L

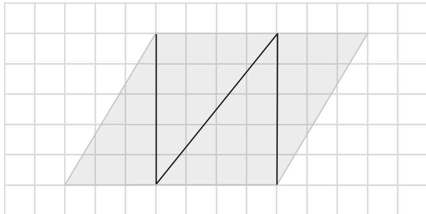
Mit Hilfe der Aufwärmrunde soll möglichst präzise ermittelt werden, welche Inhalte bei den Lernenden noch verfügbar sind, wo auf fundiertes Wissen aufgebaut werden kann und was evtl. einer nochmaligen Grundlegung bedarf. Um eine gewisse Trennschärfe in dieser Lernstandserhebung zu erreichen, sind die Aufgaben differenziert gehalten: linke Spalte eher leichte Aufgaben, rechte Spalte dann schwierigere. Zudem wird für jede Aufgabennummer die angestrebte Kompetenz benannt. So kann diese Seite ein wichtiger Anhaltspunkt sein, um Lernende möglichst angemessen zu fördern.
Smileys sollen dazu anregen, eigene Fähigkeiten und Fertigkeiten allmählich selbst einzuschätzen. Eine aussagekräftige Analyse der Lernvoraussetzungen erhält die Lehrkraft, wenn sie die Ergebnisse mit dem Auswertungsbogen erfasst.

Diese Auswertung kann handschriftlich (K XX) bzw. bei click & teach auch in digitaler Form erfolgen.

K XX

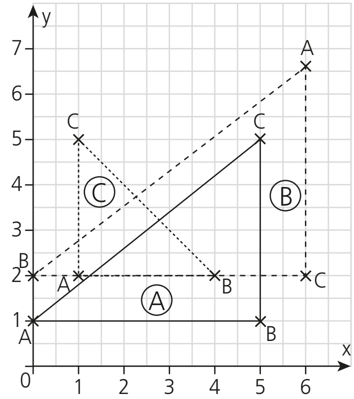
1 Rechtwinklige Dreiecke erkennen

a) A und D sind rechtwinklig

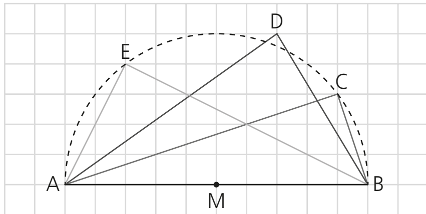
b) 

Individuelle Lösungen möglich

2 Rechtwinklige Dreiecke zeichnen

a) 

b) ABD ist nicht rechtwinklig.



3 Den Satz des Pythagoras verstehen und damit rechnen

a) A $b^2 = a^2 + c^2$
B $a^2 = b^2 + c^2$
C $c^2 = a^2 + b^2$

b)

	rechter Winkel	Seite a	Seite b	Seite c
A	β	4,2 cm	7,4 cm	6,1 cm
B	α	32,3 cm	20,8 cm	24,7 cm
C	γ	75 cm	180 cm	195 cm

4 Den Satz des Pythagoras bei geometrischen Figuren und Körpern anwenden

a) Länge der unteren Seite:
6,5 cm : 2 = 3,25 cm
Abstand x zu den Ecken:
$3{,}25^2 + 5^2 = x^2$
$35{,}5625 = x^2 \quad |\sqrt{}$
$x \approx 6$ (cm)

b) Länge der Diagonalen d_F der vorderen Fläche:
$7{,}1^2 + 8{,}9^2 = d_F^2$
$129{,}62 = d_F^2 \quad |\sqrt{}$
$d_F \approx 11{,}4$ (cm)
Länge der Raumdiagonalen d_R:
$11{,}4^2 + 6{,}4^2 = d_R^2$
$170{,}9 \approx d_R^2 \quad |\sqrt{}$
$13{,}1 \approx d_R$

Z

Auswertungsbogen zur Aufwärmrunde „Trigonometrie"

Einsatzhinweis:
Siehe Erläuterung Lösungsband Seite 5

4 Trigonometrie

Kompetenzerwartungen und Inhalte

M10 Lernbereich 4: Trigonometrie

Die Schülerinnen und Schüler …

- beschreiben die Verhältnisse von Seitenlängen an ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken und erläutern jeweils die Beziehung zwischen Winkelgröße und Seitenlängen unter Verwendung von Sinus, Kosinus und Tangens.
- berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen unter Nutzung der Winkelfunktionen in rechtwinkligen Dreiecken bei Figuren und Körpern.
- lösen Sachaufgaben und berufsorientierende Aufgaben mithilfe der Winkelfunktionen. Dabei erstellen sie ggf. notwendige Skizzen und beschriften diese mit gegebenen Werten und gesuchten Größen.
- veranschaulichen Sinus und Kosinus eines Winkels am Einheitskreis und geben deren Wertebereich an. Sie verwenden die Funktion mit der Gleichung $y = \sin \alpha$ zur Beschreibung von periodischen Vorgängen (z. B. Schwingung eines Pendels).

Jedes neue Kapitel beginnt mit einer Bildaufgabe. Bildliche Darstellungen sind eher offen und engen weniger als textliche Vorgaben ein. So bieten sie die Möglichkeit, verschiedene Aspekte zu sehen, herauszugreifen und zu durchdenken. Vorgegebene Fragen bzw. Aufgaben zeigen dazu einen Weg auf. Mögliche eigene Fragestellungen der Lernenden können Inhalte weiter durchdringen und lassen zudem erkennen, inwieweit Lernende mit solch offenen Situationen umzugehen vermögen.

Einstieg

- **Beschreibe anhand des Bildes Anwendungsmöglichkeiten des Jakobsstabes in der frühen Neuzeit.**
  Man konnte seinen Standort bestimmen oder auch die Höhe von Gebäuden messen.
- **Welche weiteren Einsatzbereiche gab es für den Jakobsstab? Recherchiere im Internet.**
  Individuelle Lösungen sind möglich. Ein weiterer Einsatzbereich des Jakobsstabes war die Seefahrt.
- **Recherchiere ebenso, welche Möglichkeiten es heutzutage gibt, solche Messungen durchzuführen.**
  Individuelle Lösungen sind möglich. Entfernungen können per Laser gemessen werden. In der Seefahrt wird neben elektronischen Kartenplottern immer noch der Sextant zur Kursbestimmung genutzt.

Ausblick

Hier werden kurz und kompetenzorientiert die Inhalte des nachfolgenden Kapitels aufgezeigt. Die Lernenden erhalten so bereits einen ersten Überblick über das, was sie auf den nächsten Seiten lernen.

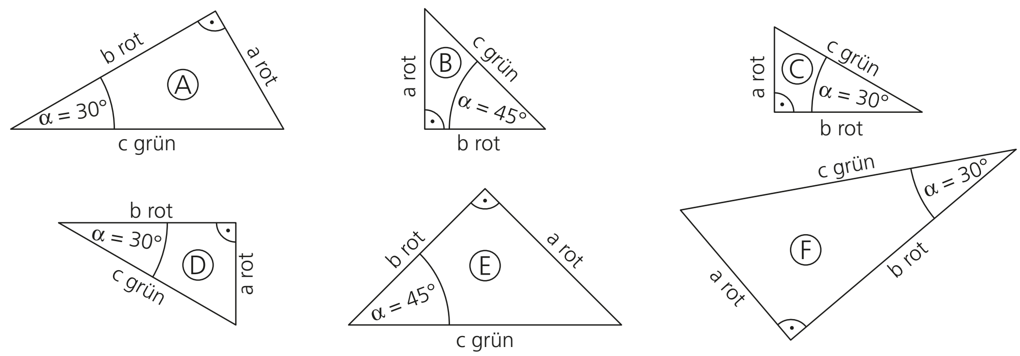
L

Bevor die Lernenden die Winkelfunktionen kennenlernen, beschäftigen sie sich mit den Grundlagen von Dreiecken und mit rechtwinkligen Dreiecken, damit sie auf die folgenden Kapitel vorbereitet sind..

1 a) Ⓐ, Ⓒ, Ⓓ und Ⓕ
Ⓑ und Ⓔ

b) Die entsprechenden Winkel sind gleich groß, wenn man die Dreiecke in die gleiche Richtung dreht.

c)



d) Individuelle Lösungen

2

Dreieck	ABC	ADC	DBE	DEC
Hypotenuse	$\overline{AB}$	$\overline{AC}$	$\overline{DB}$	$\overline{DC}$
Katheten	$\overline{BC}$, $\overline{CA}$	$\overline{AD}$, $\overline{DC}$	$\overline{BE}$, $\overline{DE}$	$\overline{DE}$, $\overline{EC}$

3 a)

Dreieck	ABD	BCE	BCD	BED	BEF	EDF
Hypotenuse	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{CD}$	$\overline{DB}$	$\overline{BE}$	$\overline{ED}$
Katheten	$\overline{BD}$, $\overline{DA}$	$\overline{CE}$, $\overline{EB}$	$\overline{DB}$, $\overline{BC}$	$\overline{BE}$, $\overline{ED}$	$\overline{EF}$, $\overline{FB}$	$\overline{DF}$, $\overline{FE}$

b)

Dreieck	ABM	AMD	BCM	CEM	CDM	EDM	BMF	AFM
Hypotenuse	$\overline{AB}$	$\overline{DA}$	$\overline{BC}$	$\overline{MC}$	$\overline{CD}$	$\overline{DM}$	$\overline{BM}$	$\overline{AM}$
Katheten	$\overline{BM}$, $\overline{MA}$	$\overline{AM}$, $\overline{MD}$	$\overline{CM}$, $\overline{MB}$	$\overline{CE}$, $\overline{EM}$	$\overline{DM}$, $\overline{MC}$	$\overline{ME}$, $\overline{ED}$	$\overline{MF}$, $\overline{FB}$	$\overline{MF}$, $\overline{FA}$

4

Dreieck	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
Ankathete α	2,8 cm	10,0 cm	24,3 cm	10,8 cm
Gegenkathete α	6,4 cm	6,0 cm	15,2 cm	15,5 cm
Ankathete β	6,4 cm	6,0 cm	15,2 cm	15,5 cm
Gegenkathete β	2,8 cm	10,0 cm	24,3 cm	10,8 cm

L

1 a) Unterschiede: Die Längen der entsprechenden Seiten sind nicht gleich.
Gemeinsamkeiten: α ist bei beiden Dreiecken gleich groß und das Verhältnis der Seiten a und c ist jeweils gleich.
b) Erkenntnis, dass die Quotienten richtig berechnet wurden.
c) Es sind individuelle Lösungen möglich. Der Quotient sollte immer 0,6 (gerundet) sein.
d) Es sind individuelle Lösungen möglich. Die Quotienten aus a und c sollen gleich sein.

