3 Körper

Auftaktseiten — Seiten 56, 57

Seite 56

1 Schätzungen: individuelle Schülerlösungen
Reihenfolge Volumen:
Kegel
Pyramide
Dreieckprisma
Kugel
Zylinder

2 Würfel: Kantenlänge a
Quader: Kantenlängen a, b, c
Zylinder: Radius r, Höhe h
Pyramide: je nach Grundfläche Kantenlängen sowie Höhe h
Kegel: Radius r und Höhe h
Kugel: Radius r
Prisma: Je nach Grundfläche Kantenlängen und Höhe h

Seite 57

3 Mögliche Lösung:
Sushi: Zylinder
Durch das Rollen von Reis in Algenblättern entsteht bei der Herstellung automatisch ein Zylinder.
Nudeln (Rigatoni): Hohlzylinder
Durch die spezielle Form können die Nudeln gut Soße aufnehmen und garen schnell.
Cocktailglas = Kegel
Die Oberfläche ist groß, so dass sich gut Dekoration anbringen lässt, gleichzeitig ist das Volumen recht gering.
Eis = Kugel und Waffel = Kegel
Die Eiskugel entsteht durch das Herausnehmen mit dem Eislöffel, und sie passt gut in eine offen Kegelform.
Sandwichtoast = Dreieckprisma
Der praktische Nutzen ist gering, aber die Form ist optisch ansprechend.
Pralinen = Kugel
Kugelförmige Pralinen können gut in Kakao, Zucker oder anderen puderförmigen Substanzen gewälzt werden
Geschenkschachtel = Sechseckprisma
Es lassen sich z. B. gut kugelförmige Pralinen unterbringen, außerdem eignet sich die Form gut für eine Geschenkschleife.
Dominosteine (Süßigkeit) = Würfel
Bei der Herstellung werden drei verschiedene Zutaten geschichtet und anschließend geschnitten. So entsteht eine Würfelform.
Teebeutel = Pyramide
Bei minimaler Oberfläche (die sich in ein Netz aufklappen lässt) entsteht maximales Volumen, sodass der Tee sich gut im Wasser ausbreiten kann.

1 Prisma. Zylinder — Seiten 58, 59

Seite 58

Einstieg

→ Prismenförmig sind die drei roten Kerzen im hinteren Teil des Bildes, außerdem die weiße herzförmige und die weiße sternförmige Kerze im vorderen Teil des Bildes.
Zylinderförmig sind die dünne weiße und die dicke orange Kerze, rechts von der Bildmitte.
→ Individuelle Lösungen
→ Individuelle Lösungen

1 a) Volumen V:
$V = G \cdot h$
$V = \pi r^2 \cdot h$
$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 6$
$V = 169{,}6$

Oberflächeninhalt O:
$O = 2G + M$
$O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$
$O = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 6$
$O = 169{,}6$

Das Volumen des Zylinders beträgt ca. $169{,}6\,cm^3$, der Oberflächeninhalt ca. $169{,}6\,cm^2$.

b) (1) Volumen V:
$V = G \cdot h$
$V = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b \cdot h$
$V = \frac{1}{2} \cdot 7{,}6 \cdot 5{,}7 \cdot 4{,}3$
$V = 93{,}138$
(2) Länge der Hypotenuse c der dreieckigen Grundfläche:
$c = \sqrt{5{,}7^2 + 7{,}6^2}$
$c = 9{,}5\,cm$
(3) Oberflächeninhalt O:
$O = 2G + M$
$O = 2 \cdot \frac{1}{2} b\,h_b + (a + b + c) \cdot h$
$O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7{,}6 \cdot 5{,}7 + (5{,}7 + 7{,}6 + 9{,}5) \cdot 4{,}3$
$O = 141{,}36$
Das Volumen des Zylinders beträgt ca. $93{,}14\,cm^3$, der Oberflächeninhalt $141{,}36\,cm^2$.

Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

2 a) $V = G \cdot h$

$70{,}0 = 17{,}5 \cdot h \quad |:17{,}5$

$h = 4$

Die Höhe des Prismas beträgt 4,0 cm.

b) $O = 2G + u \cdot h$

$294 = 2 \cdot a \cdot b + (2a + 2b) \cdot h$

$294 = 2 \cdot 6 \cdot 7 + (2 \cdot 6 + 2 \cdot 7) \cdot h$

$294 = 84 + 26h \quad |-84$

$210 = 26c \quad |:26$

$h = 8{,}1$

Die Höhe des Prismas beträgt etwa 8,1 cm.

c) $O = 2G + M$

$O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

$164{,}9 = 2\pi \cdot 2{,}5^2 + 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot h$

$164{,}9 = 39{,}27 + 5\pi \cdot h \quad |-39{,}27$

$125{,}63 = 5\pi \cdot h \quad |:(5\pi)$

$h = 8{,}0$

Die Höhe des Prismas beträgt etwa 8,0 cm.

d) $V = G \cdot h$

$V = \frac{1}{2} a \cdot ha \cdot h$

$243{,}6 = \frac{1}{2} \cdot 7{,}0 \cdot 5{,}8 \cdot h$

$243{,}6 = 20{,}3 \cdot h \quad |:20{,}3$

$h = 12$

Die Höhe des Prismas beträgt 12,0 cm.

Hinweis zu d):

Die Länge der Seite b wird nicht benötigt.

Seite 59

A (1) Trapezprisma

$V = G \cdot h$

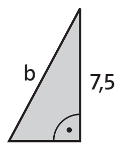
$V = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h_T \cdot h$

$V = \frac{1}{2} \cdot (14 + 6) \cdot 7{,}5 \cdot 20 = 1500$

Das Volumen des Trapezprismas beträgt 1500 cm^3.

$O = 2 \cdot G + M$

$O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h_T + u \cdot h$



(14 − 6) : 2 = 4

b berechnen:

$b^2 = 7{,}5^2 + 4^2 \quad |\sqrt{\ }$

$b = \sqrt{7{,}5^2 + 4^2}$

$b = 8{,}5$ cm

$O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (14 + 6) \cdot 7{,}5 + (2 \cdot 8{,}5 + 14 + 6) \cdot 20$

$= 890$

Der Oberflächeninhalt des Trapezprismas beträgt 890 cm^2.

(2) Zylinder:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$3817 = \pi \cdot r^2 \cdot 15 \quad |:15 \quad |:\pi$

$81{,}0 = r^2 \quad |\sqrt{\ }$

$9{,}0 = r$

Der Radius der Grundfläche beträgt 9,0 cm.

$O = 2 \cdot G + M$

$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$O = 2 \cdot \pi \cdot 9^2 + 2 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 15 = 1357{,}17$

Der Oberflächeninhalt des Zylinders beträgt 1357,2 cm^2.

Seite 59, links

3 a) A: Dreieckprisma

(1) Volumen V:

$V = G \cdot h$

$V = \frac{1}{2} a\, b\, h$

$V = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2{,}5$

$V = 15$

Das Volumen beträgt 15,0 cm^3.

(2) Länge der Hypotenuse c der dreieckigen Grundfläche:

$c = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$c = 5$ cm

(3) Oberflächeninhalt O:

$O = 2G + M$

$O = 2 \cdot \frac{1}{2} ab + (a + b + c) \cdot h$

$O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 + (3 + 4 + 5) \cdot 2{,}5$

$O = 42$

Der Oberflächeninhalt beträgt 42,0 cm^2.

B: Zylinder

(1) Volumen V:

$V = G \cdot h$

$V = \pi r^2 \cdot h$

$V = \pi \cdot 2{,}1^2 \cdot 2$

$V = 27{,}7$

Das Volumen beträgt 27,7 cm^3.

(2) Oberflächeninhalt O:

$O = 2G + M$

$O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

$O = 2\pi \cdot 2{,}1^2 + 2\pi \cdot 2{,}1 \cdot 2$

$O = 54{,}1$

Der Oberflächeninhalt beträgt 54,1 cm^2.

