3 Halteproblem und Terminierung der Ackermannfunktion

Die Werte der Ackermannfunktion (Fig. 1) sind für $n \geqq 4$ nur noch in wenigen Spezialfällen bekannt, z. B. $ack(4, 0) = 13$, $ack(4, 1) = 65533$ und $ack(4,2) = 2^{65533}$.

a) Wie lässt sich aus der Struktur der Rekursion begründen, dass die Ackermannfunktion sicher terminiert?

b) Ist die Ackermannfunktion berechenbar?

c) Bestimmen Sie einen Funktionsterm für das asymptotische Laufzeitverhalten von $ack(3, m)$ (vergleichen Sie hierzu Aufgabe 7 auf Seite 132) und schätzen Sie die Zeit für die Berechnung von $ack(3, 100)$ ab.

Java

```java
public int ack(int n, int m) {
  if (n == 0) {
    return m + 1;
  }
  else if (m == 0) {
    return ack(n - 1, 1);
  }
  else {
    return ack(n - 1, ack(n, m - 1));
  }
}
```

Fig. 1

4 Halteproblem und Apfelmännchen

Die hier angegebene Folge (x_n, y_n) ist abgeleitet aus der einfachen Folge $z_{n+1} = z_n^2 + c$, wobei die Folgenglieder z_n und c komplexe Zahlen sind. Es wird $z_0 = 0$ festgelegt.
Eine komplexe Zahl lässt sich als Punkt im kartesischen Koordinatensystem mit x- und y-Koordinate interpretieren. Übersetzt man die obige Folge in die Koordinatenschreibweise, so ergeben sich die beiden in der Aufgabe angegebenen Folgen x_{n+1} und y_{n+1} über reellen Zahlen.

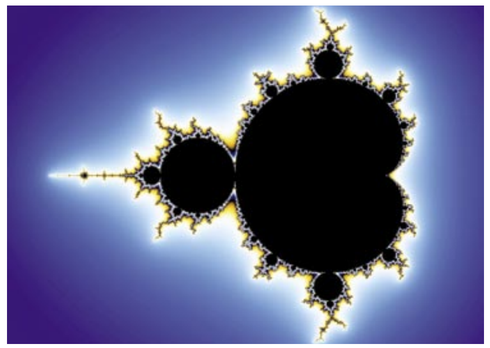

Fig. 2

Das Apfelmännchen oder, wie Mathematiker sagen, die Mandelbrotmenge dürfte eine der populärsten Abbildungen der Mathematik sein. Zur Mandelbrotmenge, gehören bestimmte Punkte $(c_x | c_y)$ in der Ebene. Ob ein derartiger Punkt in der Mandelbrotmenge liegt, wird dabei folgendermaßen bestimmt: Mithilfe der iterativen Vorschrift

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + c_x$$
$$y_{n+1} = 2 x_n y_n + c_y$$

sowie $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ wird die Folge (x_n, y_n) berechnet. Ein Punkt mit den Koordinaten $(c_x | c_y)$ ist nun Element der Mandelbrotmenge, wenn der Abstand des Punktes $(x_n | y_n)$ vom Ursprung des Koordinatensystems für beliebige Werte von n beschränkt ist, d. h., wenn die Folge $(x_n^2 + y_n^2)$ beschränkt ist.

a) Für einige wenige Punkte $(c_x | c_y)$ ist die Mandelbrotmenge entscheidbar. Zeigen Sie, dass dies für die Punkte $(c_x = 0 | c_y = 0)$ und $(c_x = -1 | c_y = 0)$ gilt.

b) Geben Sie eine Methode an, die die Folge (x_n, y_n) für beliebige Startwerte (c_x, c_y) berechnet. Weshalb lässt sich mit einer derartigen Methode die Zugehörigkeit zur Mandelbrotmenge nicht definitiv beantworten?

c) Die Mandelbrotmenge gilt im Allgemeinen als nicht entscheidbar. Führen Sie Argumente an, die dies plausibel machen.

d) Für das Zeichnen der Mandelbrotmenge (Fig. 2) genügt es, die Beschränktheit der Folge $(x_n^2 + y_n^2)$ für $n > 1000$ zu zeigen. Bestimmen Sie mithilfe dieser Näherung den Rand der Mandelbrotmenge und stellen Sie die Menge grafisch dar.

5 Überlegungen zur Entscheidbarkeit des Halteproblems

Im Lehrtext auf Seite 140 f. wird die Nichtentscheidbarkeit des Halteproblems plausibel gemacht.

a) Identifizieren Sie Passagen in der Argumentationskette, bei denen Vereinfachungen vorgenommen wurden.

b) Das Programm *HALT* enthält nur die Kontrollstruktur „wenn … dann …“ Wie müsste die Argumentation erweitert werden, damit für beliebige Programme bewiesen werden kann, dass kein Algorithmus existiert, der das Halteproblem löst?

Informatik 5 – Jahrgangsstufe 12
ISBN 978-3-12-731068-9

6 Wachstumsmodelle

Das in Aufgabe 6 angegebene demografische Modell wird auch als logistische Gleichung bezeichnet. Es ist eines der bekanntesten Modelle zur Beschreibung chaotischer Systeme.

