Pinboard – Wahrscheinlichkeitsrechnu ng

Ereignis – Gegenereignis

Ereignis

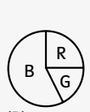
Manchmal fasst man mehrere Ergebnisse eines Zufallsexperiments zu einem sogenannten Ereignis zusammen.

Gegenereignis

Zeigt ein Zufallsexperiment ein Ergebnis, das nicht zu einem vorher festgelegten Ereignis gehört, so sagt man, dieses Ergebnis gehöre zum Gegenereignis.

Beispiele

Zufallsexperiment: Werfen eines gewöhnlichen Spielwürfels und Feststellen der Augenzahl
Mögliche Ergebnisse dieses Experiments:
Es wird eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 geworfen.
Ereignis: Es wird eine Quadratzahl geworfen.
In diesem Ereignis werden zwei Ergebnisse zusammengefasst: Es wird eine „1“ oder eine „4“ geworfen.
Wird nun tatsächlich eine „1“ oder eine „4“ geworfen, so sagt man, das Ereignis sei eingetreten.
Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Ereignisses ist $\frac{1}{3}$.
Wird jedoch z. B. eine „2“ (oder „3“ oder „5“ oder „6“) geworfen, so sagt man, dieses Ereignis ist nicht eingetreten. Dieses Ergebnis gehört zum Gegenereignis.
Gegenereignis: Es wird keine Quadratzahl geworfen.
Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Gegenereignisses ist $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.



Zufallsexperiment: Drehen des abgebildeten Glücksrads und Feststellen der Farbe
Mögliche Ergebnisse dieses Experiments:
Der Zeiger weist auf Rot (R), auf Grün (G) oder auf Blau (B).
Ereignis: Der Zeiger weist auf Rot oder Grün.
In diesem Ereignis werden zwei Ergebnisse zusammengefasst: Der Zeiger weist auf Rot oder auf Grün.
Weist der Zeiger nun auf Rot, so ist das Ereignis eingetreten.
Weist er auf Grün, so ist das Ereignis ebenfalls eingetreten. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieses Ereignisses ist $\frac{5}{12}$.
Weist der Zeiger auf Blau, so ist das Ereignis nicht eingetreten. Dieses Ergebnis gehört zum Gegenereignis.
Gegenereignis: Der Zeiger weist auf Blau.
Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Gegenereignisses ist $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$.
Beachte, dass oft unterschiedliche sprachliche Formulierungen möglich sind. Beispielsweise kann man hier auch sagen: Der Zeiger weist nicht auf Rot und nicht auf Grün oder aber der Zeiger weist weder auf Rot noch auf Grün.

Zusammenfassen von Ergebnissen

Summenregel

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis wird berechnet, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zu diesem Ereignis gehörenden Ergebnisse addiert.

Beispiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, beim Werfen mit einem normalen Spielwürfel eine Zahl kleiner als 3 zu erhalten?
Das Ereignis tritt genau dann ein, wenn eine „1“ oder eine „2“ geworfen wird. Die Wahrscheinlichkeiten für das Werfen einer „1“ oder einer „2“ sind jeweils $\frac{1}{6}$. Eine Zahl kleiner als 3 wird daher mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ geworfen.