C: Trapezprisma

(1) Volumen V:

$V = G \cdot h$

$V = \frac{1}{2} (a + c) \cdot h_T \cdot h$

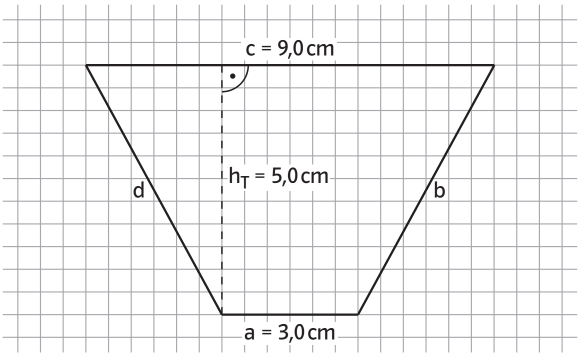
$V = \frac{1}{2} (3 + 9) \cdot 5 \cdot 4$

$V = 30 \cdot 4$

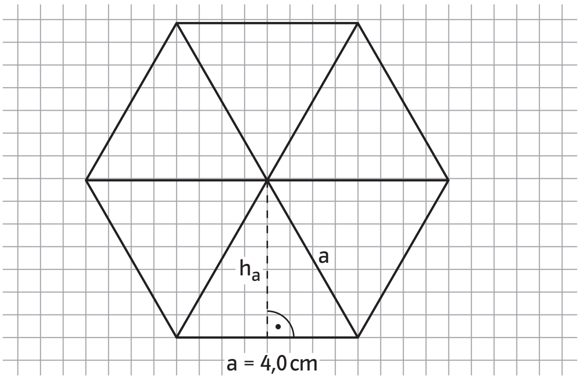
$V = 120$

Das Volumen beträgt 120,0 cm^3.

(2) Länge der zwei nicht angegebenen Seiten b bzw. d des symmetrischen Trapezes:

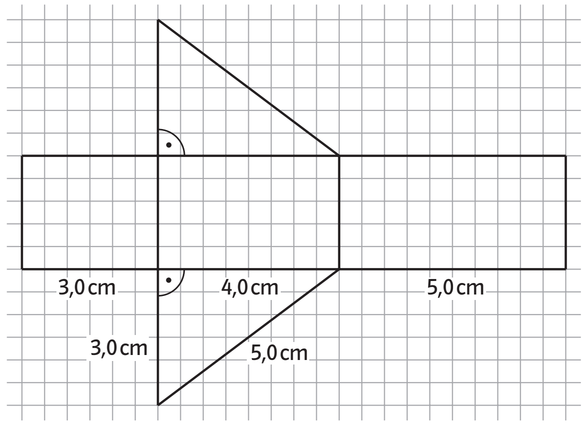


$b = d = \sqrt{\left(\frac{9-3}{2}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{3^2 + 5^2}$
$b = d = 5{,}83\,\text{cm}$
(3) Oberflächeninhalt O:
$O = 2G + u \cdot h$
$O = 2 \cdot 30 + (3 + 5{,}83 + 9 + 5{,}83) \cdot 5$
$O = 178{,}3$
Der Oberflächeninhalt beträgt $178{,}3\,\text{cm}^2$.
D: Sechseckprisma
(1) Länge der Höhe h_a eines der gleichschenkligen Basisdreiecke:

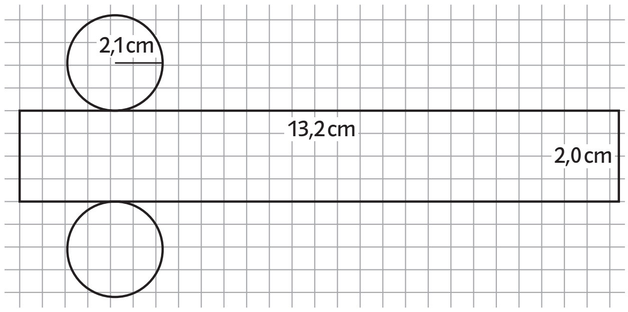


$h_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_a = \sqrt{4^2 - 2^2}$
$h_a = 3{,}46\,\text{cm}$
(2) Volumen V:
$V = G \cdot h$
$V = 6 \cdot \frac{1}{2}\, a\, h_a \cdot h$
$V = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}46 \cdot 5$
$V = 41{,}52 \cdot 6$
$V = 207{,}6$
Das Volumen beträgt $207{,}6\,\text{cm}^3$.
(3) Oberflächeninhalt O:
$O = 2G + u \cdot h$
$O = 2 \cdot 41{,}52 + 6 \cdot 4 \cdot 6$
$O = 227{,}04$
Der Oberflächeninhalt beträgt etwa $227{,}0\,\text{cm}^2$.
b) Mögliche Lösung:
(Maßstab 1 : 1)

