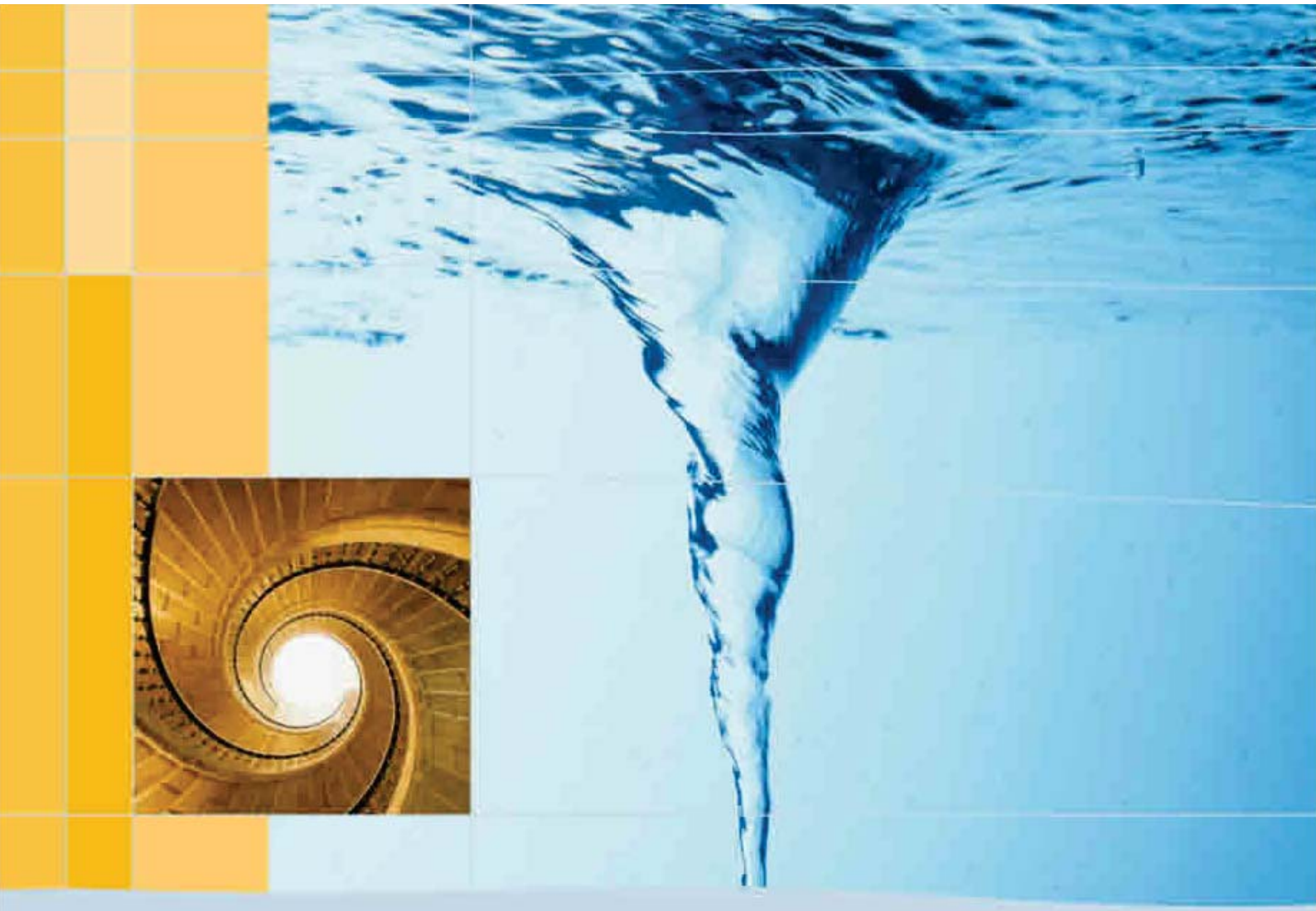


Lambacher Schweizer 11/12

Mathematik für Gymnasien

Kapitel Matrizen

Sachsen

Klett

Lambacher Schweizer

Mathematik für Gymnasien

Matrizen

Sachsen

Nur zu Prüfzwecken

Ernst Klett Verlag
Stuttgart · Leipzig

1. Auflage 1 5 4 3 2 1 | 20 16 15 14 13

Alle Drucke dieser Auflage sind unverändert und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Druckes.
Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis § 52 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Fotomechanische oder andere Wiedergabeverfahren nur mit Genehmigung des Verlages.
Auf verschiedenen Seiten dieses Bandes befinden sich Verweise (Links) auf Internet-Adressen. Haftungshinweis: Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle wird die Haftung für die Inhalte der externen Seiten ausgeschlossen. Für den Inhalt dieser externen Seiten sind ausschließlich die Betreiber verantwortlich. Sollten Sie daher auf kostenpflichtige, illegale oder anstößige Inhalte treffen, so bedauern wir dies ausdrücklich und bitten Sie, uns umgehend per E-Mail davon in Kenntnis zu setzen, damit beim Nachdruck der Verweis gelöscht wird.

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2016. Alle Rechte vorbehalten. www.klett.de

Auszug aus 978-3-12-732701-4 Lambacher Schweizer FHR Wirtschaft und Verwaltung

Autorinnen und Autoren: Manfred Baum, Martin Bellstedt, Dr. Gerhard Bitsch, Dr. Dieter Brandt, Gerhard Brüstle, Heidi Buck, Günther Dorfer, Prof. Rolf Dürr, Dr. Sigrid Flath, Prof. Hans Freudigmann, Dieter Greulich, Prof. Dr. Frieder Haug, Edmund Herd, Dr. Jörg Heuß, Heike Jacoby-Schäfer, Thomas Jörgens, Thorsten Jürgensen-Engl, Dr. Stefan Knoll, Ingrid Kolupa, Andreas König, Carsten Kreutz, Prof. Dr. Detlef Lind, Prof. Rolf Reimer, Dr. Günther Reine, Dr. Ute Reinhardt, Dr. Wolfgang Riemer, Dr. Torsten Schatz, Hartmut Schermuly, Prof. August Schm, Reinhard Schmitt-Hartmann, Verena Schulte, Siegfried Schwehr, Dr. Maximilian Selinka, Raphaela Sonntag, Heike Spielmans, Michael Stanzel, Prof. Jörg Stark, Andrea Stühler, Inga Surrey, Dr. Heike Tomaschek, Prof. Dr. Ingo Weidig, Dr. Peter Zimmermann, Prof. Manfred Zinser, Arnold Zitterbart

Redaktion: Stephanie Aslanidis, Andreas Marte, Anke Schmucker

Umschlagfotos: Wasserstrudel: Getty Images (amana Images/Takeshi Daigo), München;
Wendeltreppe: Getty Images (Image Bank/Joao Paulo), München
Illustrationen: Uwe Alfer, Waldbreitbach; SMP Oehler, Remseck
Satz: SMP Oehler, Remseck
Druck: Göhring Druck GmbH, Waiblingen

Printed in Germany
W700512

Nur zu Prüfzwecken

Inhaltsverzeichnis

Gleichungen, Matrizen, Verflechtungen

1 Lineare Gleichungssysteme und Lösungsverfahren 6
2 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme 10
3 Beschreibung wirtschaftlicher Sachverhalte durch Matrizen 13
4 Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen 15
5 Multiplikation von Matrizen 17
6 Einstufige Produktionsprozesse 20
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen 24
Rückblick 26
Training 27

Register 28

Nur zu Prüfzwecken

Gleichungen – Matrizen – Verflechtungen

In Wirtschaftsunternehmen fallen häufig große Datenmengen an, die übersichtlich in Tabellen dargestellt werden. Zahlentabellen nennt man in der Mathematik Matrizen. Mithilfe von Matrizen und Verflechtungsdiagrammen lassen sich mehrstufige Produktionsprozesse übersichtlich darstellen.

Welche Mengen der Ausgangsprodukte sind für die Herstellung von 1 kg Schokolade notwendig? Wie viel Schokolade kann man herstellen, wenn man 1 kg Puderzucker zur Verfügung hat?

Eigene Schokolade herstellen:

Zutaten:
200 g Kokosfett
200 g Puderzucker
100 g Kakaopulver
1 Päckchen Vanillezucker

Zuerst das Kokosfett langsam im Wasserbad schmelzen. Dann nach und nach den Puder- und Vanillezucker unterrühren, bis eine glatte Masse entsteht. Nun das Kakaopulver in die Masse zugeben und mindestens 3 min rühren. Je länger, desto zarter wird die Schokolade. Die Masse in Förmchen gießen und ca. 30 min in den Kühlschrank oder ca. 15 min in den Gefrierschrank stellen.

Nur zu Prüfzwecken

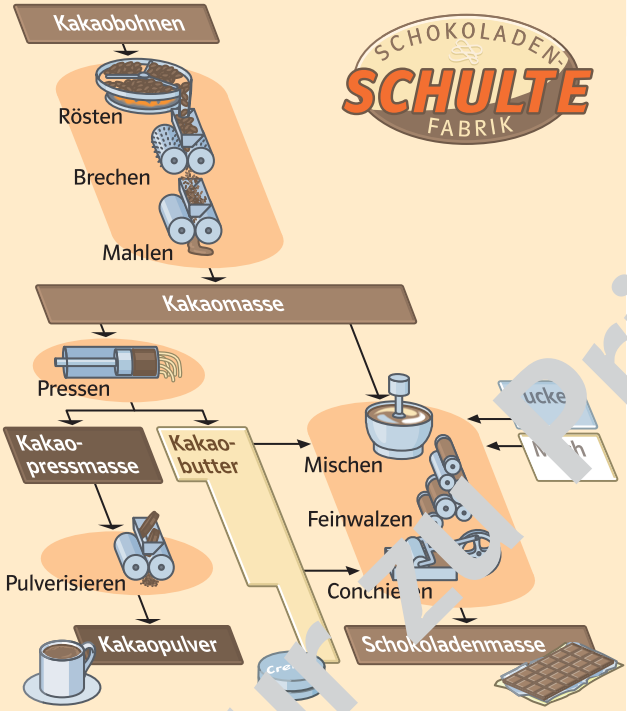
Das kennen Sie schon

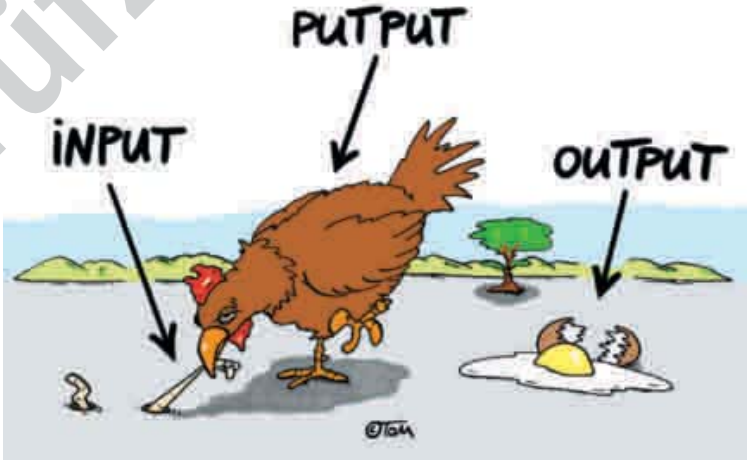
- Lösen von linearen Gleichungen
- Lösen von einfachen linearen Gleichungssystemen

Man kann auch weiße Schokolade selbst herstellen:

Zutaten:
200 g Palmfett
200 g Puderzucker
1 Päckchen Vanillezucker
1 Eßlöffel Speisestärke

Auch hier das Fett langsam im Wasserbad schmelzen und nach nun nach der Puder- und Vanillezucker und nun auch Stärkemehl unterrühren, bis eine gute Masse entsteht. Danach die Masse in Förmchen gießen und kalt stellen. Mit weiteren Zutaten z. B. Nüssen können verschiedene Sorten hergestellt werden.