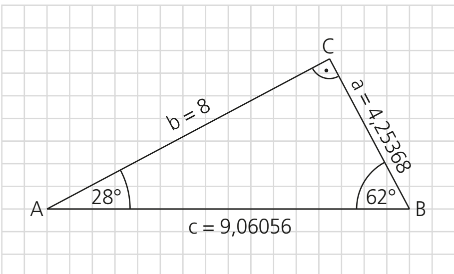
2

Dreieck	A	B	C	D
sin α	$\frac{1{,}6\text{ cm}}{3{,}4\text{ cm}}$	$\frac{7{,}1\text{ cm}}{10\text{ cm}}$	$\frac{3{,}4\text{ cm}}{4{,}9\text{ cm}}$	$\frac{14{,}3\text{ cm}}{25{,}9\text{ cm}}$
sin β	$\frac{3{,}0\text{ cm}}{3{,}4\text{ cm}}$	$\frac{7{,}1\text{ cm}}{10\text{ cm}}$	$\frac{3{,}1\text{ cm}}{4{,}9\text{ cm}}$	$\frac{21{,}5\text{ cm}}{25{,}9\text{ cm}}$

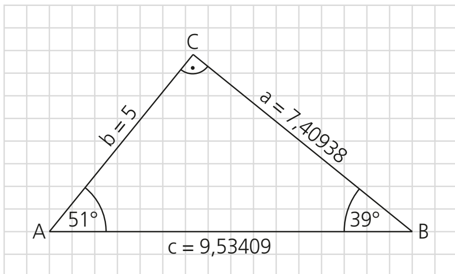
3 Erklärung laut Beispiel.
a) $\sin\alpha \approx 0{,}2588$ b) $\sin\alpha \approx 0{,}1184$ c) $\sin\alpha \approx 0{,}5621$ d) $\sin\alpha \approx 0{,}0419$
e) $\sin\alpha \approx 0{,}9938$ f) $\sin\alpha \approx 0{,}1201$ g) $\sin\alpha \approx 0{,}6947$ h) $\sin\alpha \approx 0{,}9903$
i) $\sin\alpha \approx 0{,}9225$ j) $\sin\alpha \approx 0{,}4051$ k) $\sin\alpha \approx 0{,}7314$ l) $\sin\alpha \approx -0{,}6691$

4 Erklärung laut Beispiel.
a) $\alpha \approx 30°$ b) $\alpha \approx 8{,}6°$ c) $\alpha \approx 15°$ d) $\alpha \approx 71{,}3°$
e) $\alpha \approx 34{,}5°$ f) $\alpha \approx 60°$ g) $\alpha \approx 20{,}4°$ h) $\alpha \approx 8{,}4°$

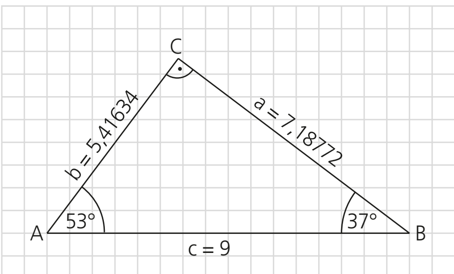
5 Die Länge der Seiten a, b und c ist individuell verschieden, der Wert für den Sinus ist aber gleich.

a)


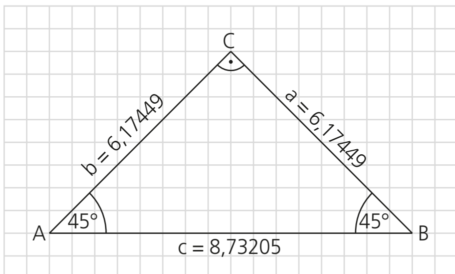
$\sin\alpha \approx 0{,}4695$; $\sin\beta \approx 0{,}9933$

b)


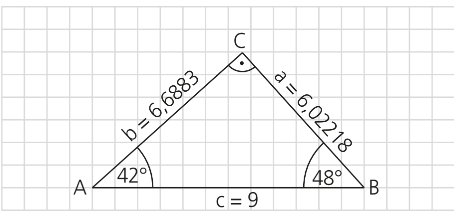
$\sin\alpha \approx 0{,}7771$; $\sin\beta \approx 0{,}6293$

c)


$\sin\alpha \approx 0{,}7986$; $\sin\beta \approx 0{,}6018$

d)


$\sin\alpha \approx 0{,}7071$; $\sin\beta \approx 0{,}7071$

e)


$\sin\alpha \approx 0{,}6691$; $\sin\beta \approx 0{,}7431$

Anhand eines Beispiels wird den Lernenden aufgezeigt, was man unter dem Sinus versteht. Nach Zuordnungsaufgaben in Form von Quotienten rechnen die Schülerinnen und Schüler schließlich Sinus- und Winkelwerte mithilfe des Taschenrechners aus.

Kosinus erkennen und berechnen

Anhand eines Beispiels wird den Lernenden aufgezeigt, was man unter dem Kosinus versteht. Nach Zuordnungsaufgaben in Form von Quotienten rechnen die Lernenden schließlich Kosinus- und Winkelwerte mithilfe des Taschenrechners aus.

L

1 a) Übertragen der Dreiecke ins Heft mit entsprechender farblicher Markierung

b) Ⓐ $\frac{b}{c} = \frac{4{,}8}{5{,}6} \approx 0{,}86$ Ⓑ $\frac{b}{c} = \frac{4{,}2}{4{,}9} \approx 0{,}86$ Ⓒ $\frac{b}{c} = \frac{3}{3{,}5} \approx 0{,}86$

Feststellung: Die Quotienten sind gleich groß.

2

Dreieck	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
cos α	$\frac{8\text{ cm}}{17\text{ cm}}$	$\frac{12\text{ cm}}{13\text{ cm}}$	$\frac{15\text{ cm}}{17\text{ cm}}$	$\frac{4\text{ cm}}{5{,}7\text{ cm}}$
cos β	$\frac{15\text{ cm}}{17\text{ cm}}$	$\frac{5\text{ cm}}{13\text{ cm}}$	$\frac{8\text{ cm}}{17\text{ cm}}$	$\frac{4\text{ cm}}{5{,}7\text{ cm}}$

3 Erklärung laut Beispiel.

a) $\cos\alpha \approx 0{,}9397$ b) $\cos\alpha \approx 0{,}9962$ c) $\cos\alpha \approx 0{,}7660$
d) $\cos\alpha \approx 0{,}2588$ e) $\cos\alpha \approx 0{,}9732$ f) $\cos\alpha \approx 0{,}1994$
g) $\cos\alpha \approx 0{,}9659$ h) $\cos\alpha \approx 0{,}8660$ i) $\cos\alpha \approx 0{,}7071$
j) $\cos\alpha \approx 0{,}2924$ k) $\cos\alpha \approx -0{,}9994$ l) $\cos\alpha \approx 0{,}9986$

4 Erklärung laut Beispiel.

a) $\alpha \approx 63{,}6°$ b) $\alpha \approx 84{,}2°$ c) $\alpha \approx 71{,}3°$ d) $\alpha \approx 27{,}4°$
e) $\alpha \approx 10°$ f) $\alpha \approx 49{,}5°$ g) $\alpha \approx 72{,}5°$ h) $\alpha \approx 60°$

L

1 a) Individuelle Lösung

b) Nicole: $\frac{a}{b} = \frac{7}{9,6} \approx 0,73$

Franziska: $\frac{a}{c} = \frac{4,5}{6,2} \approx 0,73$

Eigenes Dreieck: Der Quotient sollte auch etwa 0,73 sein.

Feststellung: Die Quotienten sind gleich groß.

2

Dreieck	A	B	C	D
tan α	$\frac{6,8\text{ cm}}{9,4\text{ cm}}$	$\frac{6,5\text{ cm}}{5,1\text{ cm}}$	$\frac{17\text{ cm}}{13\text{ cm}}$	$\frac{4,6\text{ cm}}{3,6\text{ cm}}$
tan β	$\frac{9,4\text{ cm}}{6,8\text{ cm}}$	$\frac{5,1\text{ cm}}{6,5\text{ cm}}$	$\frac{13\text{ cm}}{17\text{ cm}}$	$\frac{3,6\text{ cm}}{4,6\text{ cm}}$

3 Erklärung laut Beispiel.

Dreieck	A	B	C
tan α	0,6014	0,7267	0,9009
tan β	1,6627	1,3761	1,1100

4 Erklärung laut Beispiel.

a) $\alpha \approx 26,6°$ b) $\alpha = 45,0°$ c) $\alpha = 35,0°$ d) $\alpha \approx 63,4°$

e) $\alpha \approx 71,6°$ f) $\alpha \approx 68,2°$ g) $\alpha \approx 51,2°$ h) $\alpha \approx 36,9°$

Anhand eines Beispiels wird den Lernenden aufgezeigt, was man unter dem Tangens versteht. Nach Zuordnungsaufgaben in Form von Quotienten rechnen die Lernenden schließlich Tangens- und Winkelwerte mithilfe des Taschenrechners aus.

Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck berechnen

Die Lernenden erschließen verschiedene Seitenlängen mithilfe der Winkelfunktionen in rechtwinkligen Dreiecken. Dabei müssen sie teilweise mehrere Schritte durchlaufen, indem sie beispielsweise die Äquivalenzumformung nutzen.