Mehrstufige Zufallsversuche – die Pfadregel

Definition

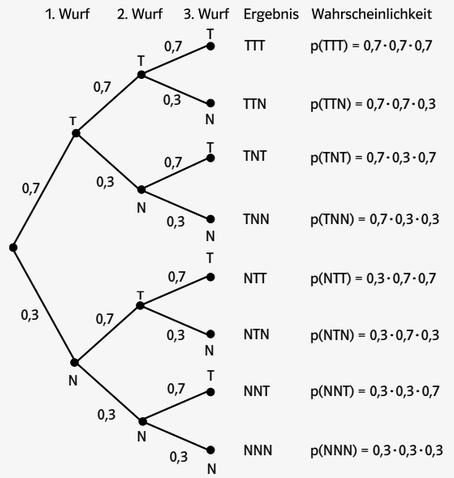
Wenn man ein Zufallsexperiment mehrmals wiederholt und nicht jedes einzelne Ergebnis, sondern die Abfolge all dieser Einzelergebnisse als Ergebnis betrachtet, so spricht man von einem mehrstufigen Zufallsexperiment.
Ein mehrstufiges Zufallsexperiment kann mithilfe eines Baumdiagramms beschrieben werden. An den einzelnen Zweigen des Baumes notiert man die Wahrscheinlichkeiten für die Einzelergebnisse. Das Ergebnis eines mehrstufigen Experiments kann dann am Ende eines Weges (Pfades) entlang der Zweige notiert werden.

Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis eines mehrstufigen Zufallsexperiments erhält man durch Multiplikation aller Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades.

Beispiel

Peter trifft bei einem Freiwurf im Basketball-Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% den Korb. Im Laufe eines Spiels führt er drei Freiwürfe aus.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er dreimal?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er nur beim zweiten Mal?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er zweimal?



Mit der Pfadregel ergibt sich:
$p(TTT) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}343$
$p(NTN) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}063$
Mit der Pfadregel und der Summenregel ergibt sich:
$p(TTN) + p(TNT) + p(NTT) = 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}441$

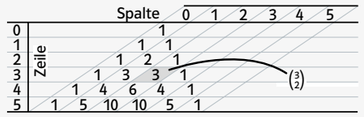
An der Bushaltestelle

„Ich wette, dass der erste Schüler, der aus dem Bus aussteigt, mehr Hände hat als der durchschnittliche Schüler."
Würdest du diese Wette eingehen?

Binomialkoeffizienten

Definitionen

Unter dem Symbol $\binom{n}{k}$ (gelesen: n über k) versteht man diejenige Zahl, die im Pascal'schen Dreieck in der Zeile mit der Nummer n und der Spalte mit der Nummer k steht.



Beispiele

$\binom{4}{1} = 4$ $\binom{5}{2} = 10$ $\binom{6}{4} = 15$ $\binom{7}{3} = 35$

Mit dem GTR erhält man diese Zahlen über Menü [MATH], Menü [PRB], Menüpunkt „nCr“.

Bemerkung
Für kleine Werte von n und k kann eine Berechnung per Hand erfolgen. Es gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

Interpretation

Wenn ein Zufallsversuch nur die Ergebnisse Treffer und Nichttreffer hat und dieser Versuch n-mal ausgeführt wird, dann beschreibt $\binom{n}{k}$ die Anzahl der Pfade mit k Treffern im zugehörigen Baumdiagramm.

Beispiel

Aus einer Urne mit vier roten und sechs grünen Kugeln werden nacheinander vier Kugeln mit Zurücklegen gezogen und die Farbe wird in der Reihenfolge der Ziehung notiert. Das Ziehen einer roten Kugel wird als Treffer bezeichnet.

Dann gibt es im Baumdiagramm
$\binom{4}{0} = 1$ Pfad mit keinem Treffer,
$\binom{4}{1} = 4$ Pfade mit einem Treffer,
$\binom{4}{2} = 6$ Pfade mit zwei Treffern,
$\binom{4}{3} = 4$ Pfade mit drei Treffern,
$\binom{4}{4} = 1$ Pfad mit vier Treffern.

Die aktuellen Zufallsmeldungen aus der Forschung

Binomialverteilung

Lehrsatz

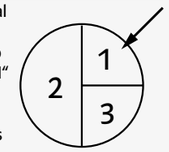
Wenn es bei einem Zufallsexperiment nur zwei Ergebnisse gibt, die mit „Treffer“ bzw. „Nichttreffer“ bezeichnet werden und sich die Wahrscheinlichkeit p für einen Treffer während der n-maligen Durchführung des Zufallsexperiments nicht ändert, dann gilt:
Die Wahrscheinlichkeit für k Treffer ($k \leq n$) beträgt

$$B(n;k;p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Bemerkung
In diesem Fall spricht man von einer Binomialverteilung.