Nur zu Prüfzwecken

Arithmetik/ Algebra

Problemlösen

Modellieren

In diesem Kapitel

- lernen Sie Matrizen als rechteckige Anordnungen von Zahlen kennen.
- stellen Sie lineare Gleichungssysteme mit Hilfe von Matrizen dar.
- lösen Sie lineare Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.
- berechnen Sie, wie viel von den verschiedenen Rohstoffen bei Produktionsprozessen für die Produktion eines Produktes benötigt werden.

1 Lineare Gleichungsssysteme und Lösungsverfahren

In einem Kino kostet der Eintritt für eine Familie mit zwei Erwachsenen und zwei Kindern 22 €. Eine Mutter mit drei Kindern zahlt 20 €. Wie kann man die Eintrittspreise für einen Erwachsenen und ein Kind erhalten?
Welche Gleichungen für die Preise (Erwachsener) und (Kind) kann man aus den Angaben aufstellen?

Gleichungen wie beispielsweise $2x - 3y = 1$ oder $3x_1 + 4x_2 - 14x_3 = 0$ nennt man **lineare Gleichungen**, da die Variablen x, y oder x_1, x_2, x_3 nur in der ersten Potenz auftreten. Die Zahlen vor den Variablen (in $3x_1 + 4x_2 - 14x_3 = 0$ sind dies die Zahlen 3; 4; −14) heißen **Koeffizienten** der Gleichung. Ein **lineares Gleichungssystem** (abgekürzt LGS) besteht aus mehreren solchen Gleichungen. Setzt man in $3x_1 + 4x_2 - 14x_3 = 0$ für $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 1$ ein, also $3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 14 \cdot 1 = 0$, so ist die Gleichung erfüllt. Daher nennt man das Zahlentripel $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung der Gleichung oder auch **Lösungsvektor**.

Im Beispiel rechts sind alle Gleichungen erfüllt, wenn man 1 für x_1, 0 für x_2 und −1 für x_3 einsetzt.

Beispiel für ein LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 0{,}5x_3 &= 2{,}5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 2 + 0 + 0{,}5 &= 2{,}5 \\ 1 - 0 - 2 &= -1 \\ 1 + 0 + 4 &= 5 \end{aligned}$$

Damit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Lösungsvektor.

Nicht jedes LGS hat eine eindeutige Lösung (siehe LE 2).

> Eine Lösung eines linearen Gleichungssystems mit n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ besteht aus n Zahlen, die man als Lösungsvektor angibt.
> Eine solche Lösung muss **alle** Gleichungen des LGS erfüllen.

Ein LGS ist durch die Koeffizienten und die Zahlen auf der rechten Seite vollständig bestimmt. Das zugeordnete Zahlenschema nennt man **erweiterte Koeffizientenmatrix**.

LGS

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 9 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

LGS als Zahlenschema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Durch folgende Umformungen ändert sich die Lösungsmenge eines LGS nicht:
(I) Zwei Gleichungen (Zeilen der Matrix) vertauschen,
(II) eine Gleichung (Zeile der Matrix) mit einer Zahl $c \neq 0$ multiplizieren,
(III) eine Gleichung (Zeile der Matrix) durch die Summe oder Differenz eines Vielfachen von ihr und eines Vielfachen einer anderen Gleichung des Systems (Zeile der Matrix) ersetzen.

Aus diesen Umformungen lässt sich ein Verfahren herleiten, mit dem man von einem gegebenen Gleichungssystem zu einem äquivalenten gelangt, aus dem man den Lösungsvektor ablesen kann.

Nur zu Prüfzwecken

Zusammenstellung der Verfahren:

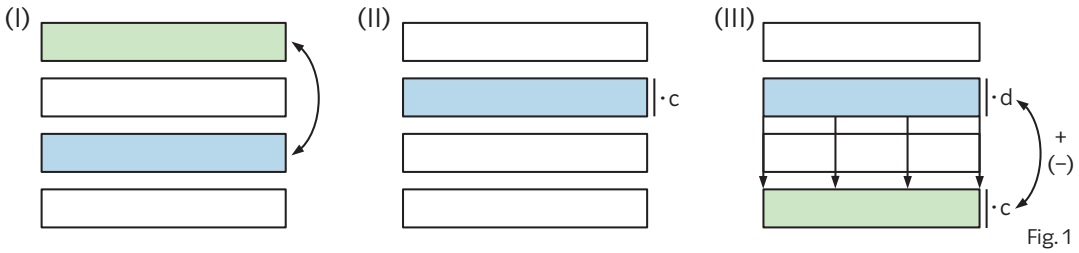


Fig. 1

Bei diesem Verfahren, das von Carl-Friedrich Gauß stammt, wird zunächst in allen Gleichungen außer der ersten die erste Variable eliminiert, dann entsprechend die zweite Variable in allen folgenden Gleichungen außer der zweiten usw.

Das Verfahren wird im Folgenden beim Lösen des LGS $\begin{array}{rcl} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &=& -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 0 \\ 3x_1 + 10x_2 - 10x_3 &=& -18 \end{array}$ vorgestellt.

Das Lösen erfolgt ausführlich und in Matrixschreibweise.

Vorgehen:	Ausführliche Schreibweise:	Matrixschreibweise:	Umformung:
Elimination von x_1 aus (2) und (3):	(1) $3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4$ (2) $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ (3) $3x_1 + 10x_2 - 10x_3 = -18$	(1) 3 6 −2 | −4 (2) 3 2 1 | 0 (3) 3 10 −10 | −18	(2) − (1) → (2a) (3) − (1) → (3a)
Elimination von x_2 aus (3a):	(1) $3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4$ (2a) $-4x_2 + 3x_3 = 4$ (3a) $4x_2 - 8x_3 = -14$	(1) 3 6 −2 | −4 (2a) 0 −4 3 | 4 (3a) 0 4 −8 | −14	(3a) + (2a) → (3b)
Division von (3b) durch (−5):	(1) $3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4$ (2a) $-4x_2 + 3x_3 = 4$ (3b) $-5x_3 = -10$	(1) 3 6 −2 | −4 (2a) 0 −4 3 | 4 (3b) 0 0 −5 | −10	(3b) : (−5) → (3c)
Elimination von x_3 aus (1) und (2a): **Stufenform**	(1) $3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4$ (2a) $-4x_2 + 3x_3 = 4$ (3c) $x_3 = 2$	(1) 3 6 −2 | −4 (2a) 0 −4 3 | 4 (3c) 0 0 1 | 2	(1) + 2·(3c) → (1a) (2a) − 3·(3c) → (2b)
Division von (1a) durch 3 und von (2b) durch (−2):	(1a) $3x_1 + 6x_2 = 0$ (2b) $-4x_2 = -2$ (3c) $x_3 = 2$	(1a) 3 6 0 | 0 (2b) 0 −4 0 | −2 (3c) 0 0 1 | 2	(1a) : 3 → (1b) (2b) : (−2) → (2b)
Elimination von x_2 aus (1b) und Division von (2b) durch (2):	(1b) $x_1 + 2x_2 = 0$ (2b) $2x_2 = 1$ (3c) $x_3 = 2$	(1b) 1 2 0 | 0 (2b) 0 2 0 | 1 (3c) 0 0 1 | 2	(1b) − (2b) → (1c) (2b) : 2 → (2c)
Diagonalenform	(1c) $x_1 = -1$ (2c) $x_2 = 0{,}5$ (3c) $x_3 = 2$	(1b) 1 0 0 | −1 (2c) 0 1 0 | 0,5 (3c) 0 0 1 | 2	

Das Gleichungssystem hat somit die Lösung $\begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Zur Kontrolle macht man die Probe:

(1) $3 \cdot (-1) + 6 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 2 = -3 + 3 - 4 = -4$

(2) $3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0{,}5 + 2 = -3 + 1 + 2 = 0$

(3) $3 \cdot (-1) + 10 \cdot 0{,}5 - 10 \cdot 2 = -3 + 5 - 20 = -18$.

Damit ist das LGS richtig gelöst.

Nur zu Prüfzwecken

Die Diagonalform heißt auch **reduzierte Stufenform**.

Gauß-Verfahren:
Beim Gauß-Verfahren löst man ein lineares Gleichungssystem mit 2, 3, 4 und mehr Variablen, indem man es mithilfe der Äquivalenzumformungen (I), (II) und (III) (Fig. 1, S. 7) auf **Stufenform** oder auf **Diagonalenform** bringt.

Beispiel 1 Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

Lösen Sie das Gleichungssystem $\begin{matrix} 4x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 5 \end{matrix}$.

■ Lösung: Zuerst werden die beiden Gleichungen vertauscht.

Ausführliche Schreibweise		Matrixschreibweise: Z1 ≙ Zeile 1, Z2 ≙ Zeile 2	
(1) $x_1 - 2x_2 = 5$		$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right)$	Z2 − 4 · Z1
(2) $4x_1 - 3x_2 = 0$	(2) − 4 · (1)		
(1) $x_1 - 2x_2 = 5$		$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -20 \end{array}\right)$	Z2 : 5
(2a) $5x_2 = -20$	(2a) : 5		
(1) $x_1 - 2x_2 = 5$	(1) + 2 · (2b)	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$	Z1 + 2 · Z2
(2b) $x_2 = -4$			
(1a) $x_1 = -3$		$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$	
(2b) $x_2 = -4$			

Machen Sie die Probe.

Lösung des Gleichungssystems ist $x_1 = -3$ und $x_2 = -4$.

Beispiel 2 Drei Gleichungen mit drei Unbekannten

Lösen Sie das Gleichungssystem $\begin{matrix} x + y + z = 18 \\ 10x + y - 8z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{matrix}$.

■ Lösung:

Ausführliche Schreibweise		Matrixschreibweise: Z1 ≙ Zeile 1 usw.	
(1) $x + y + z = 18$		$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 10 & 1 & -8 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$	Z2 − 10 · Z1
(2) $10x + y - 8z = 0$	(2) − 10 · (1)		Z3 − Z1
(3) $x + 2y + z = 0$	(3) − (1)		
(1) $x + y + z = 18$		$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & -9 & -18 & -180 \\ 0 & -3 & 0 & -18 \end{array}\right)$	Z2 : (−9)
(2a) $-9y - 18z = -180$	(2a) : (−9)		Z3 : (−3)
(3a) $-3y = -18$	(3) : (−3)		
(1) $x + y + z = 18$	(1) − (3b)	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right)$	Z1 − Z3
(2b) $y + 2z = 20$	(2b) − (3b)		Z2 − Z3
(3b) $y = 6$			
(1a) $x + z = 12$		$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right)$	Z2 : 2 und vertauschen mit Z3
(2c) $2z = 14$	(2c) : 2		
(3b) $y = 6$			
(1a) $x + z = 12$	(1a) − (2d)	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$	Z1 − Z3
(3b) $y = 6$			
(2d) $z = 7$			
(1a) $x = 5$		$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$	
(3b) $y = 6$			
(2d) $z = 7$			

Lösung des Gleichungssystems ist $x = 5$, $y = 6$ und $z = 7$.