A



B $u = 2\pi \cdot r$
$u = 2\pi \cdot 2{,}1$
$u = 13{,}2\,\text{cm}$



4 a) Der Körper besteht aus einem Trapezprisma, welches auf einem Mantelrechteck liegt und einem Quader.
(1) Volumen V:
$V = V_{Prisma} + V_{Quader}$
$V = \frac{1}{2}(6 + 10) \cdot 4 \cdot 6 + 6^2 \cdot 4$
$V = 336$
Das Volumen beträgt $336{,}0\,\text{cm}^3$.
(2) Länge der zwei nicht angegebenen Seiten b bzw. d des symmetrischen Trapezes:
$b = d = \sqrt{\left(\frac{10-6}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{2^2 + 4^2}$
$b = d = 4{,}47\,\text{cm}$
(3) Der Oberflächeninhalt kann man entweder als Summe der Flächeninhalte der außenliegenden Flächen berechnen, oder indem man aus der Summe der gesamten Oberflächeninhalte der zwei Körper zweimal den Flächeninhalt der verdeckten Fläche abzieht.
Oberflächeninhalt O:
$O = 2 \cdot \frac{1}{2}(6 + 10) \cdot 4$
$+ (10 + 4{,}47 + 4 + 6 + 4 + 4{,}47) \cdot 6$
$O = 261{,}64$
Der Oberflächeninhalt beträgt etwa $261{,}6\,\text{cm}^2$.
b) Der Körper besteht aus einem Zylinder, aus dem ein Dreieckprisma herausgeschnitten wurde.

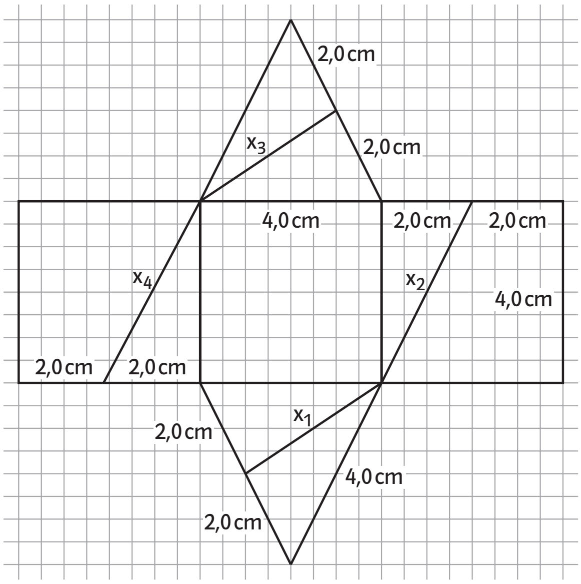
(1) Volumen V:
$V = V_{Zylinder} - V_{Prisma}$
$V = \pi r^2 h - \frac{1}{2} a h_a h$
Höhe h_a des gleichseitigen Dreiecks:
$h_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_a = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2}$
$h_a = 4{,}33\,cm$
$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4{,}33 \cdot 4$
$V = 270{,}9$
Das Volumen beträgt $270{,}9\,cm^3$.
(2) Oberflächeninhalt O:
Aus dem Flächeninhalt des Zylinders wird zweimal der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks abgezogen; hinzu kommt der Mantelflächeninhalt des Prismas. Es gilt:
$O = O_{Zylinder} - 2 \cdot A_{Dreieck} + M_{Dreieckprisma}$
$O = 2G + 2\pi r h - 2 \cdot \frac{1}{2} a h_a + 3 a h$
$O = 2\pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 5 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4{,}33 + 3 \cdot 5 \cdot 4$
$O = 321{,}1$
Der Oberflächeninhalt beträgt $321{,}1\,cm^2$s

5 Volumen V:
$V = 2 \cdot V_1 + V_2$
$V = 2 \cdot \pi\, r_1^2\, h_1 + \pi\, r_2^2\, h_2$
$V = 2 \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 8 + \pi \cdot 2^2 \cdot 22$
$V = 1533{,}1\,cm^3$
Gewicht der Hantel:
$1533{,}1 \cdot 7{,}95 = 12\,188{,}145$
$12\,188\,g \approx 12{,}2\,kg$
Die Hantel wiegt etwa 12,2 kg.

