ $\frac{9}{12} = \frac{\cancel{3} \cdot 3}{\cancel{3} \cdot 4} = \frac{3}{4}$

Aufgaben

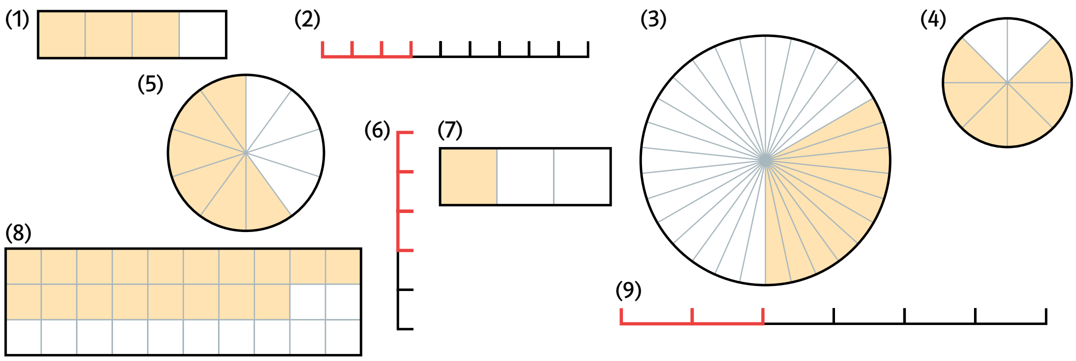
1 Drücke den Anteil der braunen Stückchen an der ganzen Tafel mit verschiedenen Brüchen aus.

a)


b)


c)


2 a) Fasse die Bilder zusammen, die denselben Bruch beschreiben, und gib diesen an.



b) Zeichne selbst Bruchbilder wie in a), bei denen jeweils zwei denselben Bruch beschreiben. Lass deinen Nachbarn herausfinden, welche Bilder dies sind.

3 Erweitere.

a) $\frac{2}{3}$ mit 5; $\frac{1}{12}$ mit 6 b) $\frac{1}{2}$ mit 3; $\frac{5}{7}$ mit 7 c) $\frac{5}{4}$ mit 2; $\frac{8}{8}$ mit 8 d) $\frac{3}{10}$ mit 10; $\frac{1}{4}$ mit 15 e) $\frac{3}{2}$ mit 11; $\frac{20}{25}$ mit 5 f) $\frac{1}{13}$ mit 3; $\frac{8}{9}$ mit 7

4 Kürze.

a) $\frac{6}{10}$ mit 2; $\frac{15}{50}$ mit 5 b) $\frac{8}{10}$ mit 2; $\frac{14}{28}$ mit 7 c) $\frac{6}{18}$ mit 6; $\frac{26}{39}$ mit 13 d) $\frac{6}{12}$ mit 2; $\frac{28}{42}$ mit 7 e) $\frac{6}{9}$ mit 3; $\frac{18}{42}$ mit 6 f) $\frac{20}{100}$ mit 10; $\frac{19}{38}$ mit 19

5 a) Mit welcher Zahl wurde erweitert?
$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$; $\frac{6}{8} = \frac{60}{80}$; $\frac{4}{9} = \frac{36}{81}$; $\frac{7}{11} = \frac{84}{132}$

b) Mit welcher Zahl wurde gekürzt?
$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$; $\frac{14}{35} = \frac{2}{5}$; $\frac{25}{75} = \frac{1}{3}$; $\frac{91}{117} = \frac{7}{9}$

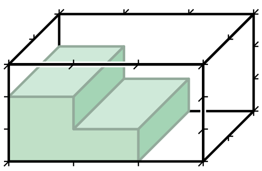
6 Prüfe, ob die Brüche denselben Anteil bezeichnen.