Nur zu Prüfzwecken

Aufgaben

1 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem und machen Sie die Probe.

a) $x_1 + 2x_2 = 3$
$x_1 + x_2 = 0$

b) $7x_1 + x_2 = 2$
$x_1 - 2x_2 = 5$

c) $0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 = 2$
$x_1 + 0{,}75x_2 = 5$

2 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.

a) $2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -1$
$2x_2 + x_3 = 0$
$3x_3 = 6$

b) $3x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 5$
$4x_2 + x_3 = 1$
$-5x_3 = 10$

c) $2x_3 = 7$
$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 5$
$17x_2 + 24x_3 = 16$

3 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem und machen Sie die Probe.

a) $x + y = 3$
$x + y + z = 0$
$y + z = 0$

b) $x + y - z = 0$
$x + z = 2$
$x - 2y + z = 2$

c) $5x - y - z = -3$
$x + 3y + z = 5$
$x - 3y - z = -1$

4 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

a) $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3$
$3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 13$
$4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1$

b) $-x_1 + 7x_2 - x_3 = 5$
$4x_1 - x_2 + x_3 = 1$
$5x_1 - 3x_2 + x_3 = -1$

c) $0{,}6x_2 + 1{,}8x_3 = 3$
$0{,}3x_1 + 1{,}2x_2 = 0$
$0{,}5x_1 = $

5 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.

a) $2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -4$
$-2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -20$
$2x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 23$

b) $x_1 - 0{,}5x_2 + 2x_3 = -3$
$2x_1 + 1{,}2x_2 - x_3 = 4$
$3x_1 - 2x_2 + 2{,}5x_3 = -2$

c) $0{,}4x_1 + 1{,}2x_2 + 1{,}2x_3 = 18$
$1{,}4x_2 - 3{,}5x_3 = -31$
$-2x_1 - 2{,}4x_2 + x_3 = -12$

6 Auf dem Leipziger Weihnachtsmarkt kosten 3 Schokohasen, 4 Schokolebkuchen und 2 Schokomänner 15 €. Kauft man jede Süßigkeit einmal, muss man 5,25 € bezahlen. Für 2 Hasen, 2 Lebkuchen und 3 Männer werden 12,25 € verlangt. Wie viel kosten die einzelnen Süßigkeiten?

7 Die Parabel mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ verläuft durch die Punkte P, Q und R. Berechnen Sie a, b und c.

a) P(−1|0), Q(1|4), R(0|1)

b) P(1|2), Q(−1|−3), R(0|5)

8 Zur Herstellung der Schokopralinen wird bei der Schulte GmbH Milch mit 10 % Fettgehalt benötigt. Wie viel Liter Vollmilch mit 3 % Fettgehalt und Sahne mit 33 % Fettgehalt müssen gemischt werden, um 180 Liter Milch mit 10 % Fettgehalt zu erhalten?

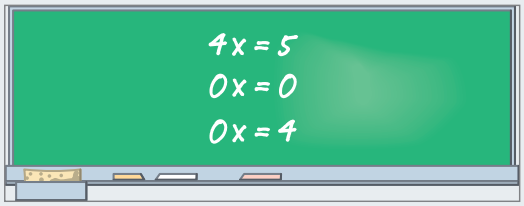
9 Dem Kunden Leckermäul GmbH werden von der Schulte GmbH drei Lieferungen mit Zuckerwaren zugestellt. Die erste Lieferung wiegt 70 kg und besteht aus jeweils einer Packung Schokobärchen, Schugrella und Schokomontis. Die zweite Lieferung enthält eine Packung Schokobärchen und eine Packung Schugrella und wiegt 50 kg. Dabei macht Schugrella 80 % des Gewichtes aus. Die dritte Lieferung wiegt 100 kg. Welche Artikel könnte sie enthalten? Geben Sie mindestens drei Zusammenstellungen an.

10 Ein Hotel wirbt damit, mit 563 Zimmern und 1146 Betten das größte Hotel Berlins zu sein. Laut Beschreibung verfügt das Hotel über 26 Familienzimmer mit jeweils 4 Betten. Die anderen Zimmer sind Einzel- bzw. Zweibettzimmer. Wie viele Einzel- bzw. Zeitbettzimmer gibt es?

11 Die Stadt Menden hat 55100 Einwohner. Die Zahl der weiblichen Einwohner übersteigt die der männlichen Einwohner um 3 %. Wie verteilen sich die Einwohner auf die Geschlechter?

Nur zu Prüfzwecken

2 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme



Eine Lösung?
Keine Lösung?
Unendlich viele Lösungen?

Es wird nun untersucht, von welcher Art die Lösungen eines linearen Gleichungssytems sein können. Dazu betrachtet man zuerst ein Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, ehe verallgemeinert wird.

Man bringt die drei Gleichungsysteme mit zwei Unbekannten auf die reduzierte Stufenform.

$x_1 - 2x_2 = 3$
$2x_1 + 3x_2 = -8$

Die zugehörige Matrix sieht jeweils folgendermaßen aus:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -8 \end{array}\right)$ Z2 − 2·Z1

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -14 \end{array}\right)$:7

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$ Z1 + 2·Z2

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$,

also $x_1 = -1$; $x_2 = -2$

Die Gleichung hat **genau eine Lösung**.

Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

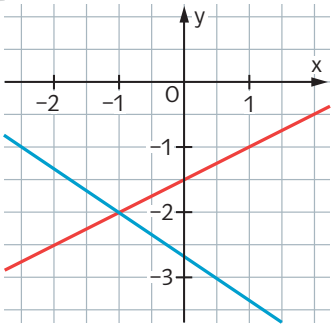
Setzt man für t irgendeine Zahl ein, z. B. t = 1,5, so ist $\begin{pmatrix} 2\cdot(-1{,}5)+3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ eine spezielle Lösung. Man nennt t einen **Parameter**.

Man setzt
$x_1 = x$
$x_2 = y$.

Geometrische Interpretation:

$x - 2y = 3$
$2x + 3y = -8$ oder
$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
$y = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$

Zwei sich in S(−1 | −2) schneidende Geraden:



Genau ein Schnittpunkt

$x_1 - 2x_2 = 3$
$2x_1 - 4x_2 = 6$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \end{array}\right)$ Z2 − 2·Z1

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

also $x_1 - 2x_2 = 3$
$0x_1 + 0x_2 = 0$

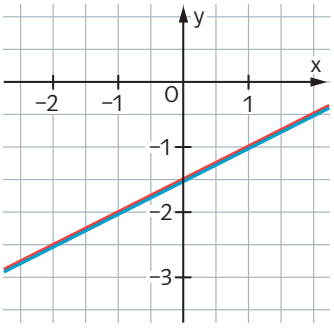
Die Gleichung ist immer erfüllt. Damit ist in der 1. Gleichung x_2 beliebig wählbar. Die Gleichung hat **unendlich viele Lösungen**.

Setzt man $x_2 = t$, so folgt $x_1 - 2t = 3$ oder $x_1 = 2t + 3$.

Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} 2t+3 \\ t \end{pmatrix}$

$x - 2y = 3$
$2x - 4y = 6$ oder
$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Dies sind zwei **identische Geraden**.



Unendlich viele Schnittpunkte

$x_1 - 2x_2 = 3$
$2x_1 - 4x_2 = 4$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 4 \end{array}\right)$ Z2 − 2·Z1

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$

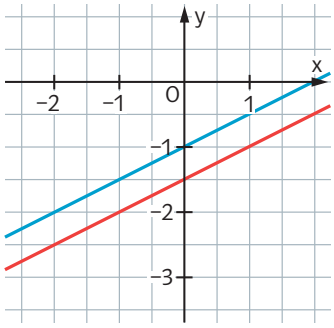
also $x_1 - 2x_2 = 3$
$0x_1 + 0x_2 = -2$,
d. h. $0 = 2$.

Die zweite Gleichung ist für keine Werte x_1 und x_2 erfüllbar. Damit gibt es keinen Lösungsvektor.

Das Gleichungssystem hat **keine Lösung**.

$x - 2y = 3$
$2x - 4y = 4$ oder
$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
$y = \frac{1}{2}x - 1$

Dies sind zwei **parallele Geraden** ohne gemeinsamen Punkt.



Kein Schnittpunkt

Nur zu Prüfzwecken

Geometrisch läuft das Lösen eines linearen Gleichungssystems bestehend aus zwei Gleichungen und zwei Variablen auf die Schnittpunktbestimmung von zwei Geraden in der Ebene hinaus. Hat man nun ein lineares System mit drei Gleichungen und drei Variablen, muss man die Lagebeziehung von drei Ebenen im Raum betrachten. Drei Ebenen können einen Punkt, unendlich viele Punkte oder keinen Punkt gemeinsam haben.

Ein lineares Gleichungssystem hat entweder **genau eine Lösung**, **unendlich viele Lösungen** oder **keine Lösung**.

Beispiel 1 Ein LGS mit unendlich vielen Lösungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 + x_3 &=& 1 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 &=& 6 \\ -x_1 + 2x_2 &=& 4 \end{array}$.

■ Lösung:

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right)$ Z2 + Z1; Z3 + Z1

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \end{array}\right)$ (−1) · Z1; Z3 − 2 · Z2

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Z1 − 2 · Z2; (−1) · Z2

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -14 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Die letzte Nullzeile der erweiterten Koeffizientenmatrix entspricht der Gleichung
$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$. Egal was man für die Variablen einsetzt, man erhält immer die wahre Aussage 0 = 0. Die erste und zweite Zeile als Gleichungssystem geschrieben ergibt

$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_3 &=& -14 \\ x_2 - x_3 &=& -5 \end{array}$ oder $\begin{array}{rcl} x_1 &=& 2x_3 - 14 \\ x_2 &=& x_3 - 5 \end{array}$

Dieses Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Für x_3 kann eine beliebige reelle Zahl gewählt werden. Wählt man z. B. $x_3 = 5$, ergibt sich $x_2 = 5 - 5 = 0$ und $x_1 = 2 \cdot 5 - 14 = -4$. Zusammen mit $x_3 = t$, ergibt sich $x_2 = t - 5$ und $x_1 = 2 \cdot t - 14$.

Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} -14 + 2t \\ -5 + t \\ t \end{pmatrix}$

Die einfachste Gleichung ist die dritte; sie wird daher in die 1. Zeile gesetzt.

Für t kann man irgendeine reelle Zahl einsetzen. Man erhält dann einen **speziellen Lösungsvektor.**

Beispiel 2 Ein unlösbares LGS

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 5x_3 &=& 0 \\ 4x_1 - x_2 + 10x_3 &=& 15 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 &=& 5 \end{array}$.

■ Lösung:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & -5 & 5 \end{array}\right)$ Z2 − 4 · Z1; Z3 − Z1

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 15 \\ 0 & 5 & -10 & 5 \end{array}\right)$ Z2 : 5; Z3 : 5

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Z3 − Z2

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ Z1 + Z2

Die letzte Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix entspricht der Gleichung
$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2$.
Egal was man für die Variablen einsetzt, man erhält immer die falsche Aussage 0 = 2.
Das LGS ist also unlösbar.