Seite 59, rechts

3 Das Glashaus ist ein Fünfeckprisma, welches auf einem der Mantelrechtecke steht. Dieses Mantelrechteck wird bei dem Oberflächeninhalt nicht berücksichtigt (u beinhaltet daher nur die Seitenlängen von vier Mantelrechtecken).
Das Fünfeckprisma kann in zwei Trapeze zerlegt werden, die zueinander symmetrisch sind.
Oberflächeninhalt O (mit Metallschienen):
$O = 2G + u\,h$
$O = 2 \cdot 2 \cdot A_{Trapez} + u\,h$
Berechnung der Seitenlängen l_{Dach} der Dachrechtecke:
$l_{Dach} = \sqrt{(2 - 1{,}2)^2 + 1^2}$
$l_{Dach} = 1{,}28\,m$
$O = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 + 1{,}2) \cdot 1 + (1{,}2 + 2 \cdot 1{,}28 + 1{,}2) \cdot 2{,}5$
$O = 18{,}8\,m^2$
Da die Metallschienen 3 % der Oberfläche ausmachen, gilt:
$O_{Glas} = 0{,}97 \cdot O$
$O_{Glas} = 0{,}97 \cdot 15{,}6$
$O_{Glas} = 15{,}132$
Die Glasfläche ist etwa $15{,}13\,m^2$ groß.

4 a) Maßstab 1 : 1



b) (1) Streckenzug l:
Die Längen x_1 und x_3 sind Höhen im gleichseitigen Grundflächendreieck mit Seitenlänge $a = 4{,}0\,cm$, daher gilt:
$x_1 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$x_1 = \sqrt{4^2 - 2^2}$
$x_1 = x_3 = 3{,}46\,cm$
Länge von x_2 bzw. x_4:
$x_2 = \sqrt{4^2 + 2^2}$
$x_2 = x_4 = 4{,}47\,cm$
Damit erhält man:
$l = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
$l = 2 \cdot 3{,}46 + 2 \cdot 4{,}47$
$l = 15{,}86$
Der rote Streckenzug ist etwa 15,9 cm lang.
(2) Volumen V:
$V = G\,h$
$V = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}46 \cdot 4$
$V = 27{,}68$
Das Volumen beträgt ca. $27{,}7\,cm^3$.
(3) Oberflächeninhalt O:
$O = 2G + u\,h$
$O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}46 + 3 \cdot 4 \cdot 4$
$O = 61{,}84$
Der Oberflächeninhalt beträgt ca. $61{,}8\,cm^2$.

5 Mögliche Lösung:
Zylinder: d = 4 cm; h = 4 cm
Würfel: a = 4 cm

$V_{Zyl} = \pi r^2 h$ $V_W = a^3$
$V_{Zyl} = \pi \cdot 2^2 \cdot 4$ $V_W = 4^3$
$V_{Zyl} = 50{,}27\,cm^3$ $V_W = 64\,cm^3$

Volumenverhältnis:

$\frac{V_W - V_{Zyl}}{V_W} = \frac{64 - 50{,}27}{64} = 0{,}215 = 21{,}5\,\%$

Bei einer Länge von 4 cm ist das Volumen des Zylinders um ca. 21,5 % kleiner als das Volumen des Würfels.

Allgemein:

Zylinder: $d = h = x$, also $r = \frac{1}{2}x$ (x in cm)

Würfel: $a = x$ (x in cm)

Man erhält:

$V_{Zyl} = \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 x$

$V_{Zyl} = \frac{\pi}{4} x^3$ $V_W = x^3$

Damit erhält man:

$\frac{V_W - V_{Zyl}}{V_W} = \frac{x^3 - \frac{\pi}{4}x^3}{x^3}$. ((Punkte am Ende?))

$\frac{V_W - V_{Zyl}}{V_W} = \frac{x^3\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{x^3}$.

$\frac{V_W - V_{Zyl}}{V_W} = 1 - \frac{\pi}{4} = 0{,}215 = 21{,}5\,\%$

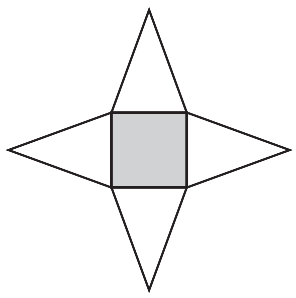
Es ergibt sich der gleiche Wert: Das Volumen des Zylinders ist also immer um ca. 21,5 % kleiner als das Volumen des Würfels.

