Zeitdilatation und Längenkontraktion ermitteln

Zeitdilatation Eine Lichtuhr ruht im Inertialsystem S'. Sie bewegt sich mit der Geschwindigkeit v gegenüber einem Inertialsystem S an Uhren vorbei, die in S ruhen und synchronisiert sind. Wenn die Uhr den Ort $x = 0$ passiert, soll in beiden Uhren das Lichtsignal am unteren Spiegel starten (→ **B1**).
Ein zum System S' gehörender Beobachter wird feststellen, dass das Licht nach jeweils $\Delta t'$ reflektiert wird, denn es gilt:

$$c \cdot \Delta t' = d' = d \;\Leftrightarrow\; \Delta t' = \frac{d}{c}$$

da die Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung als gleich gemessen werden. Der gleiche Vorgang wird von einem Beobachter aus dem System S anders beurteilt. Für ihn hat sich die Lichtuhr um die Strecke $v \cdot \Delta t$ nach rechts bewegt und das Lichtsignal hat die Strecke $c \cdot \Delta t$ zurückgelegt. Im System S besteht der Zusammenhang:

$$(c \cdot \Delta t)^2 = d^2 + (v \cdot \Delta t)^2$$

Mit $d = c \cdot \Delta t'$ wird daraus:

$$(c \cdot \Delta t)^2 = (c \cdot \Delta t')^2 + (v \cdot \Delta t)^2;$$ es folgt:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \Delta t' \cdot \gamma$$ wobei

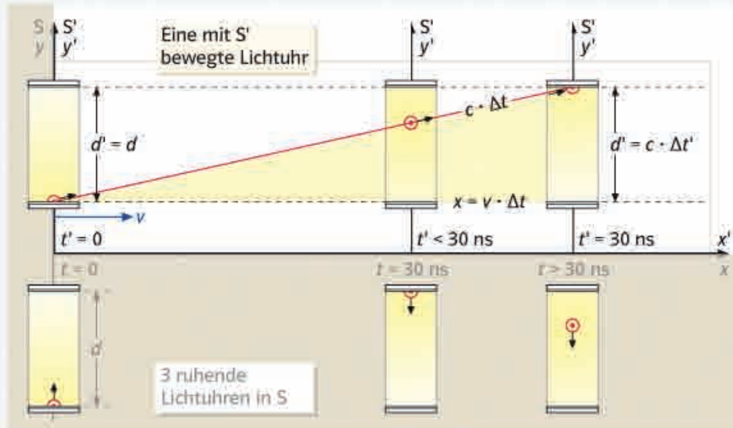
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 1$$ gilt.

Die synchronisierten Uhren in S zeigen für die Zeitspanne zwischen zwei Reflexionen des Lichtsignals in der Uhr von S' eine größere Zeitspanne an. Die bewegte Uhr wird demnach als langsamer gehend beobachtet. Dieser Effekt der **Zeitdilatation** ist symmetrisch. Der Beobachter in S' würde seinerseits eine Uhr in S als langsamer laufend beobachten.

A liest, wenn seine Uhr 1 s anzeigt, auf der vorbeikommenden Uhr von B eine kürzere Zeit ab, der Wert ist gemäß Zeitdilatation $1/\gamma$ (→ **B2**). Multiplikation mit γ, d.h. Strecken von OP mit dem Faktor γ, liefert die 1 auf der t-Achse von B. In Einheiten von A ist also

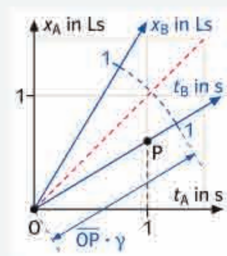
$$\overline{01_B} = \gamma \cdot \overline{OP} = \sqrt{\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Die Lichtsekunde auf der Ortsachse hat die gleiche Länge, weil die Weltlinie von Lichtsignalen die Winkelhalbierende ist.



B1 Zum Zeittakt einer bewegten Lichtuhr

Längenkontraktion Grafik **B3** zeigt die Weltlinien zweier Enden eines Stabes. Die Länge 2 Ls ergibt sich als Differenz der Ortskoordinaten. Es spielt keine Rolle, wann diese ermittelt werden, sie ändern sich mit der Zeit nicht. Man vereinbart: Die Länge eines bewegten Stabes ist die Differenz der Ortskoordinaten der Stabenden zum gleichen Zeitpunkt.



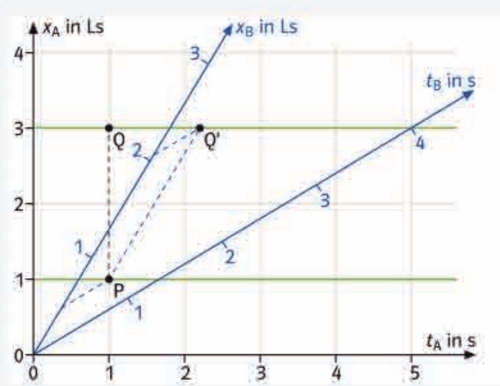
B2 Zeitdilatation im Minkowski-Diagramm

Für den Beobachter B bewegt sich der Stab. Jetzt ergeben die gleichzeitig ermittelten Ortskoordinaten eine kleinere Differenz als 2. Zum gleichen Ergebnis führt die Betrachtung eines Stabes, der bezüglich B ruht.

Ein Körper mit der Ruhelänge l_0 hat in einem System, in dem er sich mit der Geschwindigkeit v parallel zu seiner Ausdehnung bewegt, die verkürzte Länge

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Dieser Effekt ist die **Längenkontraktion**.



Grün: Weltlinien des im System A ruhenden Stabes.

P, Q und Q' sind Ereignisse, die die Stabenden betreffen.

System A: P und Q sind gleichzeitig, die Stablänge ist 2.

System B: P und Q' sind gleichzeitig, die Stablänge ist kleiner als 2.

B3 Längenkontraktion im Minkowski-Diagramm