Nur zu Prüfzwecken

Aufgaben

1 Lösen Sie das Gleichungssystem.

a) $x_1 + x_2 = 4$; $x_1 - x_2 = 1$

b) $2x_1 + 5x_2 = -4$; $4x_1 + x_2 = 1$

c) $x_1 + 2x_2 = -2$; $4x_1 + 4x_2 = 1$

d) $9x + 10y = 11$; $12x + 13y = 14$

2 Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $x_1 + x_2 = 4$; $x_1 + x_2 = 0$

b) $2x_1 + 5x_2 = -24$; $4x_1 + 10x_2 = -28$

c) $x_1 + 2x_2 = 3$; $3x_1 + 2x_2 = 1$

d) $9a + 18b = 63$; $2a + 4b = 14$

3 Lösen Sie.

a) $x_1 - x_2 - x_3 = 3$; $x_1 + x_2 - x_3 = 4$; $3x_1 - x_2 + x_3 = 10$

b) $x_1 - x_2 - x_3 = 3$; $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$; $3x_1 + x_3 = 10$

c) $3x_1 - 3x_2 - x_3 = -3$; $x_1 + x_2 = 8$; $17 + - x_3 = 0$

4 Von den drei Gleichungssystemen ist eines unlösbar, eines hat unendlich viele Lösungen und eines genau eine Lösung. Für welche Gleichung trifft was zu?

a) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6$; $2x_1 + 6x_2 - 5x_3 = -1$; $-7x_1 - 6x_2 + x_3 = -16$

b) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6$; $2x_1 + 6x_2 - 5x_3 = -1$; $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$

c) $-x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6$; $2x_1 + 6x_2 - 5x_3 = -1$; $7x_1 + 6x_2 - x_3 = 10$

5 Betrachten Sie die folgenden drei Gleichungen.

(1) $2x - y = 3$ (2) $6x - 3y = 9$ (3) $x + 2y = 4$

a) Stellen Sie die Gleichungen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.

b) Entnehmen Sie aus Ihrer Zeichnung, welche Gleichungen ein LGS mit einer eindeutigen Lösung ergeben und weisen Sie dies durch eine Rechnung nach.

c) Welche beiden Gleichungen ergeben ein unlösbares LGS? Erläutern Sie dies durch geeignete Umformungen.

6 Lösen Sie das folgende Gleichungssystem.

Anmerkung: Sind vier Gleichungen mit drei Unbekannten gegeben, so löst man zunächst das durch die ersten drei Gleichungen gegebene Gleichungssystem und setzt eventuell vorhandene Lösungen in die letzte Gleichung ein. Ist diese erfüllt, so ist das Gleichungssystem lösbar, sonst nicht.

a) $x + 2y - 3z = 14$; $5x + 6y - z = 38$; $9x + 8y - 7z = 4$; $x - 4y + 3z = 6$

b) $x + y - 2z = 0$; $2x - 2y + 3z = 1{,}4$; $x - y - z = 0{,}2$; $2x - 3z = 0{,}2$

c) $-4a + 5b - 6c = 0{,}65$; $-0{,}5a + 2{,}5b - 0{,}75c = 1{,}4875$; $a - b + c = -0{,}15$; $-3a + 4b - 5c = 1{,}5$

7 Ein Vater und seine beiden Söhne sind zusammen 100 Jahre alt. Der Vater ist doppelt so alt wie sein ältester Sohn und 30 Jahre älter als sein jüngster Sohn.
Wie alt sind Vater und Söhne?

8 Gegeben ist die Gleichung $x + y = 1$. Fügen Sie eine zweite Gleichung hinzu, so dass die beiden Gleichungen dann ein LGS bilden, welches

a) keine Lösung,

b) unendlich viele Lösungen,

c) eine eindeutige Lösung

hat.

Nur zu Prüfzwecken

3 Beschreibung wirtschaftlicher Sachverhalte durch Matrizen

Eine Getränkefirma stellt aus den drei Grundstoffen Wasser (W), Orangensaft (O) und Mangosaft (M) zwei Mischgetränke Oraman (G_1) und Mangor (G_2) her. Wie viel Liter der Grundstoffe werden für 100 Liter des Mischgetränks G_1 und 200 Liter des Getränks G_2 benötigt?

Bedarf in Liter an	Getränkesorte (1 Liter)	
	Oraman (G_1)	Mangor (G_2)
Wasser	0,4	0,3
Orangensaft	0,5	0,3
Mangosaft	0,1	0,4

Die Schulte GmbH wird täglich von ihren Lieferanten mit den für die Produktion wichtigsten Zutaten beliefert. Ein Mitarbeiter hält die Mengen in Kilogramm fest.

	Kakaomasse	Kakaobutter	Zucker	Milchpulver	Nüsse
Kandis GmbH	4	6	0	80	12
SchokoSchock GmbH	64	66	0	0	4
Zuckersüß GmbH	0	0	130	0	8

In jeder Zeile werden die Lieferungen der drei Lieferanten und in jeder Spalte die Liefermengen der einzelnen Produkte aufgeführt. In der Mathematik ist es üblich, eine solche Tabelle übersichtlich als **Matrix** (Plural: **Matrizen**) darzustellen und mit einem Großbuchstaben zu bezeichnen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 & 80 & 12 \\ 64 & 66 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 130 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Das **Element** in der 1. Zeile und der 2. Spalte der Matrix A ist $a_{12} = 6$. Die Matrix hat drei Zeilen und fünf Spalten; das **Format** der Matrix ist (3 × 5). Die Matrix wird entsprechend auch als (3 × 5)-Matrix bezeichnet.

Gelesen: „3 Kreuz 5-Matrix"

Die Elemente einer Spalte der Matrix A werden in einem **Spaltenvektor**, z. B. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 130 \end{pmatrix}$ erfasst.

Variable, die für einen Vektor stehen, werden mit Kleinbuchstaben und einem Pfeil gekennzeichnet.

Dieser Spaltenvektor ist also eine Matrix mit dem Format (3 × 1). Entsprechend nennt man die Elemente einer Zeile der Matrix A, z. B. $\vec{c}^{\,T} = (4 \;\; 6 \;\; 0 \;\; 80 \;\; 12)$ **Zeilenvektor** mit dem Format (1 × 5). Das hochgestellte Zeichen T bedeutet, dass der Vektor **transponiert**, d. h. umgestellt wurde. Man kann jede Matrix transponieren, indem man Zeilen und Spalten miteinander vertauscht.

Ein Zahlenschema $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit m Zeilen und n Spalten wird als **(m × n)-Matrix** bezeichnet. Die Zahlen dieses Schemas heißen **Elemente der Matrix**. Matrizen werden mit Großbuchstaben benannt. Die Elemente der Matrix werden mit einem Doppelindex gekennzeichnet, der die Nummer der Zeile und die Nummer der Spalte des Elementes angibt.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ist eine (3 × 3)-Matrix.

Ist in einer Matrix die Anzahl der Zeilen gleich der Anzahl der Spalten, spricht man von einer **quadratischen** Matrix. In diesem Fall gilt also m = n, sie hat das Format (m × m).
Die Elemente a_{11}, a_{22}, a_{33} … bilden die Hauptdiagonale einer quadratischen Matrix. In einer **Einheitmatrix** sind alle Elemente in der Hauptdiagonalen eins und alle anderen Elemente null.

Nur zu Prüfzwecken

Beispiel 1 Format, Elemente, transponierte Matrix

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie das Format und das Element a_{21} der Matrizen A und A^T.

■ Lösung: A hat das Format (2×3) und $a_{21} = -2$. Die transponierte Matrix ist $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. In dieser Matrix ist $a_{21} = 3$.

Beispiel 2 Einstufiger Produktionsprozess

In einer Kantine werden drei Kaffeegetränke in unterschiedlichen Mischungsverhältnissen angeboten. Für einen Cappuccino werden sieben Einheiten Kaffeepulver, vier Einheiten Wasser und eine Einheit Milch, für einen Latte Macchiato neun Einheiten Kaffeepulver, zwei Einheiten Wasser und drei Einheiten Milch verwendet. Für einen Espresso benötigt der Kantinenchef sieben Einheiten Kaffeepulver und zwei Einheiten Wasser. Erstellen Sie die Tabelle und die Matrix A, den den Bedarf an Zutaten für ein Kaffeegetränk angibt.

■ Lösung:

	Cappuccino	Latte macchiato	Espresso
Kaffeepulver	7	9	7
Wasser	4	2	2
Milch	1	3	0

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgaben

1 Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 16 \\ 12 & 0 & 25 \\ 16 & 25 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie a_{21}, a_{23}, a_{32} und a_{33} an.

b) Beschreiben Sie, welche Eigenschaften Ihnen bei der Matrix A auffallen.

c) Die Matrix A wurde vom Leiter des Fuhrparks einer Firma erstellt um die Entfernung zwischen den drei wichtigsten Standorten festzuhalten. Interpretieren Sie die Werte der Matrix A im Sinne dieser Aufgabenstellung.

d) Eignet sich die Matrix um die Entfernungen festzuhalten? Begründen Sie Ihre Meinung.

2 a) Geben Sie eine (4×3)-Matrix an mit $a_{11} = -1$, $a_{43} = 5$, $a_{23} = 8$, $a_{33} = 1$, $a_{12} = 4$, $a_{42} = 10$ und $a_{24} = -5$. Die übrigen Elemente haben den Wert 0.

b) Formulieren Sie eine Anwendungsaufgabe für die Matrix aus a).

c) Erklären Sie die Bedeutung des Elementes a_{11} anhand Ihrer Aufgabe aus b).

3 Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 4 & 5 & c \\ b & 8 & 9 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ sowie der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie jeweils das Format an.

b) Bestimmen Sie B^T.

c) Bestimmen Sie a, b, c so, dass gilt: $A = A^T$.

d) Worin liegt der Unterschied zwischen $\vec{a}^T$ und $(3 \;\; 4 \;\; 7)^T$?

4 Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(1) Eine Einheitsmatrix ist immer quadratisch.

(2) Transponiert man eine transponierte Matrix erneut, so erhält man wieder die ursprüngliche Matrix.

(3) Ein Spaltenvektor ist eine Matrix mit dem Format $(1 \times n)$.

(4) Ein transponierter Zeilenvektor ist ein Spaltenvektor.

Nur zu Prüfzwecken

4 Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen

Wie hat sich der Absatz zwischen März und April verändert?

Stückzahl im März:

Artikel	Verkaufsstelle		
	I	II	III
A	540	290	360
B	150	120	0
C	650	320	340

Stückzahl im April:

Artikel	Verkaufsstelle		
	I	II	III
A	510	275	290
B	165	150	0
C	750	410	455

Zahlreiche Anwendungen aus der Betriebswirtschaft zeigen, dass es sinnvoll ist, Matrizen miteinander zu verknüpfen.

Geben die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 15 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 13 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$ die Produktionszahlen der Erzeugnisse 1 und 2 in den Werken W_1, W_2 und W_3 in den Jahren 2011 und 2012 an, so wird durch die „Addition"

$$A + B = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 9 & 13 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+10 & 11+9 & 12+13 \\ 9+8 & 10+11 & 15+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 20 & 25 \\ 17 & 21 & 29 \end{pmatrix}$$

die Gesamtproduktion in den Jahren 2011 und 2012 bestimmt.
Durch „Subtraktion" der Matrizen

$$A - B = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 9 & 13 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-10 & 11-9 & 12-13 \\ 9-8 & 10-11 & 15-14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält man als Ergebnis, wie viel der Erzeugnisse 1 und 2 in den einzelnen Werken 2011 mehr (+) oder weniger (−) produziert wurden als 2012.

Deutung der Matrix A: Zahlen 2011:

	W_1	W_2	W_3
Erzeug. 1	12	11	12
Erzeug. 2	9	10	15

Deutung der Matrix B: Zahlen 2012:

	W_1	W_2	W_3
Erzeug. 1	10	9	13
Erzeug. 2	8	11	14

Zwei Matrizen A und B mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl werden addiert, indem man die einander entsprechenden Elemente addiert.
Für die Matrizenaddition gilt das Kommutativgesetz: A + B = B + A.