2 Pyramide Seiten 60, 61

Seite 60

Einstieg

→



Beispielrechnung Oberflächeninhalt O:

$a = 3{,}0\,cm$; Dreieckshöhe $h_s = 6{,}0\,cm$

$O = a^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\,a\,h_s$

$O = 3^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$

$O = 27\,cm^2$

→ Berechnung mit dem Satz des Pythagoras für $a = 3{,}0\,cm$ und $h = 6{,}0\,cm$ (Beispiel oben):

$h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h = \sqrt{6^2 - 1{,}5^2}$

$h = 5{,}8\,cm$

Individuelle Messungen

→ Volumen V:

$V = \frac{1}{3} G h$

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 6$

$V = 18$

Das Volumen der Pyramide beträgt $18\,cm^3$.

Seite 61

1 a) Volumen V:

$V = \frac{1}{3} G h$

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 7{,}5$

$V = 160$

Das Volumen der Pyramide beträgt $160\,cm^3$.

Oberflächeninhalt O:

$O = G + M$

$O = a^2 + 2\,a\,h_s$

h_s berechnen:

$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_s = \sqrt{7{,}5^2 + 4^2}$

$h_s = 8{,}5\,cm$

$O = 8^2 + 2 \cdot 8 \cdot 8{,}5$

$O = 200$

Der Oberflächeninhalt beträgt $200\,cm^2$.

b) Volumen V: Höhe h berechnen

$V = \frac{1}{3} G h$ $h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$V = \frac{1}{3} a^2 h$ $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12$

$V = 400$

Das Volumen der Pyramide beträgt $400\,cm^3$.

Oberflächeninhalt O:

$O = G + M$

$O = a^2 + 2\,a\,h_s$

$O = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 13$

$O = 360$

Der Oberflächeninhalt beträgt $360\,cm^2$.

c) Volumen V: Höhe h berechnen

$V = \frac{1}{3} G h$ $h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$V = \frac{1}{3} a^2 h$ $h = \sqrt{18{,}4^2 - 6{,}4^2}$

$V = \frac{1}{3} \cdot 12{,}8^2 \cdot 17{,}25$ $h = 17{,}25$

$V = 942{,}08$

Das Volumen der Pyramide beträgt etwa $942{,}1\,cm^3$.

Oberflächeninhalt O:

$O = G + M$

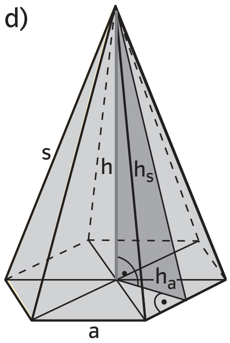
$O = a^2 + 2\,a\,h_s$

$O = 12{,}8^2 + 2 \cdot 12{,}8 \cdot 18{,}4$

$O = 634{,}88$

Der Oberflächeninhalt beträgt etwa 634,9 cm².

d)



Volumen V:

$V = \frac{1}{3}\,G\,h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}\,a\,h_a \cdot h$

$V = a \cdot h_a \cdot h$

$V = 5 \cdot 4{,}33 \cdot 8$

$V = 173{,}2$

h_a berechnen

$h_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_a = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2}$

$h_a = \sqrt{18{,}75} = 4{,}33$

Das Volumen der Pyramide beträgt 173,2 cm³.

Oberflächeninhalt O:

$O = G + M$

$O = 6 \cdot \frac{1}{2}\,a\,h_a + 6 \cdot \frac{1}{2}\,a\,h_s$

$O = 3\,a \cdot h_a + 3\,a\,h_s$

$O = 3 \cdot 5 \cdot 4{,}33 + 3 \cdot 5 \cdot 9{,}1$

$O = 201{,}45$

h_s berechnen:

$h_s = \sqrt{h^2 + {h_a}^2}$

$h_s = \sqrt{8^2 + 18{,}75}$

$h_s = 9{,}10$

Der Oberflächeninhalt der Pyramide beträgt etwa 201,5 cm².