L

1 Erläuterung: Zuerst hat man beim Sinus alle bekannten Werte eingesetzt. Anschließend wurde so lange umgeformt, bis die Unbekannte auf einer Seite stand.

c:
$$\cos 20° = \frac{4{,}2}{c} \quad | \cdot c$$
$$\cos 20° \cdot c = 4{,}2 \quad | : \cos 20°$$
$$c = \frac{4{,}2}{\cos 20°}$$
$$c \approx 4{,}5 \text{ (cm)}$$

b:
$$\tan 37° = \frac{b}{7{,}6} \quad | \cdot 7{,}6$$
$$\tan 37° \cdot 7{,}6 = b$$
$$b \approx 5{,}7 \text{ (cm)}$$

2

Dreieck	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
	a ≈ 4,8 cm	b ≈ 5,1 cm	c ≈ 8,0 cm	d ≈ 3,5 cm
Dreieck	Ⓔ	Ⓕ	Ⓖ	Ⓗ
	e ≈ 3,7 cm	f ≈ 4,5 cm	g ≈ 4,0 cm	h ≈ 4,5 cm

3

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
a	5,6 cm	3,9 cm	2,6 cm	5,7 cm	18 cm	8,9 cm	7,2 cm	21,5 cm
b	9,8 cm	6,5 cm	9,2 cm	10,2 cm	12,4 cm	16,3 cm	3,9 cm	9,3 cm
c	11,3 cm	7,6 cm	9,6 cm	11,7 cm	21,8 cm	18,5 cm	8,2 cm	23,4 cm
α	29,7°	31°	15,9°	29,3°	55,5°	38,7°	61,4°	66,6°
β	60,3°	59°	74,1°	60,7°	34,5°	61,3°	28,6°	23,4°

4 Berechnung von $|\overline{BD}|$:
$$\cos 35° = \frac{15}{\overline{BD}} \quad | \cdot |\overline{BD}|$$
$$\cos 35° \cdot |\overline{BD}| = 15 \quad | : \cos 35°$$
$$|\overline{BD}| = \frac{15}{\cos 35°}$$
$$|\overline{BD}| \approx 18{,}3$$

Berechnung von $|\overline{AB}|$:
18,3 km – 4 km = 14,3 km

Berechnung von $|\overline{BC}|$:
$$\tan 35° = \frac{\overline{BC}}{15} \quad | \cdot 15$$
$$\tan 35° \cdot 15 = |\overline{BC}|$$
$$10{,}5 \approx |\overline{BC}|$$

Zurückgelegte Strecke:
$2 \cdot |\overline{AB}| + 2 \cdot |\overline{BC}| = 2 \cdot 14{,}3 \text{ km} + 2 \cdot 10{,}5 \text{ km} = 49{,}6 \text{ km}$

5 Unterteilung der Seitenansicht des Lichtkegels in zwei rechtwinklige Dreiecke und Halbierung des Winkels α: $\alpha : 2 = 36° : 2 = 18°$

Berechnung des Kreisradius:
$$\tan 18° = \frac{r}{2{,}56} \quad | \cdot 2{,}56$$
$$\tan 18° \cdot 2{,}56 = r$$
$$0{,}83 \text{ m} \approx r$$
$$\Rightarrow d = 1{,}66 \text{ m}$$

Durchmesser für α = 12°:
d ≈ 0,54 m

6 a) Größe von α:
$\alpha = 90° - 15{,}5° - 23{,}7° = 50{,}8°$

$d_1 = \frac{55}{\cos 50{,}8°} \approx 87{,}02$

$x = \sin 50{,}8° \cdot 87{,}02 \text{ m} \approx 67{,}44 \text{ m}$

$d_2 = \frac{67{,}44}{\cos 15{,}5°} \approx 69{,}98 \text{ m} \Rightarrow$ etwa 70 m vom Ballon zur Turmspitze

b) $\sin 15{,}5° = \frac{k}{d_2} \Rightarrow k \approx 18{,}70 \text{ m}$

$h = 55 \text{ m} - 18{,}70 \text{ m} = 36{,}30 \text{ m}$ (Turmhöhe)

L

1 Erläuterung: Zuerst hat man beim Sinus alle bekannten Werte eingesetzt, bis der Sinuswert bekannt war. Anschließend wurde mithilfe des Taschenrechners die Größe des Winkels berechnet.

γ: $\cos\gamma = \frac{2{,}8}{4}$
$\cos\gamma = 0{,}7$
$\gamma \approx 45{,}6°$

α: $\tan\alpha = \frac{7}{7{,}2}$
$\tan\alpha \approx 0{,}9722$
$\alpha \approx 44{,}2°$

2

Dreieck	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
	$\alpha \approx 53{,}6°$	$\beta \approx 47{,}4°$	$\gamma \approx 43{,}8°$	$\alpha \approx 35{,}7°$

3

Dreieck	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
$\sin\alpha$	0,8	0,6	0,8	0,28
α	53,1°	36,9	53,1	16,3
$\sin\beta$	0,6	0,8	0,6	0,96
β	36,9°	53,1	36,9	73,7
$\cos\alpha$	0,6	0,8	0,6	0,96
$\cos\beta$	0,8	0,6	0,8	0,28
$\tan\alpha$	1,3333	0,5	1,3333	0,2917
$\tan\beta$	0,75	1,3333	0,75	3,4286

4 Ⓐ $\tan\alpha = \frac{7}{12}$
$\alpha \approx 30°$
$\tan\beta = \frac{12}{7}$
$\beta \approx 60°$

Ⓑ $\cos\alpha = \frac{15{,}5}{17}$
$\alpha \approx 24°$
$\gamma = 180 - 2 \cdot \alpha = 132°$

Ⓒ $\sin\alpha = \frac{5{,}5}{6{,}4}$
$\alpha \approx 59°$
$\delta = 180° - \alpha = 121°$

5 $\sin\alpha = \frac{310}{820}$
$\alpha \approx 23°$
Berechnung der fehlenden Kathete l des unteren Dreiecks:
$\cos 23° = \frac{l}{820}$
$l = 820 \cdot \cos 23° \approx 756$ (m)
Berechnung der unteren Kathete g des oberen Dreiecks:
$g = 1\,200 - l = 444$ (m)
Berechnung von β:
$\cos\beta = \frac{g}{511}$
$\beta = 30°$
Berechnung des Höhenunterschieds h_2 von Bergstation und Mittelstation:
$\sin\beta = \frac{h_2}{511}$
$h_2 = \sin\beta \cdot 511 = 256$ m
Berechnung des gesamten Höhenunterschieds:
$h = 256 + 310 = 566$ m

Die Lernenden erschließen verschiedene Winkelgrößen mithilfe der Winkelfunktionen in rechtwinkligen Dreiecken. Dabei müssen sie teilweise mehrere Schritte durchlaufen, indem sie beispielsweise die Äquivalenzumformung nutzen.

6

Figur	a)	b)	c)	d)
Mittelpunkts-winkel	360° : 6 = 60°	360 : 8 = 45°	360° : 9 = 40°	360° : 12 = 30°
halber Mittel-punktswinkel	30°	22,5°	20°	15°
Basiswinkel	180° – 90° – 30° = 60°	180° – 90° – 22,5° = 67,5°	180° – 90° – 20° = 70°	180° – 90° – 15° = 75°
halbe Sehne $\frac{s}{2}$	$\sin 30° = \frac{\frac{s}{2}}{7}$ $\frac{s}{2} = 3{,}5$ cm	$\sin 22{,}5° = \frac{\frac{s}{2}}{7}$ $\frac{s}{2} \approx 2{,}7$ cm	$\sin 20° = \frac{\frac{s}{2}}{7}$ $\frac{s}{2} \approx 2{,}4$ cm	$\sin 15° = \frac{\frac{s}{2}}{7}$ $\frac{s}{2} \approx 1{,}8$ cm
Sehne s	7 cm	5,4 cm	4,8 cm	3,6 cm
Höhe Dreieck	$\tan 30° = \frac{3{,}5}{h}$ $h \approx 6{,}1$ cm	$\tan 22{,}5° = \frac{2{,}7}{h}$ $h \approx 6{,}5$ cm	$\tan 20° = \frac{2{,}4}{h}$ $h \approx 6{,}6$ cm	$\tan 15° = \frac{1{,}8}{h}$ $h \approx 6{,}7$ cm
Flächeninhalt Dreieck	$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6{,}1 \approx 21{,}35\ \text{cm}^2$	$\frac{1}{2} \cdot 5{,}4 \cdot 6{,}5 \approx 17{,}6\ \text{cm}^2$	$\frac{1}{2} \cdot 4{,}8 \cdot 6{,}6 \approx 15{,}8\ \text{cm}^2$	$\frac{1}{2} \cdot 3{,}6 \cdot 6{,}7 \approx 12{,}1\ \text{cm}^2$
Flächeninhalt Vieleck	$21{,}25 \cdot 6 = 128{,}1\ \text{cm}^2$	$17{,}6 \cdot 8 = 140{,}8\ \text{cm}^2$	$15{,}8 \cdot 9 = 142{,}2\ \text{cm}^2$	$12{,}1 \cdot 12 = 145{,}2\ \text{cm}^2$

L

1

Dreieck	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
a	4,5 cm	10 cm	5,9 cm	6 cm
b	5 cm	6 cm	6,6 cm	8,3 cm
c	6,7 cm	11,6 cm	8,9 cm	10,2 cm
α	42°	59°	42°	36°
β	48°	31°	48°	54°

2

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
a	14 cm	12,2 cm	5,5 cm	6 cm	21 cm	9 cm	8,9 cm
b	6,6 cm	23 cm	7,3 cm	13 cm	9,5 cm	6,3 cm	7,7 cm
c	12,4 cm	19,5 cm	9,1 cm	14,3 cm	18,7 cm	11 cm	11,8 cm
α	90°	32°	37°	25°	90°	55°	49°
β	28°	90°	53°	65°	27°	35°	41°
γ	62°	58°	90°	90°	63°	90°	90°