Entsprechende Elemente sind die Elemente an der jeweils gleichen Position innerhalb der Matrix.

Man muss Matrizen manchmal auch mit einer Zahl multiplizieren:
Drei Werke der Firma Schulte werden täglich von vier Milchfahrzeugen angefahren, die dort ihre Milch abliefern. Die zugehörige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 120 & 180 & 110 & 180 \\ 130 & 100 & 170 & 150 \\ 190 & 120 & 190 & 100 \end{pmatrix}$$ gibt die abgelieferten Milchmengen an. Um die in einer Woche

bezogene Milchmenge zu berechnen, ist jedes Element der Matrix A mit 7 zu multiplizieren, d.h.

$$7 \cdot A = 7 \cdot \begin{pmatrix} 120 & 180 & 110 & 180 \\ 130 & 100 & 170 & 150 \\ 190 & 120 & 190 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot120 & 7\cdot180 & 7\cdot110 & 7\cdot180 \\ 7\cdot130 & 7\cdot100 & 7\cdot170 & 7\cdot150 \\ 7\cdot190 & 7\cdot120 & 7\cdot190 & 7\cdot100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 840 & 560 & 770 & 560 \\ 910 & 700 & 490 & 350 \\ 630 & 840 & 630 & 700 \end{pmatrix}.$$

Man vereinbart deshalb:

Multipliziert man eine Matrix A mit einer reellen Zahl, so ist jedes Element der Matrix A mit dieser Zahl zu multiplizieren. Man spricht von **Skalarmultiplikation**.

Dabei wird $(-1)\cdot A$ auch als $-A$ bezeichnet. Die Elemente von $-A$ haben damit das entgegengesetzte Vorzeichen der Elemente von A.

Skalarmultiplikation bedeutet: mit einem Skalar = Zahl multiplizieren.

Nur zu Prüfzwecken

Beispiel 1 Subtraktion und Skalarmultiplikation von Matrizen

Gegeben sind die beiden Matrizen A und B. Bilden Sie $A - 4 \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 9 \\ 1 & 7 & 8 \\ 5 & 0 & 7 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 8 & 1 & -9 \\ 6 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

■ Lösung:

$$A - 4 \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 9 \\ 1 & 7 & 8 \\ 5 & 0 & 7 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 28 & 4 \\ 32 & 4 & -36 \\ 24 & 0 & 8 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-16 & 6-28 & 9-4 \\ 1-32 & 7-4 & 8-(-36) \\ 5-24 & 0-0 & 7-8 \\ -1-8 & 8-12 & 1-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -22 & 5 \\ -31 & 3 & 44 \\ -19 & 0 & -1 \\ -9 & -4 & -15 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2 Addition und Skalarmultiplikation von Vektoren

Im ersten Halbjahr liegen der Schulte GmbH folgende Bestellungen eines Kunden vor: 12 ME Schokobärchen, 31 ME Schugrella und 22 ME Schokomontis. Im zweiten Halbjahr verdoppelt der Kunde seine Bestellungen. Stellen Sie die Berechnung der Jahresbestellung mit Hilfe von Spaltenvektoren dar.

■ Lösung: $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 31 \\ 22 \end{pmatrix}$; $\vec{b}_2 = 2 \cdot \vec{b}_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 31 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 62 \\ 44 \end{pmatrix}$; $\vec{b}_J = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 31 \\ 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 62 \\ 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 93 \\ 66 \end{pmatrix}$.

Der Kunde bestellt 36 ME Schokobärchen, 93 ME Schugrella und 66 ME Schokomontis im Jahr.

Aufgaben

1 Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 5 & 4 \\ -4 & 5 & 3 & 1 \\ 10 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -0 & \cdot \\ -3 & 6 & - & -0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -5 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie (wenn möglich).

a) $A + B$ b) $A - B + C$ c) $B + 3 \cdot A$ d) $A - 2 \cdot A$ e) $(-2) \cdot C$

2 Gegeben sind Spaltenvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Berechnen und erläutern Sie, welche Rechenregeln gelten.

a) $2 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$ und $2 \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

b) $\frac{1}{2} \cdot \vec{b} + \frac{3}{2} \cdot \vec{b}$ und $2 \cdot \vec{b}$

c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ und $\vec{c} + \vec{a} + \vec{b}$

d) $2 \cdot \vec{a} - \vec{b} - 3 \cdot \vec{a} + 4 \cdot \vec{b}$ und $-\vec{a} + 3 \cdot \vec{b}$.

3 Gegeben sind die Produktionszahlen zweier Firmen in drei aufeinander folgenden Monaten:

März:

Firma	Produkt			
	P1	P2	P3	P4
1	304	207	408	505
2	630	412	508	660

April:

Firma	Produkt			
	P1	P2	P3	P4
1	444	287	438	495
2	655	408	508	695

Mai:

Firma	Produkt			
	P1	P2	P3	P4
1	454	329	469	595
2	730	480	508	660

a) Schreiben Sie als Matrix. Bestimmen Sie die Gesamtproduktionszahlen von März bis Mai.

b) Die Produktionszahlen sollen im Juni gegenüber Mai um 5 % je Produkt steigen. Wie hoch sind dann die neuen Zahlen?

c) Auch im weiteren Verlauf des Jahres steigen die Produktionszahlen jeweils um 5 % gegenüber des Vormonats. Wie hoch sind dann die Produktionszahlen im Monat Dezember?

Nur zu Prüfzwecken

5 Multiplikation von Matrizen

In einem Laden stehen nebeneinander die Geräte von Fig. 1. Darunter ist der Einzelpreis zu jedem Gerät notiert.
Berechnen Sie den auf dem Regal befindlichen Gesamtwert der Waren.

Fig. 1

Bei der Schulte GmbH soll die Berechnung der Produktionskosten übersichtlicher gestaltet werden. Dazu hat Herr Schulte eine Besprechung einberufen. Die Mitarbeiter betrachten zunächst ein einfaches Beispiel: Es werden 12 Vollmilchriegel, 8 Zartbitterriegel und 10 Nussriegel bestellt und pro Vollmilchriegel fallen 0,20 €, pro Zartbitterriegel 0,30 € und pro Nussriegel 0,25 € Materialkosten an.
Dann berechnen sich die gesamten Materialkosten für diese Bestellung wie folgt:
$0{,}20\frac{€}{\text{Stück}} \cdot 12\ \text{Stück} + 0{,}30\frac{€}{\text{Stück}} \cdot 8\ \text{Stück} + 0{,}25\frac{€}{\text{Stück}} \cdot 10\ \text{Stück} = 7{,}30\,€$. Da man solche Rechnungen auf komplexere Beispiele übertragen möchte, lohnt es sich über eine kurze Darstellungsweise nachzudenken. In dem Beispiel kann man die Materialkosten pro Stück als Zeilenvektor und die Bestellmengen als Spaltenvektor schreiben. Ohne Verwendung der Einheiten erhält man

$$(0{,}20 \quad 0{,}30 \quad 0{,}25) \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = 0{,}20 \cdot 12 + 0{,}30 \cdot 8 + 0{,}25 \cdot 10 = 7{,}30.$$

Man kann einen $(1 \times n)$-Zeilenvektor $\vec{a}^T$ mit einem $(n \times 1)$-Spaltenvektor $\vec{b}$ multiplizieren, indem man die entsprechenden Elemente miteinander multipliziert und anschließend die Produkte addiert.
Ist z.B. $\vec{a}^T = (a_1 \quad a_2 \quad a_3)$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, dann gilt: $\vec{a}^T \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.
Das Ergebnis ist immer eine Zahl und wird **skalares Produkt** genannt.

Herr Schulte ist noch nicht zufrieden und möchte neben den Materialkosten nun auch die Produktionskosten mit darstellen. Herr Rad schlägt vor, das obige Beispiel zu erweitern und pro Vollmilchriegel 0,10 €, pro Zartbitterriegel 0,10 € und pro Nussriegel 0,15 € Produktionskosten anzunehmen. Es wird betont, dass es wichtig ist, die Kosten für jede Bestellung getrennt nach Material und Produktion aufzuschlüsseln. Ergänzt werden muss also die Rechnung für die Produktionskosten: $0{,}10\frac{€}{\text{Stück}} \cdot 12\ \text{Stück} + 0{,}10\frac{€}{\text{Stück}} \cdot 8\ \text{Stück} + 0{,}15\frac{€}{\text{Stück}} \cdot 10\ \text{Stück} = 3{,}50\,€$. Ohne Verwendung der Einheiten kann man die beiden Rechnungen folgendermaßen übersichtlich zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}25 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}20 \cdot 12 + 0{,}30 \cdot 8 + 0{,}25 \cdot 10 \\ 0{,}10 \cdot 12 + 0{,}10 \cdot 8 + 0{,}15 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}30 \\ 3{,}50 \end{pmatrix}$$

Herr Brummi ist begeistert. Wenn man nun z.B. die Transportkosten mit aufführen möchte, kann man einfach die Matrix um eine weitere Zeile ergänzen. Angenommen, es werden pro Riegel Transportkosten in Höhe von $0{,}02\frac{€}{\text{Stück}}$ kalkuliert. Dann lautet die veränderte Rechnung:

$$\begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}25 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}20 \cdot 12 + 0{,}30 \cdot 8 + 0{,}25 \cdot 10 \\ 0{,}10 \cdot 12 + 0{,}10 \cdot 8 + 0{,}25 \cdot 10 \\ 0{,}02 \cdot 12 + 0{,}02 \cdot 8 + 0{,}02 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}30 \\ 3{,}50 \\ 0{,}60 \end{pmatrix}$$

Allgemein kann also festgehalten werden:

Nur zu Prüfzwecken

Man kann eine $(m \times n)$-Matrix A mit einem $(n \times 1)$-Spaltenvektor $\vec{b}$ multiplizieren, indem man jeden der n Zeilenvektoren von A mit dem Spaltenvektor $\vec{b}$ multipliziert und die Skalarprodukte untereinander schreibt. Das Ergebnis ist ein $(n \times 1)$-Spaltenvektor.

Ist z. B. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, dann gilt: $A \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 + a_{13} \cdot b_3 \\ a_{21} \cdot b_1 + a_{22} \cdot b_2 + a_{23} \cdot b_3 \\ a_{31} \cdot b_1 + a_{32} \cdot b_2 + a_{33} \cdot b_3 \end{pmatrix}$.

Nun gibt es ja in der Regel mehrere Bestellungen. Die Mitarbeiter nehmen vereinfacht an, dass von einem zweiten Kunden 7 Vollmilchriegel, 11 Zartbitterriegel und 3 Nussriegel bestellt werden. Dann entstehen für diese Bestellung folgende Kosten:

$$\begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}25 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}20 \cdot 7 + 0{,}30 \cdot 11 + 0{,}25 \cdot 3 \\ 0{,}10 \cdot 7 + 0{,}10 \cdot 11 + 0{,}15 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}45 \\ 2{,}25 \end{pmatrix}$$

Man kann die Rechnungen für beide Kunden wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}25 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 8 & 11 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}20 \cdot 12 + 0{,}30 \cdot 8 + 0{,}25 \cdot 10 & 0{,}20 \cdot 7 + 0{,}30 \cdot 11 + 0{,}25 \cdot 3 \\ 0{,}10 \cdot 12 + 0{,}10 \cdot 8 + 0{,}15 \cdot 10 & 0{,}10 \cdot 7 + 0{,}10 \cdot 11 + 0{,}15 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}30 & 5{,}45 \\ 3{,}50 & 2{,}25 \end{pmatrix}.$$

Diese Rechnung kann man für beliebig viele Kunden erweitern. Allgemein gilt:

Das Produkt kann nur gebildet werden, wenn die Matrix A genau so viele Spalten wie B Zeilen hat.