2 a) Höhe h der Pyramide:

$h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h = \sqrt{22{,}1^2 - 8{,}5^2}$

$h = 20{,}4\text{ cm}$

Oberflächeninhalt O:

$O = G + M$

$O = a^2 + 2\,a\,h_s$

$O = 17^2 + 2 \cdot 17 \cdot 22{,}1$

$O = 1040{,}4$

Der Oberflächeninhalt beträgt 1040,4 cm².

Volumen V:

$V = \frac{1}{3}\,G\,h$

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 17^2 \cdot 20{,}4$

$V = 1965{,}2$

Das Volumen beträgt 1965,2 cm³.

b) Seitenlänge a der Grundfläche:

$\frac{a}{2} = \sqrt{s^2 - h_s^2}$

$\frac{a}{2} = \sqrt{5{,}3^2 - 4{,}5^2}$

$\frac{a}{2} = 2{,}8$

$a = 5{,}6\text{ cm}$

Höhe h:

$h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h = \sqrt{4{,}5^2 - 2{,}8^2}$

$h = 3{,}52\text{ cm}$

Oberflächeninhalt O:

$O = a^2 + 2\,a\,h_s$

$O = 5{,}6^2 + 2 \cdot 5{,}6 \cdot 4{,}5$

$O = 81{,}76$

Der Oberflächeninhalt beträgt 81,76 cm².

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 5{,}6^2 \cdot 3{,}52$

$V = 36{,}80$

Das Volumen beträgt 36,80 cm³.

c) Höhe h der Pyramide:

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$48 = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot h \qquad | \cdot 3 \quad |:4^2$

$9 = h$

$h = 9\text{ cm}$

Höhe h_s der Seitenflächen:

$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_s = \sqrt{9^2 + 2^2}$

$h_s = 9{,}22\text{ cm}$

Oberflächeninhalt O:

$O = a^2 + 2\,a\,h_s$

$O = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 9{,}22$

$O = 89{,}76$

Der Oberflächeninhalt beträgt etwa 89,8 cm².

d) Seitenlänge a der Grundfläche:

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$165 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 8{,}8 \qquad | \cdot 3 \quad |:8{,}8$

$56{,}25 = a^2 \qquad |\sqrt{\ }$

$7{,}5 = a$

$a = 7{,}5\text{ cm}$

Höhe h_s der Seitenflächen:

$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_s = \sqrt{8{,}8^2 + 3{,}75^2}$

$h_s = 9{,}57\text{ cm}$

Oberflächeninhalt O:

$O = a^2 + 2ah_s$

$O = 7{,}5^2 + 2 \cdot 7{,}5 \cdot 9{,}57$

$O = 199{,}8$

Der Oberflächeninhalt beträgt etwa $199{,}8\,cm^2$.

e) Höhe h_s der Seitenflächen:

$O = a^2 + 2ah_s$

$156{,}8 = 8^2 + 2 \cdot 8 \cdot h_s \quad | -8^2$

$92{,}8 = 16h_s \quad |:16$

$5{,}8 = h_s$

$h_s = 5{,}8\,cm$

Höhe h:

$h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h = \sqrt{5{,}8^2 - 4^2}$

$h = 4{,}2\,cm$

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 4{,}2$

$V = 89{,}6$

Das Volumen beträgt $89{,}6\,cm^3$.

Seite 61

A a) Seitenflächenhöhe h_s:

$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h_s^2 = 7^2 + 2{,}4^2 \quad | \sqrt{\ }$

$h_s = 7{,}4\,cm$

V berechnen:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 4{,}8^2 \cdot 7 = 53{,}76$

Das Volumen der quadratischen Pyramide beträgt $53{,}8\,cm^3$.