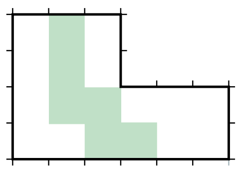
a) $\frac{4}{12}$; $\frac{1}{3}$ b) $\frac{30}{48}$; $\frac{10}{16}$ c) $\frac{12}{16}$; $\frac{9}{12}$ d) $\frac{10}{15}$; $\frac{6}{9}$ e) $\frac{18}{24}$; $\frac{15}{20}$ f) $\frac{36}{60}$; $\frac{15}{30}$

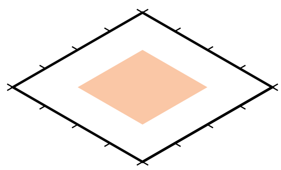
7 Kürze vollständig.

a) $\frac{12}{24}$; $\frac{12}{18}$; $\frac{30}{40}$; $\frac{25}{100}$; $\frac{50}{60}$; $\frac{50}{75}$ b) $\frac{15}{18}$; $\frac{16}{18}$; $\frac{6}{30}$; $\frac{48}{56}$; $\frac{75}{100}$; $\frac{120}{200}$ c) $\frac{8}{12}$; $\frac{35}{42}$; $\frac{13}{65}$; $\frac{80}{100}$; $\frac{125}{1000}$; $\frac{34}{51}$

8 Gib den gefärbten Anteil der Figur mit einem vollständig gekürzten Bruch an.

a)


b)


c)


9 Übertrage ins Heft und ergänze die fehlende Zahl.

a) $\frac{\square}{12} = \frac{1}{2}$; $\frac{32}{40} = \frac{\square}{5}$ b) $\frac{35}{42} = \frac{\square}{6}$; $\frac{\square}{42} = \frac{3}{7}$ c) $\frac{\square}{108} = \frac{5}{9}$; $\frac{\square}{121} = \frac{8}{11}$ d) $\frac{9}{\square} = \frac{3}{9}$; $\frac{16}{\square} = \frac{2}{7}$ e) $\frac{45}{\square} = \frac{5}{8}$; $\frac{91}{\square} = \frac{7}{10}$ f) $\frac{60}{144} = \frac{5}{\square}$; $\frac{99}{\square} = \frac{9}{13}$

10 Ergänze die richtige Zahl. a) $\frac{\square}{6} = \frac{2}{4}$ b) $\frac{\square}{8} = \frac{3}{12}$ c) $\frac{5}{25} = \frac{\square}{15}$

Die gesuchten Zahlen aus Aufgabe 9 ergeben ein Lösungswort.

27	*T*
12	*U*
4	*C*
60	*I*
143	*H*
18	*L*
6	*S*
130	*H*
72	*C*
88	*T*
56	*S*
5	*H*

Bist du sicher?

1 a) Erweitere $\frac{4}{9}$ mit 6. b) Kürze $\frac{24}{32}$ vollständig. c) Schreibe $\frac{4}{6}$ mit dem Nenner 9.

2 Gib einen Bruch an, den man mit 6, aber nicht mit 4 kürzen kann.

3 Welche der Anteile $\frac{3}{12}$; $\frac{20}{100}$; $\frac{20}{80}$; $\frac{3}{15}$; $\frac{5}{20}$ sind gleich?

Das sind die Zähler und Nenner der Ergebnisse von Aufgabe 1:

3 *9* *24* *6* *4* *54*

11 Jana kann den Bruch $\frac{2}{5}$ in drei Schritten zu einem Bruch mit dem Nenner 120 erweitern:

$\frac{2}{5} \overset{\cdot 2}{=} \frac{4}{10} \overset{\cdot 3}{=} \frac{12}{30} \overset{\cdot 4}{=} \frac{48}{120}$ Tim findet sogar vier Schritte: $\frac{2}{5} \overset{\cdot 2}{=} \frac{4}{10} \overset{\cdot 2}{=} \frac{8}{20} \overset{\cdot 2}{=} \frac{16}{40} \overset{\cdot 2}{=} \frac{48}{120}$

Erweitere die Brüche

a) mit möglichst vielen Schritten.

b) mit möglichst wenig Schritten.

$\frac{1}{2} \to \frac{}{100}$ $\frac{3}{4} \to \frac{}{120}$ $\frac{2}{3} \to \frac{}{99}$

$\frac{5}{7} \to \frac{}{63}$ $\frac{7}{8} \to \frac{}{512}$ $\frac{1}{3} \to \frac{}{213}$

12 Gib die Anteile mit einem vollständig gekürzten Bruch an.
a) Von 100 Losen waren 90 Nieten.
b) Drei von 72 kontrollierten Fahrgästen fuhren ohne Fahrausweis.
c) Von 60 kontrollierten Autos fuhren 24 zu schnell.