3 a) $\sin 60° = \frac{12{,}5}{x}$
$x \approx 14{,}4$ m

b) $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}95}{2{,}4}$
$\frac{\alpha}{2} \approx 21{,}6°$
$\alpha \approx 43{,}2°$

c) $\cos 52° = \frac{22}{x}$
$x \approx 35{,}7°$

4 a) $\sin 29° = \frac{\frac{f}{2}}{a} = \frac{\frac{f}{2}}{3{,}9} \Rightarrow f \approx 3{,}8$ cm
$\cos 29° = \frac{\frac{e}{2}}{a} = \frac{\frac{e}{2}}{3{,}9} \Rightarrow e \approx 6{,}8$ cm
$\beta = 180° - \alpha = 122°$

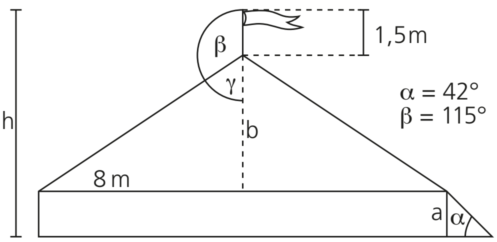
b) $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{e}{2}}{a} = \frac{4{,}1}{5{,}3} \Rightarrow \alpha \approx 101°$
$\beta = 180° - \alpha = 79°$
$a^2 = \left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 \Rightarrow f \approx 6{,}7$ cm

c) $\alpha = 180° - \beta = 56°$
$\sin 28° = \frac{\frac{f}{2}}{a} = \frac{2{,}7}{a} \Rightarrow a \approx 5{,}8$ cm
$\tan 28° = \frac{\frac{f}{2}}{\frac{e}{2}} = \frac{2{,}7}{\frac{e}{2}} \Rightarrow e \approx 10{,}2$ cm

d) $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 \Rightarrow a \approx 4{,}5$ cm
$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{f}{2}}{\frac{e}{2}} = \frac{2}{4} \Rightarrow \alpha \approx 53{,}1°$
$\beta = 180° - \alpha = 126{,}9°$

e) $\alpha = 180° - \beta = 60°$
$\sin 30° = \frac{\frac{f}{2}}{a} = \frac{\frac{f}{2}}{5{,}1} \Rightarrow f = 5{,}1$ cm
$\cos 30° = \frac{\frac{e}{2}}{a} = \frac{\frac{e}{2}}{5{,}1} \Rightarrow e \approx 8{,}8$ cm

5 $\tan 42° = \frac{a}{2{,}2}$
$a \approx 1{,}98$ m
$\gamma = 180° - 115° = 65°$
$\tan 65° = \frac{8}{b}$
$b \approx 3{,}73$ m
Höhe des Zirkuszeltes:
$h = a + b + 1{,}50 \text{ m} = 1{,}98 \text{ m} + 3{,}73 \text{ m} + 1{,}50 \text{ m} = 7{,}21 \text{ m}$



Die Lernenden erschließen verschiedene Streckenlängen und Winkelgrößen mithilfe der Winkelfunktionen in rechtwinkligen Dreiecken. Dabei müssen sie teilweise mehrere Schritte durchlaufen, indem sie beispielsweise die Äquivalenzumformung nutzen. Skizzen sind bei manchen Aufgaben hilfreich.

6 a) Größe des Steigungswinkels α: $\tan \alpha = \frac{10}{100}$

$\alpha \approx 5{,}7°$

Zurückgelegte Strecke s des Autos: $\cos 5{,}7° = \frac{100}{s}$

$s \approx 100{,}5$ m

b) Mit 19 % Steigung hat man einen Höhenunterschied von 19 m bei einem horizontalen Abstand von 100 m.

Größe des Steigungswinkels: $\tan \alpha = \frac{19}{100}$

$\alpha \approx 10{,}8°$

Zurückgelegte Strecke s: $\cos 10{,}8° = \frac{100}{s}$

$s \approx 101{,}8$ m

c) Größe des Steigungswinkels: $\tan \alpha = \frac{8}{100}$

$\alpha \approx 4{,}6°$

Anstieg h: $\sin 4{,}6° = \frac{h}{750}$

$h \approx 60{,}1$ m

7 $\tan 6° = \frac{h}{20}$

$h \approx 2\,102$ m

8 a) Durchschnittlicher Steigungswinkel:

$\sin \alpha = \frac{8}{21} \approx 0{,}381$

$\alpha \approx 22{,}4°$

b) $\tan 22{,}4° = \frac{8}{x}$

$x \approx 19{,}4$ cm

$\frac{8}{19{,}4} \approx 0{,}412 = 41{,}2\,\%$

9 a) $\cos \alpha = \frac{285}{348}$

$\alpha \approx 35°$

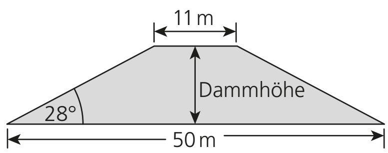
b) $\sin 35° = \frac{x}{348}$

$x \approx 199{,}6$ m

c) $\frac{199{,}6}{285} \approx 0{,}7 = 70\,\%$

10 $\tan 28° = \frac{h}{19{,}5}$

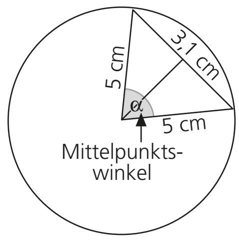
$h \approx 10{,}37$ m



Die Zeichnung stimmt mit der Rechnung überein.

11 $\frac{\cos \alpha}{2} = \frac{3{,}1}{5}$

$\alpha \approx 103{,}4°$



12 $\sin 28° = \frac{d}{45}$

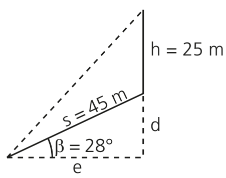
$d \approx 21{,}13$ m

$\cos 28° = \frac{e}{28}$

$e \approx 39{,}73$ m

$\tan \alpha = \frac{h + d}{e} = \frac{25 + 21{,}13}{93{,}73} = 1{,}161$

$\alpha \approx 49{,}3°$



13 $\cos 45° = \frac{a}{d} = \frac{5}{d}$ oder: $\sin 45° = \frac{a}{d} = \frac{5}{d}$

$d \approx 7{,}1$ cm $d \approx 7{,}1$ cm

Pythagoras: $d^2 = a^2 + a^2 = 5^2 + 5^2$

$d \approx 7{,}1$ cm

L

1

	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
$\overline{AB}$	12,1 cm	18,4 cm	11,7 cm	6,8 cm
$\overline{AC}$	5,8 cm	15 cm	9 cm	5,3 cm
$\overline{BC}$	10,6 cm	10,6 cm	7,5 cm	4,2 cm
α	61,3°	35,4°	39,7°	38,8°
β	28,7°	54,6°	50,3°	51,2°

2 Ⓐ Höhe der Vorderseite:

$\tan 29° = \frac{h}{24:2}$

$h \approx 6{,}7$ (cm)

Volumen des Prismas:

$V_P = G \cdot h_k = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \cdot h_k = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 6{,}7 \cdot 5{,}1 \approx 410$ (cm^3)

Ⓑ Flächeninhalt eines unteren Teildreiecks:

$\sin \frac{39°}{2} = \frac{g}{12}$

$g \approx 4$ (cm)

$12^2 = 4^2 + h^2$

$h \approx 11{,}3$ cm

$A_{Teildreieck_{unten}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 11{,}3 = 22{,}6$ (cm^2)

Flächeninhalt eines oberen Teildreiecks:

$\tan \frac{94}{2} = \frac{4}{h}$

$h \approx 3{,}7$ (cm)

$A_{Teildreieck_{oben}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}7 = 7{,}4$ (cm^2)

Volumen des Prismas:

$V_P = (A_{Teildreieck_{unten}} \cdot 2 + A_{Teildreieck_{oben}} \cdot 2) \cdot h_k = (22{,}6 \cdot 2 + 7{,}4 \cdot 2) \cdot 24 = 1\,440$ (cm^3)

Ⓒ Berechnung in mm

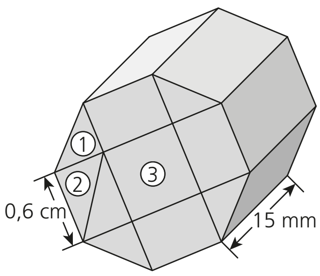
Teilfläche ①: $6^2 = a^2 + a^2$

$a \approx 4{,}24$ (mm)

$A_{①} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}24 \cdot 4{,}24 \approx 9$ (mm^2)

Teilfläche ②: $A_{②} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}24 \cdot 6 = 12{,}72$ (mm^2)

Teilfläche ③: $A_{③} = 6^2 = 36$ (mm^2)



Flächeninhalt der Grundfläche des Körpers:

$A_G = A_{①} \cdot 4 + A_{②} \cdot 8 + A_{③} = 9 \cdot 4 + 12{,}72 \cdot 8 + 36 = 173{,}76$ (mm^2)

Volumen des Prismas:

$V_P = G \cdot h_k = 173{,}76 \cdot 15 = 677{,}76$ (mm^3)

3 Winkelgröße α: $\tan \alpha = \frac{5}{5}$

$\alpha = 45°$

Winkelgröße β: $e^2 = 5^2 + 5^2$

$e \approx 7{,}1$ (cm)

$\tan \beta = \frac{5}{7{,}1}$

$\beta \approx 35{,}2°$

Die Lernenden erschließen verschiedene Streckenlängen und Winkelgrößen bei Körpern. Dabei ist es manchmal hilfreich, wenn sie Skizzen anfertigen.