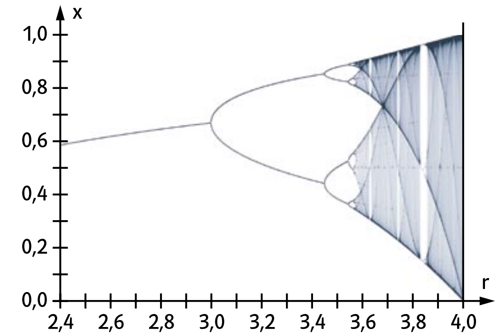

Fig. 1

Das Wachstum einer Population lässt sich abstrakt durch die folgende Gleichung beschreiben: $x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$. Hierbei bezeichnet x_n eine Zahl zwischen 0 und 1 und gibt die relative Anzahl der Individuen im Jahr n an; r ist eine positive reelle Zahl, die die Auswirkungen von Fortpflanzung und Sterben repräsentiert.

a) Implementieren Sie eine Funktion, die die n-te Iteration für einen bestimmten Anfangswert x_0 und einem Parameter r ermittelt.

b) Testen Sie das Verhalten der Population für $0 < r < 1$ und große Werte von n. Wie interpretieren Sie das Ergebnis?

c) Für die Bereiche $1 < r < 3$ nähert sich die Population einem Grenzwert x. Tragen Sie diesen Grenzwert in ein Diagramm ein, das auf der Abszisse den Wert r und auf der Ordinate den Näherungswert für x_n enthält.

d) Inwiefern weist das hier untersuchte demografische Modell einen Zusammenhang mit dem Halteproblem und der Frage der Entscheidbarkeit auf?

e) Untersuchen Sie den Bereich zwischen $r = 3$ und $r = 3{,}6$. Welches Verhalten hat die Folge? Was beobachten Sie für Werte mit $r > 4$?

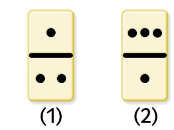

Fig. 2

7 Dominosteine und das Post'sche Korrespondenzproblem

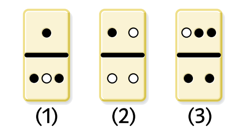

Fig. 3

Ein berühmtes Problem der Theoretischen Informatik ist das Post'sche Korrespondenzproblem. Es soll in dieser Aufgabe an zwei Spezialfällen erläutert und anschließend allgemein betrachtet werden. Am einfachsten lässt sich das Post'sche Korrespondenzproblem mithilfe von Dominosteinen erläutern.

a) Die Dominosteine sollen die in Fig. 2 gezeigte Gestalt haben, d. h., sie bestehen aus zwei Hälften, wobei die obere und die untere Hälfte jeweils eine bestimmte Anzahl von Punkten aufweist. Es sollen nur die beiden angegebenen Sorten von Dominosteinen zur Verfügung stehen, von jeder Sorte jedoch beliebig viele Steine. Beim Post'schen Korrespondenzproblem für derartige Dominosteine müssen die Steine so nebeneinandergelegt werden, dass die Summe der Punkte in der oberen Hälfte genauso groß ist wie die Summe der Punkte in der unteren Hälfte. Die Anzahl der verwendeten Steine sollte dabei möglichst klein sein.
Geben Sie eine Folge an (codiert durch die Nummern der Steine), die diese Forderung erfüllt.

Emil Leon Post (1897–1954), polnisch-US-amerikanischer Mathematiker und Logiker

Er ist einer der Mitbegründer der Theorie der rekursiven Funktionen. Er starb höchstwahrscheinlich an den Folgen einer Elektroschocktherapie, die er aufgrund einer manisch-depressiven Erkrankung erhielt.

b) Die in Teilaufgabe a) beschriebene Variante des Post'schen Korrespondenzproblems beschränkt sich auf Dominosteine, die nur ein Zeichen enthalten (schwarze Punkte). Bei informatischen Fragestellungen spielen Worte, die aus den Zeichen 0 und 1 aufgebaut sind, d. h. zweielementige Alphabete, eine sehr wichtige Rolle. Erweitert man dementsprechend die Dominosteine auf zwei Symbole (schwarze und weiße Punkte), so könnten diese wie in Fig. 3 aussehen. Unter der Annahme, dass von jeder Sorte beliebig viele Exemplare vorhanden sind, lässt sich für den Spezialfall von Fig. 3 das Post'sche Korrespondenzproblem formulieren: Geben Sie (codiert durch die Nummern der Steine) eine Folge von Steinen an, sodass sich in der oberen Hälfte dieselbe Folge von Punkten ergibt wie in der unteren.

c) Ein wichtiger Satz der Theoretischen Informatik besagt, dass das Post'sche Korrespondenzproblem nicht entscheidbar ist. Verallgemeinern Sie die in den Teilaufgaben a) und b) skizzierten Fragestellungen und machen Sie die Nichtentscheidbarkeit plausibel.

Informatik 5 – Jahrgangsstufe 12
ISBN 978-3-12-731068-9