Man kann eine $(m \times n)$-Matrix A mit einer $(n \times k)$-Matrix B multiplizieren, indem man jeden der m Zeilenvektoren von A mit jedem der k Spaltenvektoren von B multipliziert. Die Positionen in der $(m \times k)$-Ergebnismatrix C werden dabei wie folgt festgelegt: Das Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A und des j-ten Spaltenvektor von B ergibt das Element c_{ij}.

Das Kommutativgesetz $A \cdot B = B \cdot A$ gilt nicht für die Matrizenmultiplikation.

Beispiel 1 Multiplikation von Matrizen

Gegeben sind die beiden Matrizen A und B. Berechnen Sie $A \cdot B$. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

■ Lösung: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 & 4 \cdot 4 + 7 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 35 \\ 18 & 32 \\ 29 & 51 \end{pmatrix}$

Das Distributivgesetz $A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C)$ gilt für Matrizen.

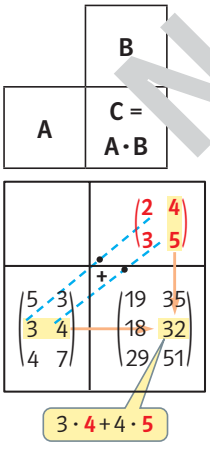
Beispiel 2 Vertauschen der Matrizen bei der Multiplikation

Es ist $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie $A \cdot B \neq B \cdot A$.

■ Lösung: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$ und

$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$; also gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Rechenschema nach Falk:



Beispiel 3 Addition und Multiplikation von Matrizen

Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $A \cdot (B + C)$ und $A \cdot B + A \cdot C$. Was fällt Ihnen auf?

■ Lösung: $A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 14 & 11 & 32 \end{pmatrix}$.

$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 2 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 14 & 11 & 32 \end{pmatrix}$.

Für das Beispiel gilt: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Nur zu Prüfzwecken

Aufgaben

1 Berechnen Sie.

a) $\begin{pmatrix}1&0&3\\5&1&4\\3&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}17&3\\5&8\\13&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1&5\\5&1\\3&2\\0&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1&0&3&4\\5&1&4&1\\3&2&0&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\\2\end{pmatrix}$

2 Berechnen Sie $A\cdot B$ und $B\cdot A$, sofern dies möglich ist.

a) $A=\begin{pmatrix}3&1&3\\4&4&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\\3&2\\1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&4&1\\-3&2&1&5\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-1&3&-1\\-2&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

d) $A=(1\ \ 2\ \ 4\ \ -3)$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\3&2&4&1\\4&3&2&1\end{pmatrix}$

3 Gegeben sind die Matrizen A, B und C mit $A=\begin{pmatrix}10&5&0\\6&17&19\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-10&0\\5&15\\0&10\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&4\\5&1\end{pmatrix}$

Das Assoziativgesetz gilt für Matrizen.

a) Berechnen Sie die Matrix $A\cdot B$ und multiplizieren Sie das Ergebnis von rechts mit C. Berechnen Sie $(A\ B)\cdot C$.

b) Berechnen Sie die Matrix $B\cdot C$ und multiplizieren Sie das Ergebnis von links mit A. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Aufgabenteil a).

c) Es sei A^T die Matrix, die aus A durch Vertauschung der Zeilen und Spalten entsteht. Berechnen Sie $A^T + B$ und $(A^T + B)\cdot C$.

d) Berechnen Sie $(2\cdot A)\cdot(3\cdot B)$ und $6\cdot(A\cdot B)$.

4 Gegeben ist die Matrix A mit $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$.

$A^2 = A\cdot A$
$A^4 = A\cdot A\cdot A\cdot A$
…

a) Berechnen Sie A^8. Gehen Sie geschickt vor.

b) Geben Sie eine Matrix E an, so dass gilt: $A\cdot E = A$

c) Geben Sie eine Matrix F an, so dass gilt: $A\cdot F=\begin{pmatrix}2&1\\4&\end{pmatrix}$.

5 Sie haben als Auszubildende der Schulte GmbH den Auftrag, für ein Grillfest einzukaufen. Es werden benötigt: 80 Grillwürste, 10 Brötchen, 2 Flaschen Ketchup, 3 Gläser Senf, 40 Liter Wasser und 30 Liter Bier. Die Preise der Waren pro Stück bzw. pro Liter lauten in der obigen Reihenfolge: 1,20 €; 0,20 €; 1,20 €; 0,99 €; 1,50 €; 1,50 €. Berechnen Sie mithilfe des Skalarproduktes den Einkaufspreis.

6 Gegeben ist die Nullmatrix $N=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

a) Geben Sie eine von der Nullmatrix verschiedene Matrix A an, so dass $A\cdot A = N$ gilt.

b) Geben Sie zwei von der Nullmatrix verschiedene Matrizen A und B an, so dass $A\cdot B = N$ gilt.

7 Geben Sie einen Spaltenvektor $\vec{x}$ an, so dass

a) $\begin{pmatrix}2&2\\2&-2\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2&-5&3\\4&-12&8\\3&1&-2\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\9\end{pmatrix}$

gilt.

Nur zu Prüfzwecken

6 Einstufige Produktionsprozesse

Die Endprodukte sind z. B. vier Schokoladensorten und die Rohstoffe Kakao, Zucker und Milchpulver.

Die Schulte GmbH stellt drei Sorten Schokolade her. Je 100 Gramm sind die Nährstoffe gemäß Tabelle aufgelistet. Im Laufe eines Jahres isst ein Junge 10 Tafeln Bitter-, 12 Tafeln Milch- und fünf Tafeln Trüffelschokolade zu je 100 g. Wie viel Eiweiß, Kohlehydrate und Fett nimmt er dabei zu sich?

Zusammensetzung	Inhalt in je 100 g von		
	Bitter	Milch	Trüffel
Eiweiß	9,5	6,9	11,5
Kohlehydrate	35,5	51,5	35,5
Fett	42,5	36,5	40,2
Sonstige	12,5	5,1	12,8

Mithilfe von Matrizen kann man Betriebsabläufe und Planungen sowie Kostenberechnungen in hervorragender Weise darstellen, beschreiben und berechnen. So werden unterschiedliche Rohstoffe zur Produktion verschiedener Endprodukte benötigt. Die jeweils dafür benötigten Mengen hängen linear von der zu produzierenden Menge ab. Man spricht von **linearer Verflechtung**.

Eine Firma stellt vier Endprodukte E_1 bis E_4 her. Pro Endprodukt werden drei Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 verwendet, und zwar in Mengen, die in der Tabelle von Fig. 1 angegeben sind. Die Angaben beziehen sich dabei auf 1 ME je Endprodukt, die Rohstoffe sind in Mengeneinheiten (ME) angegeben.
Die Firma bekommt einen Auftrag über die Mengen aus Fig. 2.

Rohstoff	Rohstoffe in ME je Endprodukt			
	E_1	E_2	E_3	E_4
R_1	3	5	2	4
R_2	2	1	4	1
R_3	4	3	3	4

Fig. 1

Auftrag	E_1	E_2	E_3	E_4
Anzahl	40	30	45	35

Fig. 2

Fragestellung 1:
Welche Mengen an Rohstoffen R_1 bis R_4 werden für den Auftrag benötigt?
Die in Fig. 1 aufgelistete Tabelle aus 3 Zeilen und 4 Spalten schreibt man als Matrix

$$A_{RE} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Zahl $a_{23} = 4$ in der 2. Zeile und 3. Spalte gibt beispielsweise an, wie viel ME des Rohstoffs R_2 zur Herstellung einer ME des Endproduktes E_3 benötigt werden.
Die 3 × 4-Matrix A_{RE} heißt **Rohstoff-Endprodukt-(Verflechtungs-)Matrix**.

Die Produktionsmengen werden als Vektor (4 × 1-Matrix) $\vec{p}_E = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 45 \\ 35 \end{pmatrix}$ geschrieben.
Der Vektor heißt **Produktionsvektor**.

Man erhält den Produktionsvektor der Rohstoffe $\vec{p}_R$, wenn man die Rohstoff-Endprodukt-Matrix A_{RE} mit dem Produktionsvektor $\vec{p}_E$ der Endprodukte von rechts multipliziert:

$$\vec{p}_R = A_{RE} \cdot \vec{p}_E = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 45 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 325 \\ 525 \end{pmatrix}.$$

Damit werden 500 ME des Rohstoffs R_1, 325 ME von R_2 und 525 ME von R_3 benötigt.

Fragestellung 2:
Wie hoch sind die Rohstoffkosten je ME der Endprodukte, wenn die Kosten von Fig. 3 pro ME Rohstoff zugrunde gelegt werden?

Rohstoffkosten für je ME in GE	R_1	R_2	R_3
	5	7	6

Fig. 3

Nur zu Prüfzwecken

Ist $\vec{k}_R = \begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix}$ der Kostenvektor der Rohstoffe und $\vec{k}_R^T = (5 \quad 7 \quad 6)$ der zugehörige Zeilenvektor, so erhält man den Kostenvektor $\vec{k}_E^T$ für jedes Endprodukt je ME, indem man $\vec{k}_R^T$ mit der Rohstoff-Endprodukt-Matrix A_{RE} von links multipliziert:

$$\vec{k}_E^T = \vec{k}_R^T \cdot A_{RE} = (5 \;\; 7 \;\; 6) \cdot \begin{pmatrix}3 & 5 & 2 & 4\\2 & 1 & 4 & 1\\4 & 3 & 3 & 4\end{pmatrix} = (53 \;\; 50 \;\; 56 \;\; 51)$$

Die Rohstoffkosten in GE je Erzeugnis betragen für E_1 53, für E_2 50, für E_3 56 und für E_4 51.

Fragestellung 3:

Wie hoch sind die Rohstoffkosten für den ganzen Auftrag?
Man erhält die Gesamtkosten R der für den Auftrag benötigten Rohstoffe, indem man den Kostenvektor $\vec{k}_R$ mit dem Produktionsvektor der Rohstoffe $\vec{p}_R$ multipliziert: $R = \vec{k}_R^T \cdot \vec{p}_R$. Man kann aber auch $R = \vec{k}_E^T \cdot \vec{p}_E$ bilden, also Kostenvektor der Endprodukte mal Produktionsvektor:

$$R = \vec{k}_R^T \cdot \vec{p}_R = (5 \;\; 7 \;\; 6) \cdot \begin{pmatrix}500\\325\\525\end{pmatrix} = 7925 \quad \text{oder} \quad R = \vec{k}_E^T \cdot \vec{p}_E = (53 \;\; 50 \;\; 56 \;\; 51) \cdot \begin{pmatrix}40\\30\\45\\35\end{pmatrix} = 7925$$

Die Rohstoffkosten betragen also 7925 GE.

Fragestellung 4:

Welchen Gewinn macht die Firma bei dem Auftrag?
Je Produkt entstehen Fertigungs-, Verwaltungs- und Vertriebskosten. Diese sonstigen Kosten und der Erlös sind aufgeschlüsselt nach den Produkten in Fig. 1 angegeben.