4 Ⓐ $\cos\frac{50°}{2} = \frac{h_k}{21}$

$h_k \approx 19$ (cm)

$\tan\frac{50°}{2} = \frac{r_G}{19}$

$r \approx 8{,}6$ (cm)

$V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}6^2 \cdot 19 \approx 1\,470{,}8$ (cm^3)

$O = 3{,}14 \cdot 8{,}6^2 + 3{,}14 \cdot 8{,}6 \cdot 21$
$\approx 799{,}3$ (cm^2)

Ⓑ $r = \frac{50}{2} = 25$ (cm)

$\tan 48° = \frac{h}{25}$

$h \approx 27{,}8$ (cm)

$\cos 48° = \frac{25}{s}$

$s \approx 37{,}4$ (cm)

$V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 25^2 \cdot 27{,}8 \approx 18\,185{,}8$ cm^3

$O = 3{,}14 \cdot 25^2 + 3{,}14 \cdot 25 \cdot 27{,}8$
$= 4\,144{,}8$ cm^2

Ⓒ $r = \frac{98}{2} = 49$ (mm)

$\tan 65° = \frac{h}{49}$

$h \approx 105$ (mm)

$\cos 65° = \frac{49}{s}$

$s \approx 115{,}9$ (mm)

$V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 49^2 \cdot 105$
$= 263\,869{,}9$ (mm^3) $\approx 263{,}9$ (cm^3)

$O = 3{,}14 \cdot 49^2 + 3{,}14 \cdot 49 \cdot 115{,}9$
$= 25\,371{,}5$ (mm^2) $\approx 253{,}7$ (cm^2)

Ⓓ $r = \frac{1{,}9}{2} = 0{,}95$ (m) $= 95$ (cm)

$\tan 25° = \frac{h}{95}$

$h \approx 44{,}3$ (cm)

$\cos 25° = \frac{95}{s}$

$s \approx 104{,}8$ (cm)

$V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 95^2 \cdot 44{,}3 \approx 418\,465{,}2$ (cm^3)
$\approx 418{,}5$ (dm^3)

$O = 3{,}14 \cdot 95^2 + 3{,}14 \cdot 95 \cdot 104{,}8$
$\approx 59\,600{,}3$ (cm^2) ≈ 596 (dm^2)

5 a) $\tan 32° = \frac{h}{5{,}45}$

$h \approx 3{,}41$ (m)

b) $V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5{,}45^2 \cdot 3{,}41 \approx 106$ (m^3)

c) $\tan 40° = \frac{h}{5{,}45}$

$h \approx 4{,}57$ (m)

$V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5{,}45^2 \cdot 4{,}57 \approx 142$ (m^3)

d) Berechnung des Radius in Abhängigkeit von der Höhe:

$\tan 40° = \frac{h}{r}$

$r = \frac{h}{\tan 40°}$

Einsetzen in die Formel für das Volumen:

$105 = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{h}{\tan 40°}\right)^2 \cdot h$

$105 = 1{,}05 \cdot \frac{h^2}{0{,}7} \cdot h$

$105 = 1{,}05 \cdot \frac{h^3}{0{,}7}$

$105 = 1{,}5 \cdot h^3 \quad |:1{,}5$

$70 = h^3 \quad |\sqrt[3]{}$

$4{,}12$ (m) $\approx h$

6 Ⓐ Höhe des Trapezes der Grundfläche:

$\tan 69° = \frac{h}{2}$

$h \approx 5{,}21$ (cm)

Einsetzen in die Formel für das Volumen:

$9\,730 = \frac{9+5}{2} \cdot 5{,}21 \cdot 30 \cdot \rho$

$8{,}9 \left(\frac{g}{cm^3}\right) \approx \rho$

Die Säule besteht aus Kupfer.

Ⓑ Aufteilung der Grundfläche mithilfe der Diagonalen in vier gleich große Dreiecke

$\cos\frac{115°}{2} = \frac{h}{8}$

$h \approx 4{,}3$ (cm)

$\sin\frac{115°}{2} = \frac{g}{8}$

$g \approx 6{,}7$ (cm)

$G = \frac{1}{2} \cdot 6{,}7 \cdot 4{,}3 \cdot 4 = 57{,}62$ cm^2

Einsetzen in die Formel für das Volumen:

$4\,060 = 57{,}62 \cdot 25 \cdot \rho$

$2{,}84 \left(\frac{g}{cm^3}\right) \approx \rho$

Die Säule besteht aus Granit oder Aluminium.

L

1 a) $\tan \alpha = \frac{39}{84}$

$\alpha \approx 24{,}9°$

b) $\cos 24{,}9° = \frac{84}{x}$

$x \approx 92{,}6$ (m)

oder:

$\sin 24{,}9° = \frac{39}{x}$

$x \approx 92{,}6$ (m)

$92{,}6 - 84 = 8{,}6$ (m)

Der Weg ist um 8,6 m länger.

2 $\tan 3{,}5° = \frac{65}{x}$

$x \approx 1\,062{,}7$ (m)

3 a) $\tan \alpha = \frac{3{,}8}{3{,}5}$

$\alpha \approx 47{,}4°$

$\tan \beta = \frac{3{,}5}{3{,}8}$

$\beta \approx 42{,}6°$

b) $\cos 47{,}7° = \frac{3{,}5}{e}$

$e \approx 5{,}2$ (cm)

$\tan \gamma = \frac{5{,}2}{2}$

$\gamma \approx 79{,}2°$

4 a) $\tan 21° = \frac{h}{205}$

$h \approx 78{,}69$ (m)

b) $\tan 32° = \frac{78{,}69}{x}$

$x \approx 125{,}93$ (m)

5 a) $\tan 39° = \frac{h}{100}$

$h \approx 80{,}98$ (m)

b) $\tan \alpha = \frac{80{,}98}{60}$

$\alpha \approx 53{,}46$ (m)

c) $\tan 29° = \frac{80{,}98}{x}$

$x \approx 146{,}09$ (m)

6 a) $\tan 47° = \frac{h}{5}$

$h \approx 5{,}36$ (m)

b) Länge der Schräge s_D bis zur Decke

$\sin 47° = \frac{2{,}2}{s_D}$

$s_D \approx 3{,}01$ (m)

Breite der Decke b_D

$b_D = 10 - 2 \cdot \frac{2{,}2}{\tan 47°} \approx 5{,}90$ (m)

Fläche der Innenwände ohne Fenster

$A = 2 \cdot A_{Trapez} + 2 \cdot A_{Seitenwand} - 5{,}2$

$= 2 \cdot \frac{5{,}9 + 10}{2} + 2 \cdot 3{,}01 \cdot 18 - 5{,}2$

$= 119{,}06$ (m^2)

Anzahl der Platten

$119{,}06 : (1{,}50 \cdot 2) \approx 39{,}7 \rightarrow$ etwa 40 Platten

c) $5{,}90 \cdot 18 \cdot 75 = 7\,965$ (€)

Die Lernenden erschließen verschiedene Streckenlängen und Winkelgrößen bei Sachsituationen und bei geometrischen Körpern. Dabei ist es manchmal hilfreich, wenn sie Skizzen anfertigen.

Sinus und Kosinus am Einheitskreis untersuchen

Die Lernenden untersuchen Sinus sowie Kosinus am Einheitskreis und werden sich der Zusammenhänge bewusst.

L

1 a) Gegenkathete von α: $\overline{QP}$
Ankathete von α: $\overline{OQ}$
Länge der Hypotenuse: 1 (entspricht dem Radius des Einheitskreises)
b) Da die Hypotenuse gleich 1 ist, ergibt sich: $\overline{QP} = \sin\alpha$
c) $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{1} \rightarrow \overline{OQ} = \cos\alpha$

2 a)

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
sin α	0,00	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98	1,00
cos α	1,00	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,50	0,34	0,17	0,00

b) Überprüfung durch die Lernenden

3 Betrachtung für den 1. Quadranten
sin α wird größer $\rightarrow$ α wird größer
cos α wird größer $\rightarrow$ α wird kleiner

4 Für $\alpha = 45°$ gilt $\sin\alpha = \cos\alpha$.

5 a) $\sin\alpha = 0{,}4 \rightarrow \alpha = 23{,}6°$
$\cos\alpha = 0{,}4 \rightarrow \alpha = 36{,}9°$
b) $\alpha = 36{,}9°$
$\alpha = 53{,}1°$
c) $\alpha = 64{,}2°$
$\alpha = 25{,}8°$
d) $\alpha = 30°$
$\alpha = 60°$

6

$\alpha = 0°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 90°$
sin α = 0	sin α = 0,7	sin α = 1
cos α = 1	cos α = 0,7	cos α = 0
tan α = 0	tan α = 1	nicht möglich

7
$\alpha = 0°$ cos α = 1
$\alpha = 10°$ cos α = 0,98
$\alpha = 45°$ sin α = 0,71
$\alpha = 60°$ cos α = 0,5
$\alpha = 70°$ sin α = 0,94
$\alpha = 80°$ sin α = 0,98

8 1. Quadrant: $0° \leq \alpha \leq 90°$
2. Quadrant: $90° \leq \alpha \leq 180°$
3. Quadrant: $180° \leq \alpha \leq 270°$
4. Quadrant: $270° \leq \alpha \leq 360°$

9

α	40°	140°	220°	320°
sin α	0,643	0,643	–0,643	–0,643
cos α	0,766	–0,766	–0,766	0,766

In den Quadranten II, III und IV treten auch negative Sinus- und Kosinuswerte auf.

10

	Winkel α	sin α	cos α
I. Quadrant	0° – 90°	+	+
II. Quadrant	90° – 180°	+	–
III. Quadrant	180° – 270°	–	–
IV. Quadrant	270° – 360°	–	+

11 a) IV. Quadrant, Beispiel anhand der Tabelle aus Aufgabe 10
b) III. Quadrant, Beispiel anhand der Tabelle aus Aufgabe 10
c) I. Quadrant, Beispiel anhand der Tabelle aus Aufgabe 10
d) II. Quadrant, Beispiel anhand der Tabelle aus Aufgabe 10

12 ① $\cos 60° = 0{,}5$ Ⓕ
② $\sin 340° = -0{,}3420$ Ⓤ
③ $\sin 158° = 0{,}3756$ Ⓝ
④ $\cos 323° = 0{,}7986$ Ⓚ
⑤ $\sin 244° = -0{,}8988$ Ⓣ
⑥ $\sin 178° = 0{,}0349$ Ⓘ
⑦ $\cos 91° = -0{,}0175$ Ⓞ
⑧ $\cos 345° = 0{,}9659$ Ⓝ

13 a) Sinus und Kosinus ändern sich nicht, wenn man (beliebig oft) eine volle Drehung macht, d.h. 360° zum Winkel addiert.
$\sin \alpha = \sin (360° + \alpha) = \sin (n \cdot 360° + \alpha)$
$\cos \alpha = \cos (360° + \alpha) = \cos (n \cdot 360° + \alpha)$

b) $\sin 410° = 0{,}766 = \sin 50°$
$\cos 410° = 0{,}643 = \cos 50°$

c)

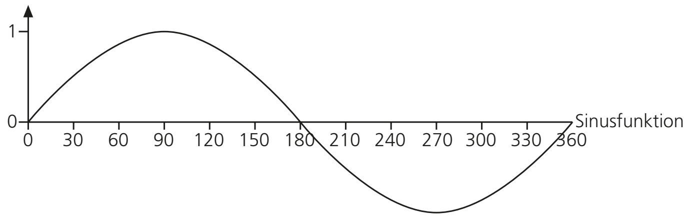
β	370°	520°	410°	590°	700°	685°	790°	820°	1 000°
α	10°	160°	50°	230°	340°	325°	70°	100°	280°
sin α	0,174	0,342	0,766	–0,766	–0,342	–0,574	0,940	0,985	–0,985
cos α	0,985	–0,940	0,643	–0,643	0,940	0,819	0,342	–0,174	0,174

Die Lernenden untersuchen periodische Vorgänge mithilfe der Sinusfunktion und beschreiben sie.