13 Untersuche, welche Brüche den gleichen Anteil beschreiben.
$\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{9}{15}$; $\frac{4}{12}$; $\frac{54}{90}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{63}{189}$; $\frac{35}{60}$; $\frac{30}{45}$

14 Schreibe als Anteil und kürze.
a) 2 g von 1 kg
b) 24 g von 1 kg
c) 10 min von 1 h
d) 15 min von 1 h
e) 25 cm von 1 m
f) 625 m von 1 km
g) 18 h von 1 Tag
h) 36 min von 1 h
i) 20 ml von 1 l
j) 55 cm^2 von 1 m^2
k) 270 cm^2 von 1 m^2
l) 12 500 cm^3 von 1 l

15 a) Schreibe die Anteile $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{18}{60}$ und $\frac{18}{24}$ jeweils als Bruch mit dem Nenner 20.
b) Denke dir selbst mindestens drei Brüche aus, die man mit dem Nenner 20 schreiben kann.
c) Gib sechs Brüche mit dem Zähler 20 an, die man nicht mehr kürzen kann.

16 a) Nenne fünf Brüche, die man so erweitern kann, dass sie im Nenner 100 enthalten.
b) Kannst du den Brüchen ansehen, ob man sie mit 100 im Nenner schreiben kann? Formuliere eine Regel.

zu Aufgabe 17:
Die Zahl 1 ist immer dabei. Wenn du die Zahlen addierst, ergibt das folgende Ergebnisse:
12 60 3 6 18 39

17 Kürzen und Teilbarkeit
Gib nach der Größe geordnet alle Zahlen an, mit denen man den Bruch kürzen kann.
a) $\frac{8}{10}$
b) $\frac{12}{18}$
c) $\frac{15}{25}$
d) $\frac{18}{36}$
e) $\frac{10}{50}$
f) $\frac{48}{72}$

18 Mareike behauptet: „Brüche erweitern, das kann man immer. Kürzen hingegen ist gar nicht so einfach." Nimm Stellung dazu und begründe an Beispielen.

zu Aufgabe 19:
Meistens ist es hilfreich, in mehreren Schritten zu kürzen.

19 Welcher der folgenden Brüche lässt sich so kürzen, dass im Zähler 1 steht? Begründe.
a) $\frac{2}{653}$
b) $\frac{2}{132}$
c) $\frac{10}{7680}$
d) $\frac{3}{450}$
e) $\frac{3}{289}$
f) $\frac{4}{688}$
g) $\frac{5}{876}$
h) $\frac{9}{358}$
i) $\frac{9}{531}$

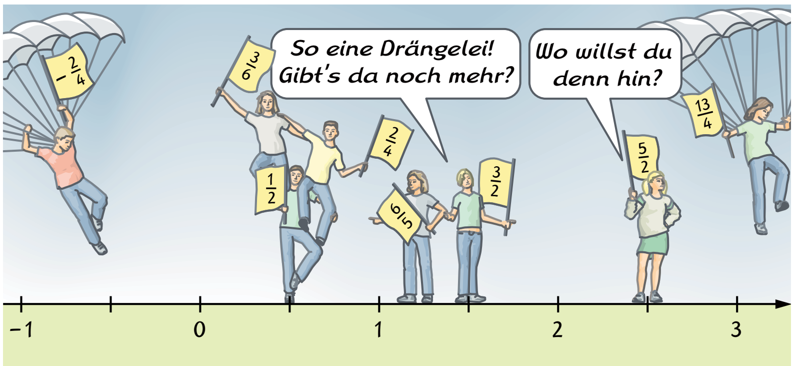
20 Kürze soweit wie möglich.
a) $\frac{235}{240}$
b) $\frac{195}{455}$
c) $\frac{672}{1288}$
d) $\frac{298}{306}$
e) $\frac{448}{832}$
f) $\frac{3840}{4352}$
g) $\frac{21}{658}$
h) $\frac{130}{182}$
i) $\frac{324}{405}$

21 Kürzen mit Primfaktorzerlegungen
Ist bei einem Bruch der Zähler und der Nenner in seine Primfaktoren zerlegt, so wird das Kürzen sehr einfach: $\frac{28}{210} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{7}}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cancel{7}} = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$
Schreibe Zähler und Nenner jeweils als Produkt von Primzahlen und kürze dann.
a) $\frac{56}{110}$
b) $\frac{420}{500}$
c) $\frac{252}{360}$
d) $\frac{132}{156}$
e) $\frac{2520}{7560}$

22 Wahr oder falsch?
a) Wenn der Zähler und der Nenner eines Bruches beide eine gerade Zahl sind, dann kann man den Bruch mit einer Zahl kürzen, die größer als 1 ist.
b) Wenn der Zähler und der Nenner eines Bruches beide eine ungerade Zahl sind, dann kann man den Bruch mit einer Zahl kürzen.
c) Zwischen $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{10}$ passt kein anderer Bruch.