	E_1		E_3	E_4
Sonstige Kosten in GE		240	210	220
Erlös in GE		370	350	360

Fig. 1

Mit den Vektoren $\vec{k}_S^T = (200 \;\; 240 \;\; 210 \;\; 220)$ und $\vec{e}_E^T = (310 \;\; 370 \;\; 350 \;\; 360)$ berechnet man die sonstigen Kosten und den Erlös mithilfe der Produkte $S = \vec{k}_S \cdot \vec{p}$ und $E = \vec{e}_E^T \cdot \vec{p}_E$.

$$S = (200 \;\; 240 \;\; 210 \;\; 220) \cdot \begin{pmatrix}40\\30\\45\\35\end{pmatrix} = 32\,350; \quad E = (310 \;\; 370 \;\; 350 \;\; 360) \cdot \begin{pmatrix}40\\30\\45\\35\end{pmatrix} = 51\,850.$$

Damit betragen die sonstigen Kosten 32 350 GE, der Erlös beläuft sich auf 51 850 GE.
Zur Berechnung des Gewinns G sind vom Erlös E die Rohstoffkosten R und die Fertigungskosten S zu subtrahieren:
Gewinn in GE: $G = E - S - R = 51\,850 - 32\,350 - 7925 = 11\,575$.

Einstufige Produktion von n Endprodukten aus k Rohstoffen:
In der Rohstoff-Endprodukt-Matrix A_{RE} werden in jeder Zeile die Mengeneinheiten eines Rohstoffes angegeben, die für die Produktion je einer Mengeneinheit des jeweiligen Endproduktes benötigt werden.
Der Produktionsvektor $\vec{p}_E$ gibt an, wie viele ME von jedem Endprodukt erzeugt werden sollen. Der Produktionsvektor $\vec{p}_R$ gibt an, wie viele ME von jedem Rohstoff benötigt werden.
Es gilt: $\vec{p}_R = A_{RE} \cdot \vec{p}_E$.
Ist $\vec{k}_R$ der Kostenvektor für die Rohstoffe und $\vec{k}_E$ der Kostenvektor für die Endprodukte, so gilt: $\vec{k}_E^T = \vec{k}_R^T \cdot A_{RE}$.

Nur zu Prüfzwecken

Beispiel Einstufige Verflechtung

Ein Telefonanlagenbauer bietet drei Anlagen T_1, T_2 und T_3 an. Die dazu jeweils benötigten Kabel in m und Endgeräte sind in Fig. 1 aufgelistet. So werden für die Installation der Standardanlage T_1 30 m Kabel und fünf Endgeräte benötigt, usw.

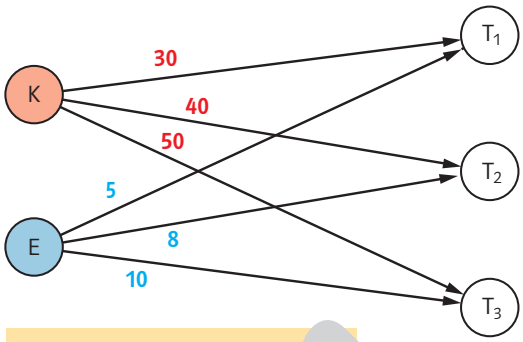
Die grafische Darstellung in Fig. 1 nennt man **Verflechtungsdiagramm**.

a) Erstellen Sie die Matrix A_{RE} und berechnen Sie den Bedarf an Kabel und Endgeräten für den Auftrag in Fig. 1.

b) Was kostet jede Anlage, wenn 1 m Kabel 0,50 € und jedes Endgerät 40 € kostet?

c) Wie hoch sind die Kosten für den Auftrag?

Bedarf an Kabeln (K) in Metern und an Endgeräten (E) in Stück:



Auftrag: $10 \times T_1$; $6 \times T_2$; $5 \times T_3$.

Fig. 1

■ Lösung: a) Da zwei „Rohstoffe“ und drei Endprodukte vorliegen, handelt es sich um eine (2×3)-Matrix, in der in der 1. Zeile die benötigten Kabel, in der 2. Zeile die Endgeräte je Anlage stehen:

$$A_{RE} = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 50 \\ 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}; \quad \text{Produktionsvektor } \vec{p}_E = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $\vec{p}_R = A_{RE} \cdot \vec{p}_E$. Die Rechnung ergibt, dass 790 m Kabel und 148 Endgeräte für den Auftrag erforderlich sind.

b) Es ist $\vec{k}_R^T = (0{,}5 \;\; 40)$ von links zu multiplizieren mit A_{RE}, also $\vec{k}_E^T = \vec{k}_R^T \cdot A_{RE}$.
Die Anlage T_1 kostet somit 215 €, T_2 kostet 340 € und T_3 kostet 425 €.

c) Die Gesamtkosten in Euro betragen $K = \vec{k}_E^T \cdot \vec{p}_E = 215 \cdot 10 + 340 \cdot 6 + 425 \cdot 5 = 6315$.

Aufgaben

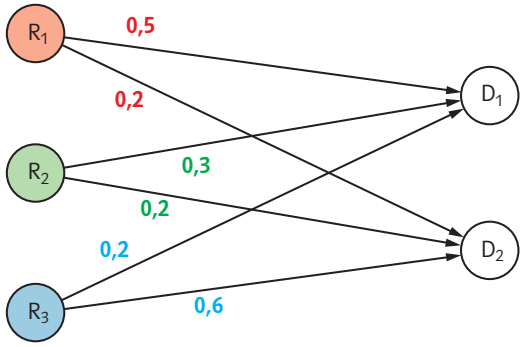
1 Eine Fabrik stellt aus drei Grundstoffen R_1, R_2, R_3 zwei Düngersorten D_1 und D_2 her.
Fig. 1 zeigt den Bedarf je Tonne Dünger und die Kosten der Grundstoffe.

a) Stellen Sie die Matrix A_{RE} auf.

b) Wie viel Tonnen der Rohstoffe werden für 100 t D_1 und 200 t D_2 gebraucht?

c) Was kosten die Rohstoffe für je eine Tonne D_1 und D_2?

d) Die Rohstoffpreise für R_1 erhöhen sich um 5 %, die von R_2 um 10 %, während die von R_3 5 % fallen. Berechnen Sie die Änderung der Rohstoffkosten je Tonne D_1 und D_2 in Prozent.



Kosten für	R_1	R_2	R_3
in Euro	4	5	6

Fig. 2

2 Ein Hersteller verpackt ein Getränk G in drei Größen G_1 (1 Liter), G_2 (2 Liter) und G_3 (5 Liter). Für die Herstellung von G werden vier flüssige Rohstoffe R_1, R_2, R_3 und R_4 benötigt. Für G_1 sind dies von R_1 0,1 Liter, von R_2 0,2 Liter, von R_3 0,55 Liter und von R_4 0,15 Liter.

a) Geben Sie die zugehörige Rohstoff-Endproduktion-Matrix A_{RE} an.

b) Die Firma stellt täglich 8000 Flaschen von G_1, 5000 von G_2 und 800 Flaschen von G_3 her. Geben Sie die dazu täglich benötigten Rohstoffe in Liter an.

c) Welchen Gewinn macht der Getränkehersteller wöchentlich, wenn an 5 Tagen pro Woche gearbeitet wird und der Gewinn pro Flasche 5 ct für die Größe G_1, 12 ct für die Größe G_2 und 40 ct für die Größe G_3 beträgt?

Nur zu Prüfzwecken

3 Ein Montagebetrieb stellt aus vier Bauteilen B_1 bis B_4 drei Erzeugnisse E_1, E_2 und E_3 her. Die jeweils pro Erzeugnis benötigten Bauteile sind in Fig. 1 angegeben. Dort stehen ebenso die durchschnittliche Tagesproduktion und der Erlös.

a) Wie viele ME der jeweiligen Bauteile werden pro Tag benötigt?

b) Bestimmen Sie die Kosten der Bauteile für je ein Erzeugnis.

c) Die Fertigungskosten, die Verwaltungs- und Betriebskosten liegen bei ca. 20 GE pro Erzeugnis. Bestimmen Sie die täglich anfallenden durchschnittlichen Kosten.

d) Berechnen Sie den täglichen Gewinn, wenn die Produktion auch tatsächlich verkauft wird.

Bauteil	Bauteile in ME			Kosten je Bauteil in GE
	E_1	E_2	E_3	
B_1	8	8	5	1
B_2	5	7	2	1
B_3	9	6	7	2
B_4	6	6	8	2

Tagesproduktion in ME:

Erzeugnis	E_1	E_2	E_3
Menge	15	18	24

Erlös in GE je ME:

Erzeugnis	E_1	E_2	E_3
Erlös in GE	89	85	84

Fig. 1

4 Bei der Herstellung dreier Brotsorten B_1, B_2 und B_3 werden drei verschiedene Mehlsorten M_1, M_2 und M_3 verwendet. Ihre Anteile je kg sind in Fig. 2 angeführt.

a) Täglich werden 100 B_1, 240 B_2 und 180 B_3 gebacken. Wie viel kg Mehl von jeder Sorte sind dann täglich erforderlich?

Mehlsorte	Mehl in kg je Brot		
	B_1	B_2	B_3
M_1	0,1	0,2	0,6
M_2	0,5	0,2	0,1
M_3	0,1	0,6	0,3

Fig. 2

b) Die Mehlkosten je kg liegen für M_1 bei 0,40 €, bei M_2 bei 0,50 € und bei M_3 bei 0,60 €. Geben Sie die Höhe der Mehlkosten für 1 kg jeder Brotsorte an. Wie hoch sind die täglichen Gesamtausgaben für das Mehl?

c) Es sind noch 712 kg von M_1, 842 kg von M_2 und 532 kg von M_3 in der Bäckerei auf Lager. Wie viele Brote jeder Sorte kann man damit noch backen?

5 Ein kleiner Betrieb stellt aus vier Rohstoffen zwei Salben S_1 und S_2 her. Die Zusammensetzung und die Rohstoffkosten sind in Fig. 3 angegeben.

a) Geben Sie die Rohstoffkosten für jede Salbensorte an.

b) Die Fertigungskosten pro Salbe sind doppelt so hoch wie die entsprechenden Rohstoffkosten.

Rohstoff	Rohstoff in g je Salbe		Preis in ct je g Rohstoff
	S_1	S_2	
R_1	80	80	5
R_2	8	10	50
R_3	6	10	80
R_4	6	0	100

Fig. 3

Die Verwaltungs- und Betriebskosten sind insgesamt 3-mal so hoch wie die Rohstoffkosten. Der Gewinn pro Salbe ist in der Höhe der Rohstoffkosten. Berechnen Sie den Verkaufspreis für S_1 und S_2.

c) Monatlich werden im Mittel 10 000 Stück von S_1 und 20 000 Stück von S_2 verkauft. Berechnen Sie die pro Monat benötigten Rohstoffmengen R_1 bis R_4.

d) Wie hoch sind die monatlichen Rohstoffkosten und der monatliche Gewinn?

e) Die Rohstoffkosten steigen um 10 %. Um wie viel wird die Salbe teurer, wenn die in Aufgabenteil b) genannten Voraussetzungen erhalten bleiben sollen?

f) Durch einen günstigen Einkauf kann der Hersteller die Kosten von R_1 um 20 % senken, die von R_3 um 10 %, während die von R_3 um 12,5 % steigen, die von R_4 sogar um 50 %.
Geben Sie die prozentuale Veränderung der Rohstoffkosten für jede Salbe an.

Bei Aufgabenteil c) ist ein LGS zu lösen.