1 a)

α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°
sin α	0,00	0,50	0,87	1,00	0,87	0,50	0,00	–0,50
cos α	1,00	0,87	0,50	0,00	–0,50	–0,87	–1,00	–0,87

α	240°	270°	300°	330°	360°
sin α	–0,87	–1,00	–0,87	–0,50	0,00
cos α	–0,50	0,00	0,50	0,87	1,00

b) 

c) Der Graph der Sinusfunktion veranschaulicht die Abbildung eines Winkels α auf einen Sinus-Wert. Jedem Winkel α wird genau eine Sinus-Wert zugeordnet. Ein und derselbe Wert kann aber zu verschiedenen Winkeln gehören.

d) Maximum: y = 1 bei α = 90°
Minimum: y = –1 bei α = 270°

2 a) 53,1°; 126,9° b) 197,5°; 342,5° c) 90° d) 270°

3 Periodische Umsetzung, d. h. der Graph zwischen 0° und 360° wird einfach an die Stelle von 360° – 720° „kopiert", usw.
mathematisch: sin (n · 360° + α) = sin α
cos (n · 360° + α) = cos α für ganzzahlige Zahlen n

4

	sin α	TR	ges. α
a)	0,13	7,5°	172,5°
b)	0,37	21,7°	158,3°
c)	0,51	30,7°	149,3°
d)	0,89	62,9°	117,1°
e)	–0,05	–2,9°	182,9°
f)	–0,23	–13,3°	193,3°
g)	–0,88	61,6°	241,6°
h)	–0,95	–71,8°	251,8°

5 a) An einem Stock ist ein Becher mithilfe von zwei Seilen so aufgehängt, dass er hin und her pendeln kann. Der Becher ist mit Sand befüllt und unten befindet sich ein Loch, damit Sand nach unten auf ein dunkles Stück Papier fallen kann. Wenn der Becher pendelt und das Papier entlang des Stocks gezogen wird, bildet der Sand eine Sinuskurve ab.

b) Die Lernenden finden Beispiele aus dem Alltag und/oder recherchieren im Internet zum Thema.

1 a) Wenn man die Höhe h halbiert, erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke. So kann man mithilfe des Tangens die Höhe des Baumes bestimmen.

mathematisch: $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{h}{2}}{d}$

$h = 2 \cdot d \cdot \tan \frac{\alpha}{2}$

b) $h = 2 \cdot 24 \cdot \tan \frac{27}{2} \approx 11{,}52$ (m)

2 $h = 2 \cdot 80 \cdot \tan \frac{25}{2} \approx 35{,}47$ (m)

3 $h = 2 \cdot 10 \cdot \tan \frac{20}{2} \approx 3{,}53$ (km)

4 a) Der mit dem Jakobsstab gemessene Winkel hat seinen Scheitelpunkt in Wirklichkeit auf Augenhöhe h_a des Messenden.

b) A $\tan \alpha_1 = \frac{h_a}{d} = \frac{1{,}7}{24}$

$\alpha_1 \approx 4{,}05°$

B $\alpha_1 + \alpha_2 = 27°$

$\alpha_2 = 22{,}95°$

$\tan \alpha_2 = \frac{h_b}{d}$

$h_b = d \cdot \tan \alpha_2 = 24 \cdot \tan 22{,}95° \approx 10{,}16$ (m)

$h = h_a + h_b = 1{,}7 + 10{,}16 = 10{,}86$ (m)

Die Lernenden verstehen, wie die Entfernungsmessung mithilfe des Jakobsstabs funktioniert und sie lösen dazu praktische Aufgaben.

Die wesentlichen Inhalte des Kapitels sind erarbeitet. Inwieweit sind die Schüler darin fit? Wie unterschiedlich ist der Lernstand? Die Zwischenrunde bietet die Möglichkeit, das durch zwei Anforderungsniveaus differenziert zu erfassen. Auch die Schüler können lernen, sich selbst einzuschätzen. Die Lösungen sind dazu im Buch angegeben. Ferner findet sich im Internet ein entsprechender Selbsteinschätzungsbogen. Unter Umständen müssen Inhalte nochmals aufgegriffen werden, um einen gesicherten Wissensstand zu erreichen.

L

1 Sinus erkennen und berechnen

a) $\sin\alpha = \frac{7{,}8}{17{,}8} \to \alpha \approx 26{,}0°$

$\sin\beta = \frac{16}{17{,}8} \to \beta \approx 64{,}0°$

b) $\sin\alpha = \frac{1}{3} \to \alpha \approx 19{,}5°$

$\beta = 180° - 90° - 19{,}5 = 70{,}5°$

2 Kosinus erkennen und berechnen

a) $\cos\alpha = \frac{16}{34} \to \alpha \approx 61{,}9°$

$\cos\beta = \frac{30}{34} \to \beta \approx 28{,}1°$

b) $\cos\alpha = \frac{2}{3} \to \alpha \approx 48{,}2°$

$\beta = 180° - 90° - 48{,}2 = 41{,}8°$

3 Tangens erkennen und berechnen

a) $\tan\alpha = \frac{5}{7} \to \alpha \approx 35{,}5°$

$\tan\beta = \frac{7}{5} \to \beta \approx 54{,}5°$

b) $\tan 37° = \frac{x}{4{,}2}$

$x \approx 3{,}2$ (cm)

4 Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck berechnen

a) Ⓐ $\cos 56° = \frac{a}{7{,}4} \to a \approx 4{,}1$ (cm)

$\sin 56° = \frac{b}{7{,}4} \to b \approx 6{,}1$ (cm)

Ⓑ $\sin 62° = \frac{a}{9{,}1} \to b \approx 8{,}0$ (cm)

$\cos 62° = \frac{b}{9{,}1} \to b \approx 4{,}3$ (cm)

b) $\cos \frac{42°}{2} = \frac{h}{2{,}5}$

$h \approx 2{,}3$ (m)

5 Winkelgrößen im rechtwinkligen Dreieck berechnen

a) $\cos\beta = \frac{11{,}4}{16{,}8}$

$\beta \approx 47{,}3°$

b) $\tan\alpha = \frac{58}{196} \to \alpha \approx 16{,}5°$

6 Streckenlängen und Winkelgrößen bei Figuren berechnen

a) $\beta = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = 104°$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{e}{2}}{a} \to a \approx 5{,}2$ (cm); $a = d$

$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{e}{2}}{b} \to b \approx 8{,}6$ (cm); $b = c$

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{e}{2}}{f_{ABD}} \to f_{ABD} \approx 3{,}4$ (cm)

$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{e}{2}}{f_{BCD}} \to f_{BCD} \approx 7{,}7$ (cm)

$f = f_{ABD} + f_{BCD} = 11{,}1$ (cm)

b) Seitenlänge a:

$10 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot a$

5 (cm) = a

Winkel α:

$\tan\alpha = \frac{5}{4}$

$\alpha \approx 51{,}3°$

7 Streckenlängen und Winkelgrößen bei Körpern berechnen

a) Höhe des Kegels:

$\tan 65° = \frac{h_K}{0{,}6}$

$h \approx 1{,}29$ (m)

b) Kantenlänge a des Würfels $_{\cos}$

$34{,}7° = \frac{a}{14{,}6} \rightarrow a \approx 12$ (cm)

Grundfläche des Teilkörpers: $_G$

$= \frac{1}{2}a^2 = 72\ (\text{cm}^2)$

Volumen des Teilkörpers:

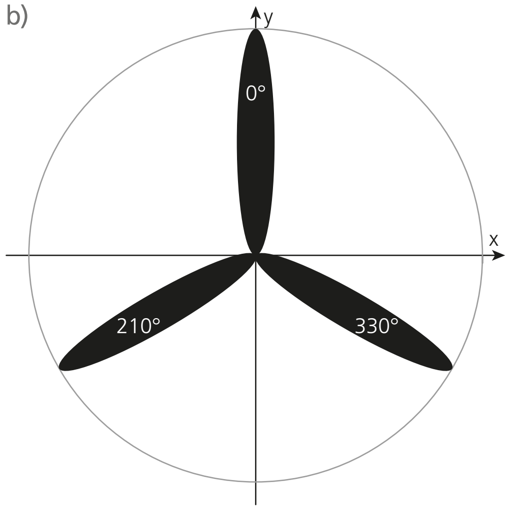
$V = G \cdot a = 72 \cdot 12 = 864\ (\text{cm}^3)$

8 Sinus und Kosinus am Einheitskreis untersuchen

a) Ⓐ III. Quadrant: Beispiel: $\alpha = 190°$

Ⓑ I. Quadrant: Beispiel: $\alpha = 45°$

b)



Oberes Blatt:

$\alpha = 90°$

$\sin 90° = 1$

$\cos 90° = 0$

linkes Blatt:

$\alpha = 210°$

$\sin 210° = -0{,}5$

$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}87$

rechtes Blatt:

$\alpha = 330°$

$\sin 330° = -0{,}5$

$\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$

Z

Selbsteinschätzungsbogen

Erhältlich unter www.ccbuchner.de/medien (60014 – 006)

Diese beiden Seiten dienen dem Üben und Vertiefen der neuen Lerninhalte. Dabei sollen die Lernenden überwiegend eigenständig arbeiten. Um das zu ermöglichen, wird zum einen das Merkwissen „Auf einen Blick“ nochmals in der linken Spalte zusammengefasst, zum anderen stehen die Lösungen am Ende des Buches zur Selbstkontrolle zur Verfügung.