4 Brüche auf der Zahlengerade

Die Zahlengerade kennt ihr schon von den ganzen Zahlen. Jetzt sollen auch noch die Brüche dort untergebracht werden. Könnt ihr den Brüchen helfen?



Bisher wurden Brüche als Anteile betrachtet. Brüchen kann man aber auch Zahlen auf der Zahlengeraden zuordnen. Es gibt daher auch negative Brüche und Brüche, bei denen der Zähler größer ist als der Nenner. Brüche kann man auch als Ergebnis einer Division betrachten, z. B. $1 : 3 = \frac{1}{3}$.

Jeder Bruch entspricht einer bestimmten Stelle auf der Zahlengerade. Dabei werden Brüche wie $\frac{1}{2}$ und $\frac{4}{8}$, die durch Erweitern und Kürzen auseinander hervorgehen, also denselben Anteil bezeichnen, an derselben Stelle auf der Zahlengerade eingetragen. Diese Brüche bezeichnen dieselbe so genannte **rationale Zahl**.

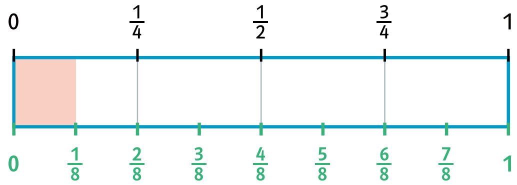


Fig. 1

Brüche wie $\frac{3}{2}$, bei denen der Zähler größer als der Nenner ist, werden rechts von der 1 eingetragen. Wie bei den ganzen Zahlen kann man auch zu jeder rationalen Zahl wie $\frac{1}{2}$ die Gegenzahl $-\frac{1}{2}$ eintragen.

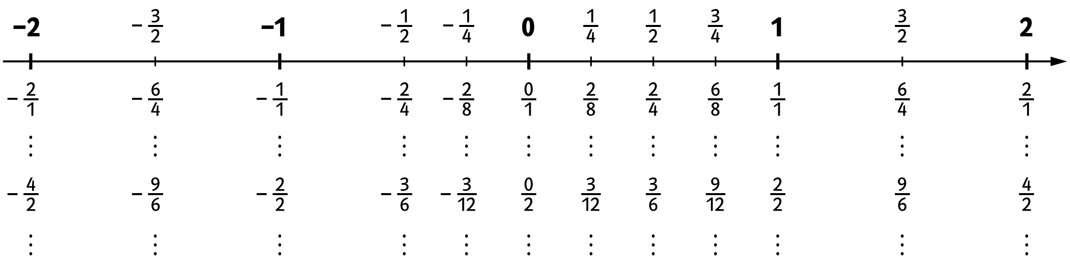


Fig. 2

Wenn man zwei Blechkuchen auf drei Personen aufteilen möchte, teilt man zwei Kuchen durch drei Personen. Fig. 3 zeigt das Ergebnis: Jede Person erhält zwei Drittel eines Blechkuchens. Das Ergebnis der Division $2 : 3$ ist demnach die rationale Zahl $\frac{2}{3}$. Es gilt: $2 : 3 = \frac{2}{3}$.

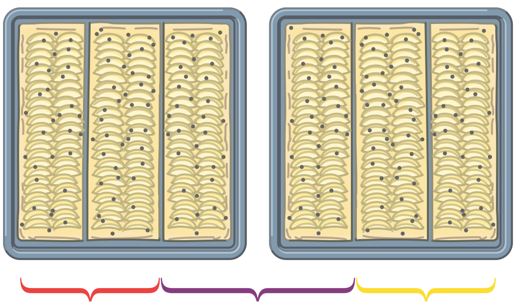


Fig. 3

Jetzt muss man beim Dividieren gar nicht mehr rechnen:

$9 : 3 = \frac{9}{3}$
$9 : 5 = \frac{9}{5}$
$9 : 1 = \frac{9}{1}$

+ : + = +
− : − = +
+ : − = −
− : + = −

Kommen bei der Division negative Zahlen vor, muss man auf das Vorzeichen achten.
Man weiß: $(-9) : 3 = -3 = -\frac{9}{3}$. Andererseits ist $(-9) : 3 = \frac{-9}{3}$.
Also gilt: $\frac{-9}{3} = -\frac{9}{3}$. Entsprechend überlegt man: $\frac{9}{-3} = -\frac{9}{3}$ und $\frac{-9}{-3} = +\frac{9}{3} = \frac{9}{3}$.