Nur zu Prüfzwecken

Gleichungssysteme

1 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem rechnerisch und machen Sie die Probe.

a) $\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_2 &= -6 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 - 4x_2 &= -10 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 0{,}5x_1 - 0{,}2x_2 - 3 &= 0 \\ 0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 &= 1{,}5 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} 100x_1 &= 250x_2 + 400 \\ 2x_1 &= -3x_2 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} x_2 &= x_1 - 2 \\ x_1 &= x_2 - 1 \end{aligned}$

2 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem rechnerisch und machen Sie die Probe.

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 16 \\ x_1 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\ -2x_1 - x_2 + 6x_3 &= -8 \\ x_1 - x_3 &= 2 \end{aligned}$

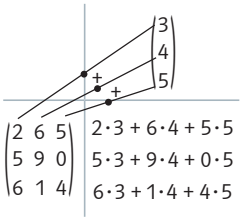
3 Lösen Sie das Gleichungssystem mit GTR oder CAS.

a) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 46 \\ 7x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= -52 \\ 11x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= -40 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 - 7x_2 + 10x_3 &= 2 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 14 \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 &= 19 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -5 \end{aligned}$

4 Lösen Sie das Gleichungssystem durch Matrixumformungen.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zur Erinnerung:
Rechenschema nach Falk:



5 Gegeben ist die Matrix A und der Vektor $\vec{c}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie den Vektor $\vec{b} = A \cdot \vec{c}$.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$.

6 Gegeben ist die Matrix A und der Vektor $\vec{c}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Das Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat unendlich viele Lösungen. Bestimmen Sie unter diesen die spezielle Lösung mit der angegebenen Eigenschaft.

a) Das 3. Element des Lösungsvektors ist 0.

b) Die Summe aus dem 2. und 3. Element des Lösungsvektors ist 0.

Rechnen mit Matrizen

7 Gegeben sind die zwei Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie, wenn dies möglich ist,

a) A + B b) A − B c) 2·A d) 2·A − B e) 10·A + 20·B

8 Berechnen Sie für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) A·B b) B·A c) A^2 d) B − A·B e) (E − B)·(B − E)

9 Klammern Sie einen möglichst großen Faktor aus:

a) $A = \begin{pmatrix} 44 & 22 & 88 \\ 176 & 66 & -22 \\ 154 & -44 & 242 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} b^2 & a \cdot b & b \\ a^2 \cdot b & a \cdot b^2 & b^3 \\ b & b^4 & a^4 \cdot b \end{pmatrix}$

Nur zu Prüfzwecken

10 Gegeben sind die Matrizen $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Matrix X mit $M + X = N$.
b) Berechnen Sie die Matrix X mit $2 \cdot N + X = M - N$.
c) Berechnen Sie X mit $M \cdot X = N$.
d) Bestimmen Sie X mit $M + N = 2 \cdot M - N \cdot X$

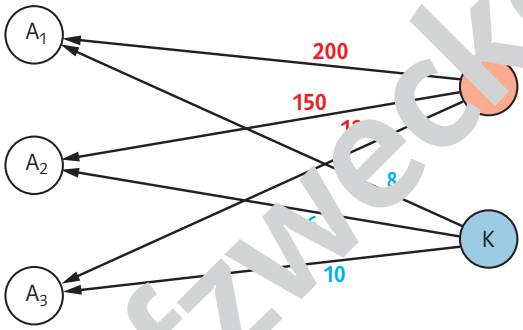
11 Lösen Sie mit den Matrizen von Aufgabe 10 die Matrizengleichung. O ist die Nullmatrix.
a) $M + O \cdot N = M + X$ b) $M - E = X \cdot M - X$ c) $X \cdot (N - E) = M$ d) $(E - N) \cdot X = E$

Beachten Sie:
$X = E \cdot X = X \cdot E$

Produktionsprozesse

12 Eine Anlagenbau-Firma bietet drei Anlagen A_1, A_2 und A_3 an. Die dazu jeweils benötigten Rohre in Meter und Kopplungen sind in Fig. 1 aufgelistet. So werden z. B. für die Installation der Standardanlage A_1 200 m Rohre und 8 Kopplungen benötigt, usw.
a) Erstellen Sie die Matrix A_{RE} und berechnen Sie den Bedarf an Rohren und Kopplungen bei dem nebenstehenden Auftrag.
b) Was kostet jede Anlage, wenn 1 m Rohr 4,50 € und jede Kopplung 9,60 € kostet?
c) Wie hoch sind die Kosten für den gesamten Auftrag?

Bedarf an Kopplungen (K) in Metern und an Rohren (R) in Stück:



Auftrag: $2 \times A_1$; $5 \times A_2$; $4 \times A_3$.

Fig. 1

13 In einem Werk werden drei Produkte E_1 bis E_3 hergestellt. Nach Herstellung durch eine Maschine erfolgt die Qualitätskontrolle, am Ende wird verpackt.
a) Bestimmen Sie die für den Auftrag von Fig. 2 benötigten Maschinen-, Kontroll- und Verpackungszeiten.
b) Die Kosten pro Minute für M, K und V sind gegeben. Bestimmen Sie die Kosten für je 1 ME der drei Erzeugnisse und anschließend die Gesamtkosten des Auftrags.

	Produktionszeit in min von 1 ME		
	E_1	E_2	E_3
Maschine M	10	12	24
Kontrolle K	1	2	5
Verpackung V	1	1	2
Maschinenkosten pro Minute: 4 GE Qualitätskontrolle pro Minute: 6 GE Verpackungskosten pro Minute: 3 GE			
Auftrag	E_1	E_2	E_3
Anzahl	150	300	250

Fig. 2

14 Die Brotsorten B_1, B_2 und B_3 werden aus den Mehlsorten M_1, M_2, M_3 gebacken. (Fig. 3)
a) Es werden täglich 100 Laibe B_1, 240 Laibe B_2 und 180 Laibe B_3 gebacken. Wie viel Kilogramm Mehl jeder Sorte wird benötigt?
b) M_1 kostet 0,40 € je kg, M_2 0,50 € je kg und M_3 0,60 € je kg. Wie hoch sind die täglichen Mehlkosten?
c) Es sind noch 700 kg von M_1, 840 kg von M_2 und 532 kg von M_3 auf Lager. Wie viele Brote lassen sich damit backen? Für wie viele Backtage würde der Vorrat ohne Zukauf ausreichen?

	B_1	B_2	B_3
M_1	0,1	0,2	0,6
M_2	0,5	0,2	0,1
M_3	0,1	0,3	0

Fig. 3

Nur zu Prüfzwecken

Rückblick

Lineare Gleichungssysteme

Beim Gauß-Verfahren löst man ein lineares Gleichungssystem mit 2, 3, 4 und mehr Variablen, indem man es mithilfe von Äquivalenzumformungen auf die Stufenform oder Diagonalenform bringt.

$$\begin{array}{rl}
x_1 + 3x_2 = 5 & \\
2x_1 + 3x_2 = 7 & \text{Zeile 2} - 2 \cdot \text{Zeile 1} \\
\hline
x_1 + 3x_2 = 5 & \\
-3x_2 = -3 & \text{Zeile 2} : (-3) \\
\hline
x_1 + 3x_2 = 5 & \text{Zeile 1} - 3 \cdot \text{Zeile 2} \\
x_2 = 1 & \\
\hline
x_1 \quad = 2 & \text{Zeile 1} + 3 \cdot \text{Zeile 2} \\
x_2 = 1 & \text{Lösung: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Matrizen

Ein Zahlenschema $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit m Zeilen und n Spalten wird als **(m × n)-Matrix A** bezeichnet.

Matrixdarstellung der Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

Matrizen können addiert bzw. subtrahiert werden, wenn sie vom gleichen Format sind.

Die Matrizenmultiplikation lässt sich durchführen, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmt. Die Matrizen dürfen dabei nicht vertauscht werden.

Ein Sonderfall ist das Skalarprodukt – die Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}; \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$$

Nur zu Prüfzwecken

Training

1 Lösen Sie das Gleichungssystem und kontrollieren Sie das Ergebnis mit dem Rechner.

a) $\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 &= -7 \\ x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 17 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 8 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$

2 Lösen Sie das Gleichungssystem. Bestimmen Sie in Aufgabenteil b) einen Lösungsvektor so, dass dessen 2. Element 1 ist.

a) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & -4 \\ 3 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 25 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ -9 \end{pmatrix}$

3 Gegeben sind die Matrizen A, B und C und die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}^T$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{e}^T = (3 \;\; 2)$.

Berechnen Sie, sofern dies möglich ist, die zugehörige Matrix.

a) $A \cdot \vec{d}$ b) $A \cdot B$ c) $B \cdot A$ d) $B \cdot C$ e) $C \cdot B$

f) $\vec{e}^T \cdot C$ g) $B \cdot \vec{d}$ h) $B \cdot \vec{e}^T$ i) A^2 j) B^2

4 Gegeben sind die Matri Bestimmen Sie

a) $A \cdot C$ b) $B \cdot D$ c) $(A + B) \cdot C$ d) $(A - B) \cdot D$ e) $(A - B) \cdot (C + D)$.

5 Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ Bes... mer... ie

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $A^T \cdot A$ d) $B \cdot B^T \cdot ?$ e) $B^4 \cdot A$ f) $(A^T \cdot B)^T$.

6 Für jeden Wert für r ($r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$) ist eine Ma... ... ...rch $A_r = \begin{pmatrix} 0 & r \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Ermitteln Sie, welche besondere Eigenschaft die ...adrate A_r^2 dieser Matrix aufweisen.

7 Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$ und $b \cdot c \neq 0$ soll gelten: $A_2 = b \cdot c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Welche Eigenschaften müssen die E...m... te..., b, c und d aufweisen, damit dies gilt?

8 Fig. 1 gibt an, wie viele Jeanshose... A, B, C und D ein Hosenladen mo...lich verkauft. Der Preis je Stück beträ... für ... 120 €, für B 80 €, für C 160 € und für D ...0 €. Ermitteln Sie den monatlichen ...msa... und den Gesamtumsatz in €.

	A	B	C	D
Mai	200	210	110	240
Juni	220	200	90	260
Juli	190	230	120	220

Fig. 1

9 Ein Unternehmen produziert die Produkte E_1, E_2, E_3 auf den Maschinen M_1, M_2 und M_3. Fig. 2 enthält die Tabellen der Maschinendurchlaufzeiten der Produkte und die Produktionszahlen für die Monate März und April. Berechnen Sie die in den Monaten März und April ... ...ndurchlaufzeiten.

	E_1	E_2	E_3
M_1	10	8	5
M_2	8	7	7
M_3	9	2	8

	E_1	E_2	E_3
März	120	140	80
April	125	140	100

Fig. 2

Nur zur Prüfzwecken

Register

D
Diagonalenform 8

E
Einheitsmatrix 13
Element einer Matrix 13
erweiterte Koeffizientenmatrix 6

F
Falk, Rechenschema nach 18
Format einer Matrix 13

G
Gauß-Verfahren 8
Gleichung, lineare 6

K
Koeffizient 6

L
Lineares Gleichungssystem (LGS) 6
Lösungsmenge 10
Lösungsvektor 6
Lösungsvektor, spezieller 11

M
Matrix 13
Matrix, quadratische 13
Matrixschreibweise eines LGS 7
Matrizenmultiplikation 17

P
Parameter 10
Produktionsvektor 20

R
reduzierte Stufenform 8

S
Skalarmultiplikation 15
Skalarprodukt 17
Spaltenvektor 13
Stufenform 8

V
Vektor, transponierter 13
Verflechtung, lineare 20
Verflechtungsdiagramm 22

Z
Zeilenvektor 13

Nur zu Prüfzwecken

W700512