L

1 a)

Ankathete β	o
Gegenkathete β	n
Hypotenuse β	p
Ankathete γ	n
Gegenkathete γ	o
Hypotenuse γ	p

Ankathete δ	l
Gegenkathete δ	k
Hypotenuse δ	m
Ankathete ε	k
Gegenkathete ε	l
Hypotenuse ε	m

b)

	Sinus	Kosinus	Tangens
β	$\frac{n}{p}$	$\frac{o}{p}$	$\frac{n}{o}$
γ	$\frac{o}{p}$	$\frac{n}{p}$	$\frac{o}{n}$
δ	$\frac{k}{m}$	$\frac{l}{m}$	$\frac{k}{l}$
ε	$\frac{l}{m}$	$\frac{k}{m}$	$\frac{l}{k}$

c) Seitenlängen: n = 3,1 cm, o = 1,9 cm, p = 3,6 cm, k = 2,3 cm, l = 3,1 cm, m = 3,9 cm
$\sin\beta \approx 0{,}8517$; $\cos\beta \approx 0{,}5240$; $\tan\beta \approx 1{,}625$
$\sin\gamma \approx 0{,}5240$; $\cos\gamma \approx 0{,}8517$; $\tan\gamma \approx 0{,}6154$
$\sin\delta \approx 0{,}5892$; $\cos\delta \approx 0{,}7949$; $\tan\delta \approx 0{,}7419$
$\sin\varepsilon \approx 0{,}7949$; $\cos\varepsilon \approx 0{,}5892$; $\tan\varepsilon \approx 1{,}3472$
Abweichungen sind durch Messungenauigkeiten möglich.

d) $\beta \approx 58{,}4°$; $\gamma \approx 31{,}6°$; $\delta \approx 36{,}1°$; $\varepsilon \approx 53{,}9°$

2 a) $\sin 41° = \frac{h}{7{,}1} \rightarrow h \approx 4{,}7$ (cm)
$A = \frac{1}{2} \cdot 9{,}6 \cdot 4{,}7 \approx 22{,}56$ (cm²)

b) $\sin 37° = \frac{h}{4{,}3} \rightarrow h \approx 2{,}6$ (cm)
$A = 10{,}4 \cdot 2{,}6 \approx 27{,}04$ (cm²)

3 $\sin 1° = \frac{12}{b} \rightarrow b \approx 687{,}58$ (m)

4 a) $\tan\alpha = \frac{320}{450} \rightarrow \alpha \approx 35{,}4°$

b) $\sin 35{,}4° = \frac{320}{|\overline{AC}|} \rightarrow |\overline{AC}| \approx 552{,}4$ (m)

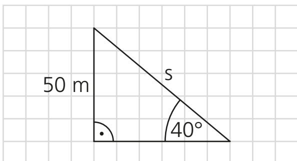
c) $\tan 35{,}4° = \frac{|\overline{DB}|}{170} \rightarrow |\overline{DB}| \approx 120{,}8$ (m)

auch mit $\cos\alpha$ möglich

5 a) $\sin 78° = \frac{h}{2{,}20} \rightarrow h \approx 2{,}15$ (m)

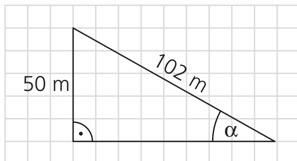
b) $\tan 37° = \frac{h}{\frac{3{,}5}{2}} \rightarrow h \approx 1{,}32$ (m)

6 a)



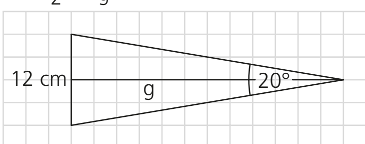
$\sin 40° = \frac{50}{s}$
$s \approx 77{,}8$ (m)

b)

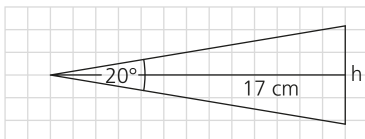


$\sin\alpha = \frac{50}{102}$
$\alpha \approx 29{,}4°$

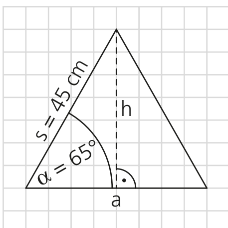
7 a) $\tan\frac{20}{2} = \frac{\frac{12}{2}}{g} \rightarrow g \approx 34$ (cm)



b) $\tan\frac{20}{2} = \frac{\frac{h}{2}}{17} \rightarrow h \approx 6$ (cm)

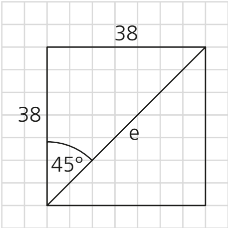


8 a) $\cos 65° = \frac{\frac{a}{2}}{45} \rightarrow a \approx 38$ (cm)

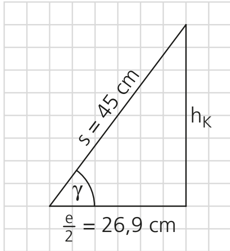


b) $\sin 65° = \frac{h}{45} \rightarrow h \approx 40{,}8$ (cm)

c) $\sin 45° = \frac{38}{e} \rightarrow e \approx 53{,}7$ (cm)



d) $\cos \gamma = \frac{\frac{53{,}7}{2}}{45} \rightarrow \gamma \approx 53{,}3°$



e) $\sin 53{,}3° = \frac{h_K}{45} \rightarrow h_K \approx 36{,}1$ cm

f) $O = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = 38^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 38 \cdot 40{,}8$
$= 4\,544{,}8$ (cm^2)

9 $\sin 70 = \frac{h_k}{4} \rightarrow h_k \approx 3{,}76$ (cm)

$\cos 70 = \frac{r}{4} \rightarrow r \approx 1{,}37$ (cm)

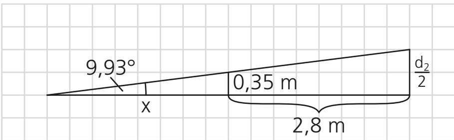
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_k = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}37^2 \cdot 3{,}76 = 7{,}39$ (cm^3)

Gewicht: $7{,}39 \cdot 16{,}4 \approx 121{,}20$ (g)

10 Länge der Straße innerhalb des Grundstücks: 720 : 8 = 90 (m)

$\sin \alpha = \frac{45}{90} \rightarrow \alpha = 30°$

11 a)



Abstand b zu Rad 1:

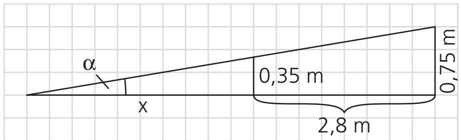
$\tan 9{,}93° = \frac{\frac{0{,}7}{2}}{x} \rightarrow x \approx 2$ m

Größe von d_2:

$\tan \alpha = \frac{\frac{d_2}{2}}{x + a}$

$\tan 9{,}93° = \frac{\frac{d_2}{2}}{2 + 2{,}8} \rightarrow d_2 \approx 1{,}68$ m

b)



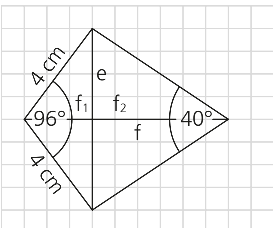
Strahlensatz:

$\frac{0{,}35}{0{,}75} = \frac{x}{x + 2{,}8} \Rightarrow x = 2{,}45$ (m)

$\tan \alpha = \frac{0{,}35}{2{,}45}$

$\alpha \approx 8{,}13°$

12 a)



$\sin 48° = \frac{\frac{e}{2}}{4} \rightarrow e \approx 5{,}94$ (cm)

$\cos 48° = \frac{f_1}{4} \rightarrow f_1 \approx 2{,}68$ (cm)

$\tan 20° = \frac{2{,}97}{f_2} \rightarrow f_2 \approx 8{,}16$ (cm)

$f = f_1 + f_2 = 10{,}84$ (cm)

Grundfläche:

$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

$A = \frac{1}{2} \cdot 5{,}94 \cdot 10{,}84 \approx 32{,}19$ (cm^2)

Volumen:

$V = 32{,}19 \cdot 150 = 4828{,}5$ (cm^3)

b) $A_{Sechseck} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot 6$

$A_{Sechseck} = \frac{4{,}6^2}{4}\sqrt{3} \cdot 6 \approx 54{,}98$ (cm^2)

$V = 54{,}98 \cdot 180 = 9896{,}4$ (cm^3)

Die Abschlussrunde bietet die Möglichkeit, am Ende einer Einheit den Lernstand zu erheben und gegebenenfalls Maßnahmen zu ergreifen, um Defizite zu beheben. Sollte die Lehrkraft eine Testung unabhängig vom Schulbuch wünschen, stehen in click & teach Klassenarbeiten zur Verfügung.