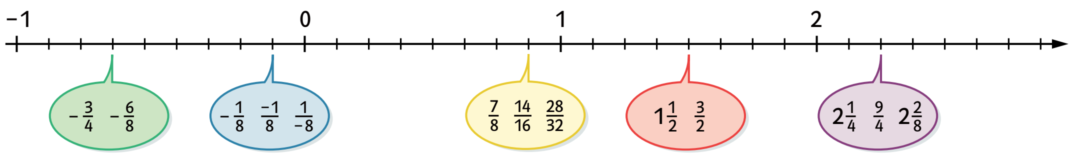
Brüche, die durch Kürzen und Erweitern auseinander hervorgehen, werden auf der Zahlengeraden an derselben Stelle eingetragen. Diese Brüche bezeichnen dieselbe **rationale Zahl**.
Eine Division von zwei Zahlen wie $(-7) : 8$ hat als Ergebnis die rationale Zahl $\frac{-7}{8} = -\frac{7}{8}$.

Bei negativen Zahlen kann man auch zuerst ohne Minuszeichen umrechnen und am Ende das Minuszeichen ergänzen, z. B.:
$\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5} = 1\frac{1}{5}$

Also: $-\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5}$

Auch ganze Zahlen können als Brüche geschrieben werden, z. B.
$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \ldots;\ 2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \ldots;\ -1 = -\frac{1}{1} = -\frac{2}{2} = -\frac{3}{3} = \ldots;\ -3 = -\frac{3}{1} = -\frac{6}{2} = -\frac{9}{3} = \ldots$
Ist bei einem Bruch der Zähler größer als der Nenner, wird er oft in **gemischter Schreibweise** angegeben, z. B. $\frac{7}{6} = \frac{6}{6} + \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{6} = 1\frac{1}{6}$

In gemischter Schreibweise lässt sich leichter erkennen, wo die Zahl auf der Zahlengerade einzutragen ist.



Beispiel 1 Brüche anordnen
Zeichne in eine Zahlengerade die Brüche $\frac{1}{3};\ -\frac{1}{2};\ \frac{5}{6};\ \frac{4}{3};\ \frac{2}{6}$ ein.
Lösung:

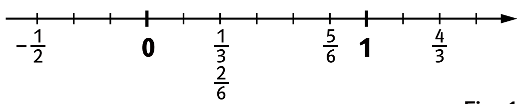


Fig. 1

Man muss überlegen, wie lang die Strecke von 0 bis 1 sein soll. Bei diesen Zahlen ist für eine günstige Einteilung 6 cm geeignet.

Beispiel 2 Brüche als Ergebnis von Divisionen
Schreibe das Ergebnis als Bruch.
a) $15 : (-12)$ b) $6\,\text{kg} : 11$ c) $(-10) : (-7)$
Lösung:
a) $15 : (-12) = \frac{15}{-12} = -\frac{15}{12} = -\frac{5}{4}$ b) $6\,\text{kg} : 11 = \frac{6}{11}\,\text{kg}$ c) $(-10) : (-7) = \frac{-10}{-7} = \frac{10}{7}$

Beispiel 3 Gemischte Schreibweise
a) Stelle $\frac{25}{8}$ in gemischter Schreibweise dar. b) Schreibe $-3\frac{1}{4}$ als Bruch.
Lösung:
a) $\frac{25}{8} = \frac{24}{8} + \frac{1}{8} = 3 + \frac{1}{8} = 3\frac{1}{8}$
Die Division 25 : 8 ergibt 3 Rest 1, also sind $\frac{25}{8}$ *drei Ganze und ein Achtel.*

b) $3\frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4} = \frac{12}{4} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ Also: $-3\frac{1}{4} = -\frac{13}{4}$
Drei Ganze sind $\frac{12}{4}$*, also ergeben drei Ganze und ein Viertel* $\frac{13}{4}$*. Das negative Vorzeichen kann man am Ende ergänzen.*

Aufgaben

1 Übertrage die Zahlengerade in Fig. 1 in dein Heft. Zeichne die Strecke $\overline{AE}$ 5 cm lang.
Zeichne die Brüche $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{5}$; $\frac{8}{10}$; $-\frac{7}{10}$; $\frac{80}{100}$ ein.