Beispiel

Das Glücksrad wird 5-mal gedreht und nach dem Anhalten festgestellt, ob der Zeiger auf das mit „1“ beschriftete Feld weist.



Das Ergebnis „1“ wird als „Treffer“, ein anderes Ergebnis als „Nichttreffer“ bezeichnet.
Die Wahrscheinlichkeit für „Treffer“ ist bei jeder Drehung unverändert $p = \frac{1}{4}$.
Da das Glücksrad 5-mal gedreht wird, gilt $n = 5$. Es können daher 0, 1, 2, 3, 4 oder 5 Treffer vorkommen.
Die Wahrscheinlichkeit für zwei Treffer beträgt
$B\left(5;\frac{1}{4};2\right) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)\right)^{5-2} \approx 0{,}2637$.
Wahrscheinlichkeitsverteilung
(Werte auf zwei Dezimalen gerundet.)

k	0	1	2	3	4	5
$B\left(5;\frac{1}{4};k\right)$	0,24	0,40	0,26	0,09	0,01	0,00

Bist du sicher?

1 In einem Beutel liegen drei Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2 und 3 beschriftet sind.
a) Du greifst dreimal nacheinander in den Beutel und holst jeweils eine Kugel heraus, notierst die entsprechende Zahl und legst die Kugel wieder zurück. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht dabei 123?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht die Zahl 123, wenn du die gezogenen Kugeln nicht mehr zurücklegst?
c) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten entsteht in den Teilaufgaben a und b nicht die Zahl 123?

2 Ein Glücksrad hat drei Kreisausschnitte mit den Mittelpunktswinkeln 90°, 120° und 150°, die (in dieser Reihenfolge) rot, grün und blau angemalt sind. Das Rad wird dreimal gedreht. Zeichne einen Baum für diesen dreistufigen Zufallsversuch. Beantworte damit:
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei dreimaligem Drehen
a) immer die Farbe „Rot“ erscheinen?
b) beim ersten Drehen „Rot“, beim zweiten Drehen „Grün“, beim dritten „Blau“ erscheinen?
c) höchstens einmal die Farbe „Grün“ erscheinen?
d) jede der drei Farben einmal erscheinen?
e) niemals die Farbe „Blau“ erscheinen?

3 Bestimme die Zahlen $\binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{6}{0}, \binom{6}{2}, \binom{7}{5}, \binom{8}{4}$.

4 In einer Urne liegen drei rote und sieben grüne Kugeln. Du ziehst eine Kugel heraus, notierst ihre Farbe und legst die Kugel wieder in die Urne. Dies machst du achtmal. Das Ziehen einer roten Kugel wird als Treffer bezeichnet.
a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhältst du höchstens einen Treffer?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhältst du wenigstens zwei Treffer?

Lösungen

1 a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{6}$ c) $\frac{26}{27}$; $\frac{5}{6}$ (Gegenereignisse) **2** a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$ b) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{144}$ c) $\frac{7}{27}$ (rrr, rrg, rrb, rgr, rgb, rbr, rbg, grr, grb, gbr, gbb, brr, brg, brb, bgr, bgb, bbr, bbg, bbb) d) $\frac{5}{24}$ (rgb, rbg, grb, gbr, brg, bgr) e) $\frac{343}{1728}$ (rrr, rrg, rgr, rgg, grr, grg, ggr, ggg) **3** 6; 4; 1; 15; 21; 70

4 a)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$B(8;0{,}3;k)$	0,06	0,20	0,30	0,25	0,14	0,05	0,01	0,00	0,00

b) 0,26 c) 0,74 (Gegenereignis)