L

1 a) $\alpha \approx 54{,}55°$ b) $\alpha \approx 53{,}97°$ c) $\alpha \approx 66{,}63°$
d) $\alpha \approx 108{,}35°$ e) $\alpha \approx 20{,}20°$ f) $\alpha \approx 164{,}67°$

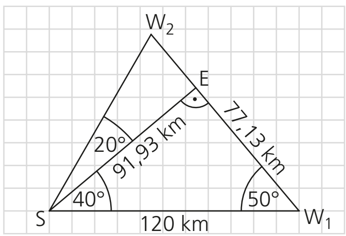
2 a) $\tan 26° = \frac{x}{5} \rightarrow x \approx 2{,}44$ (cm) b) $\cos\beta = \frac{6}{8} \rightarrow \beta \approx 41{,}4°$
c) $\sin 39° = \frac{4}{x} \rightarrow x \approx 6{,}36$ (cm) d) $\tan\alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \alpha \approx 31{,}0°$

3 a) $\tan 32° = \frac{x + 8}{50}$
$x \approx 23{,}24$ (cm)

b) Böschungswinkel:
$\sin\alpha = \frac{4{,}5}{18{,}6}$
$\alpha = 14°$
$\tan 14° = \frac{4{,}5}{s_1}$
$s_1 \approx 18{,}05$ (m)
$\sin\beta = \frac{4{,}5}{10{,}3}$
$\beta = 25{,}9°$
Länge Deichsohle:
$\tan 25{,}9° = \frac{4{,}5}{s_3}$
$s_3 \approx 9{,}27$ (m)
$s = 18{,}05 + 6 + 9{,}27 = 33{,}32$ (m)

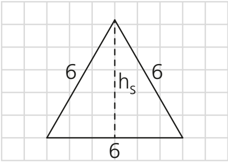
4 a) $\cos 50° = \frac{|\overline{EW_1}|}{120} \rightarrow |\overline{EW_1}| \approx 77{,}13$ km
$\sin 50° = \frac{|\overline{ES}|}{120} \rightarrow |\overline{ES}| \approx 91{,}93$ km
Dreiecksflugstrecke: $120 + 77{,}13 + 91{,}93 = 289{,}06$ km

b)



$\tan(20°) = \frac{|\overline{EW_2}|}{91{,}93} \rightarrow |\overline{EW_2}| \approx 33{,}46$ km
$\cos(20°) = \frac{91{,}93}{|\overline{SW_2}|} \rightarrow |\overline{SW_2}| \approx 97{,}83$ km
Steckenlänge insgesamt:
$120 + 77{,}13 + 33{,}46 + 97{,}83 = 328{,}42$ (km)
Streckenunterschied:
$328{,}42 - 289{,}06 = 39{,}36$ (km)
Die vorgesehene Flugstrecke ist 39,36 km länger.

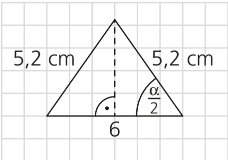
5 a) Berechnung der Höhe der Seitenfläche:



$6^2 = 3^2 + h_s^2$

$\Rightarrow h_s \approx 5{,}2$ (cm)

Berechnung von α:



$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5{,}2} \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 54{,}77$

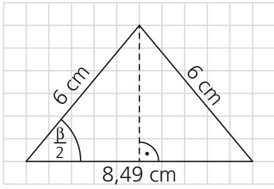
$\alpha \approx 109{,}54°$

b) Berechnung der Diagonale der Grundfläche:

$d^2 = 2 \cdot 6^2$

$\Rightarrow d \approx 8{,}49$ (cm)

Berechnung von β:



$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{4{,}25}{6}$

$\beta \approx 89{,}80°$

6 a) $\sin 30{,}26° = \frac{h_1}{6\,946}$

$h_1 \approx 3\,500$ (m)

$\sin 39{,}87° = \frac{h_2}{5\,000}$

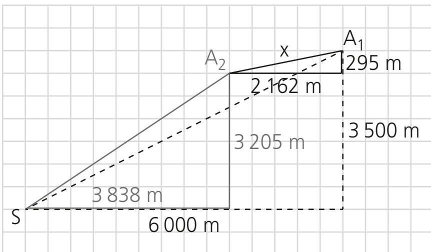
$h_2 \approx 3\,205$ (m)

b) $\cos 30{,}26° = \frac{g_1}{6\,946}$

$g_1 \approx 6\,000$ (m)

$\cos 39{,}87° = \frac{g_2}{5\,000}$

$g_2 \approx 3\,838$ (m)



Geflogene Strecke x:

$x_2 = 2\,162^2 + 295^2$

$\Rightarrow x \approx 2\,182$ (m)

Geschwindigkeit v:

$v = \frac{2\,182}{5} = 436{,}4 \left(\frac{m}{s}\right) = 1\,571{,}04 \left(\frac{km}{h}\right)$

L

Die Seiten „Kreuz und quer" greifen im Sinne einer permanenten Wiederholung Lerninhalte früher behandelter Kapitel auf und sichern so nachhaltig Basiskompetenzen.

Zahlen und Operationen

1 a) $2^{10} \cdot 2^{-3} = 2^7 = 128$ b) $4^{-7} \cdot 4^{-3} = 4^{-10} \approx 0{,}00000095$ c) $3^8 \cdot 3^{-8} = 3^0 = 1$
d) $15^{-9} : 15^{-7} = 15^{-2} = \frac{1}{225}$ e) $6^2 : 6^{-2} = 6^4 = 1\,296$ f) $11^{-4} : 11^{-4} = 11^0 = 1$
g) $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$ h) $\sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{64} = 2$ i) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} = \sqrt[3]{8} = 2$

2 a) $x^5 \cdot y^5 = (xy)^5$ b) $x^4 : x^2 = x^2$ c) $a^3 : a^{-3} = a^6$
d) $(x^2)^3 = x^6$ e) $(y-2)^4 = y^{-8}$ f) $(a-3)^{-5} = a^{15}$

3 a)
$W_n = W_0 \cdot q^n$
$4\,100 = 3\,227 \cdot q^{11}$ $\quad | : 3\,227$
$1{,}27 \approx q^{11}$ $\quad | \sqrt[11]{\ }$
$1{,}0220 \approx q$
$p = q - 1$
$= 1{,}0220 - 1 = 0{,}0220 \approx 2{,}20\,\%$

b) Ⓐ $W_n = W_0 \cdot q^n$
$= 1\,000 \cdot 2^{2,5}$
$\approx 5\,657$ (Bakterien)
Ⓑ $10\,000 = 1\,000 \cdot 2^n$ $\quad | : 1\,000$
$10 = 2^n$
$\frac{\log 10}{\log 2} = n$
$3{,}322 \approx n$
Verzehnfachung nach ca. 3 h 19 min

Raum und Form

1 Kegel: $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h_K$ | $A = r^2 \cdot \pi$ | $A = r \cdot \pi \cdot s$ | $A = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$

Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_K$ | $A = a^2$ | $A = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$

2 Beispiel:
kleine Kugel $r = 1$
große Kugel $r = 4$
① richtig ② falsch ③ richtig ④ richtig

Größen und Messen

1

	a)	b)	c)	d)	e)
r (cm)	3	1	8,3	5,2	4
d (cm)	6	2	16,6	10,4	8
u (cm)	18,8	6,3	52,1	32,7	25,2
V (cm^3)	113,0	4,19	2 393,9	600	267,9
O (cm^2)	113,0	12,6	856	339,6	201,0

2 a) Berechnung Außenradius r_1:
$u = 2 \cdot r_1 \cdot 3{,}14$
$8{,}4 = 2 \cdot r_1 \cdot 3{,}14$
$\Rightarrow r_1 = 1{,}34$ (m)

Berechnung Innendurchmesser r_2:
$r_2 = 1{,}34 - 0{,}15$
$= 1{,}19$

Berechnung Fassungsvermögen:
$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$
$= \frac{4}{3} \cdot 1{,}19^3 \cdot 3{,}14$
$\approx 7{,}055\ (m^3) = 7\,055$ l

b) Berechnung Kugelradius:

$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$

$5\,000 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot 3{,}14$

$\Rightarrow r = 10{,}6$ (m)

Berechnung Oberflächeninhalt Kugel:

$O = d^2 \cdot \pi$

$= (2 \cdot 10{,}6)^2 \cdot 3{,}14$

$= 1\,411$ (m^2)

Berechnung benötigter Stoff bei 4 % Verschnitt:

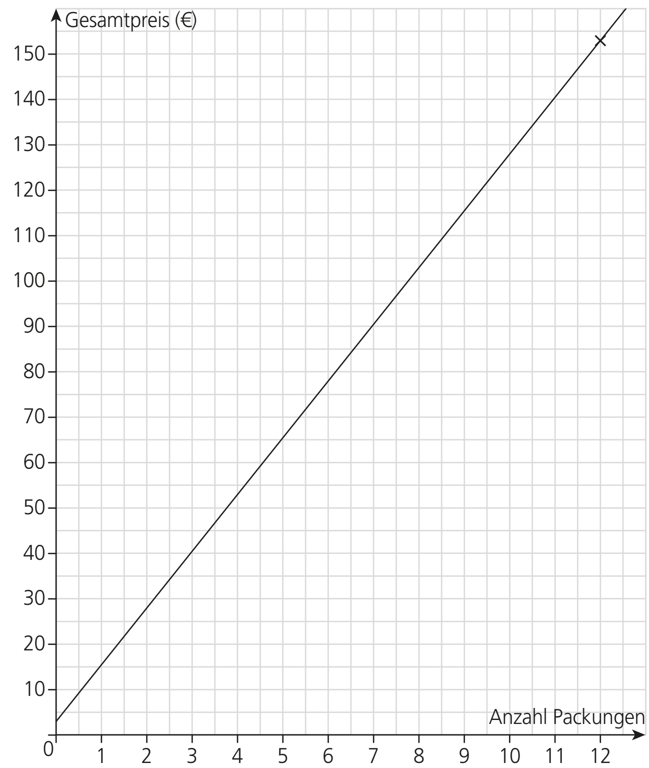
$1\,411 \cdot 1{,}04 \approx 1\,468$ (m^2)

Funktionale Zusammenhänge

1 a)

Anzahl Packungen	2	4	7	12
Gesamtpreis (€)	28	53	90,50	153

b)



Funktionsgleichung: $y = 12{,}5x + 3$

2 a) Funktionsgleichung: $y = \frac{72}{x}$

Anzahl der Arbeiter	Arbeitszeit je Arbeiter	Gesamtarbeitszeit (h)
12	6 h	72
9	8 h	72
16	4,5 h	72

b) Funktionsgleichung: $y = \frac{32}{x}$

a	b	Flächeninhalt Rechteck
8 cm	4 cm	32 cm^2
16 cm	2 cm	32 cm^2
12,8 cm	2,5 cm	32 cm^2