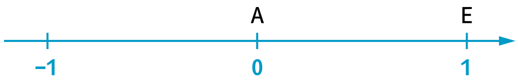
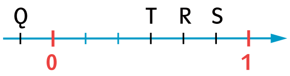


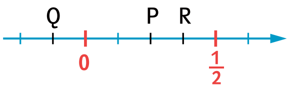
Fig. 1

2 Schreibe für jeden Buchstaben einen vollständig gekürzten Bruch.

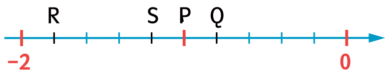
a)



b)



c)



3 Zeichne eine Zahlengerade, bei der das Teilstück zwischen −2 und +2 eine Länge von 16 cm hat. Trage die Brüche $-\frac{1}{4}$; $\frac{3}{8}$; $-\frac{5}{5}$; $\frac{14}{8}$; $-\frac{18}{16}$ dort ein.

4 Gib in gemischter Schreibweise an.

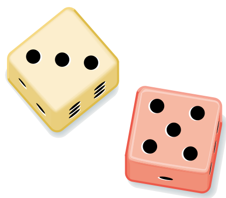
a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{34}{11}$ d) $\frac{76}{8}$ e) $-\frac{8}{5}$ f) $-\frac{81}{10}$ g) $-\frac{91}{7}$ h) $\frac{231}{11}$

Brüche in gemischter Schreibweise nennt man auch „gemischte Zahlen".

5 Gib die gemischte Zahl als Bruch an.

a) $1\frac{1}{2}$ b) $2\frac{3}{4}$ c) $3\frac{5}{8}$ d) $7\frac{3}{5}$ e) $5\frac{6}{7}$ f) $-2\frac{1}{4}$ g) $-5\frac{3}{7}$ h) $-17\frac{4}{9}$

6 Mit einem weißen und einem roten Würfel kann man Brüche würfeln. Die Würfel zeigen den gewürfelten Bruch $\frac{3}{5}$.
a) Welche Brüche kann man mit den Würfeln werfen?
b) Wie viele verschiedene Bruchzahlen sind dies? Gib sie, wenn möglich, in gemischter Schreibweise oder als natürliche Zahl an.
c) Würfelt auf die oben beschriebene Weise 50 Brüche und stellt die Ergebnisse in einem geeigneten Diagramm dar.



7 Schreibe mit einem positiven oder negativen Bruch. Kürze vollständig.

a) 40 : 30 b) (−25) : 20 c) 16 : (−18) d) (−6) : (−8) e) 1 : 13 f) (−81) : (−54)

8 Gib drei Divisionsaufgaben an, die als Ergebnis die angegebene rationale Zahl haben.

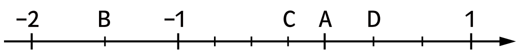
a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{12}$

9 Bei welchen Brüchen handelt es sich um dieselbe rationale Zahl? Begründe.

a) $\frac{4}{5}$; $\frac{12}{15}$ b) $\frac{20}{5}$; $\frac{-4}{-1}$ c) $-\frac{3}{2}$; $-\frac{2}{3}$ d) $-\frac{14}{18}$; $\frac{-7}{9}$ e) $\frac{-25}{30}$; $\frac{10}{12}$ f) $\frac{80}{-100}$; $-\frac{4}{5}$

Bist du sicher?

1 Schreibe für jeden Buchstaben einen vollständig gekürzten Bruch.



2 Prüfe, ob es sich um dieselbe rationale Zahl handelt.

a) $4\frac{3}{8}$; $\frac{70}{16}$ b) $-\frac{9}{15}$; $\frac{-12}{20}$ c) $-\frac{9}{6}$; $-\frac{32}{8}$ d) $-\frac{8}{3}$; $-2\frac{4}{6}$ e) $\frac{-66}{-4}$; $17\frac{1}{4}$