O berechnen:

$O = G + M$

$O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s$

$O = 4{,}8^2 + 2 \cdot 4{,}8 \cdot 7{,}4 = 94{,}08$

Der Oberflächeninhalt der quadratischen Pyramide beträgt $94{,}1\,cm^2$.

b) Körperhöhe h:

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$408 = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot h$

$408 = 48h \quad |:48$

$h = 8{,}5\,cm$

Seitenflächenhöhe h_s:

$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h_s^2 = 8{,}5^2 + 6^2 \quad | \sqrt{\ }$

$h_s = 10{,}4\,cm$

O berechnen:

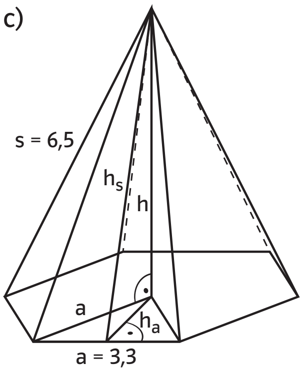
$O = G + M$

$O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s$

$O = 12^2 + 2 \cdot 12 \cdot 10{,}4 = 393{,}6$

Der Oberflächeninhalt der quadratischen Pyramide beträgt $393{,}6\,cm^2$.

c)



Körperhöhe h:

$h^2 + a^2 = s^2$

$h^2 + 3{,}3^2 = 6{,}5^2 \quad | -3{,}3^2$

$h^2 = 6{,}5^2 - 3{,}3^2 \quad | \sqrt{\ }$

$h = 5{,}6\,cm$

Seitenflächenhöhe h_s:

$h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2$

$h_s^2 + 1{,}65^2 = 6{,}5^2 \quad | -1{,}65^2$

$h_s^2 = 6{,}5^2 - 1{,}65^2 \quad | \sqrt{\ }$

$h_s = 6{,}29\,cm$

Höhe des Grundflächendreiecks h_a:

$h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$

$h_a^2 + 1{,}65^2 = 3{,}3^2 \quad | -1{,}65^2$

$h_a^2 = 3{,}3^2 - 1{,}65^2 \quad | \sqrt{\ }$

$h_a = 2{,}86\,cm$

V berechnen:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3{,}3 \cdot 2{,}86 \cdot 5{,}6 = 52{,}85$

Das Volumen der Sechseckpyramide beträgt $52{,}9\,cm^3$.

Oberflächeninhalt O:

$O = G + M$

$O = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$

$O = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3{,}3 \cdot 2{,}86 + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3{,}3 \cdot 6{,}29 = 90{,}59$

Der Oberflächeninhalt der Sechseckpyramide beträgt $90{,}6\,cm^2$.

Seite 61, links

3 Anmerkung: Da man bei allen Teilaufgaben Volumen und Oberflächeninhalt berechnen soll, benötigt man jeweils die Seitenlänge a der Grundfläche, die Höhe h der Pyramide und die Höhe h_s der Seitenflächen.

a) Seitenlänge a berechnen:

$\frac{a}{2} = \sqrt{s^2 - {h_s}^2}$

$\frac{a}{2} = \sqrt{17^2 - 15^2}$

$\frac{a}{2} = 8$

$a = 16\,cm$

Höhe h berechnen:

$h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h = \sqrt{15^2 - 8^2}$

$h = 12{,}7\,\text{cm}$

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot 12{,}7$

$V = 1083{,}7$

Das Volumen beträgt $1083{,}7\,\text{cm}^3$.

Oberflächeninhalt O:

$O = a^2 + 2\,a\,h_s$

$O = 16^2 + 2 \cdot 16 \cdot 15$

$O = 736$

Der Oberflächeninhalt beträgt $736{,}0\,\text{cm}^2$.

b) Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 2{,}6^2 \cdot 8{,}4$

$V = 18{,}927$

Das Volumen beträgt etwa $18{,}9\,\text{cm}^3$.

Höhe h_s berechnen:

$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_s = \sqrt{8{,}4^2 + 1{,}3^2}$

$h_s = 8{,}5\,\text{cm}$

Oberflächeninhalt O:

$O = a^2 + 2\,a\,h_s$

$O = 2{,}6^2 + 2 \cdot 2{,}6 \cdot 8{,}5$

$O = 50{,}96$

Der Oberflächeninhalt beträgt etwa $51{,}0\,\text{cm}^2$.

c) Höhe h_s der Seitenflächen berechnen:

$h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_s = \sqrt{5^2 - 1{,}4^2}$

$h_s = 4{,}8\,\text{cm}$

Höhe h der Pyramide berechnen:

$h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h = \sqrt{4{,}8^2 - 1{,}4^2}$

$h = 4{,}6\,\text{cm}$

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 2{,}8^2 \cdot 4{,}6$

$V = 12{,}0$

Das Volumen beträgt $12{,}0\,\text{cm}^3$.

Oberflächeninhalt O:

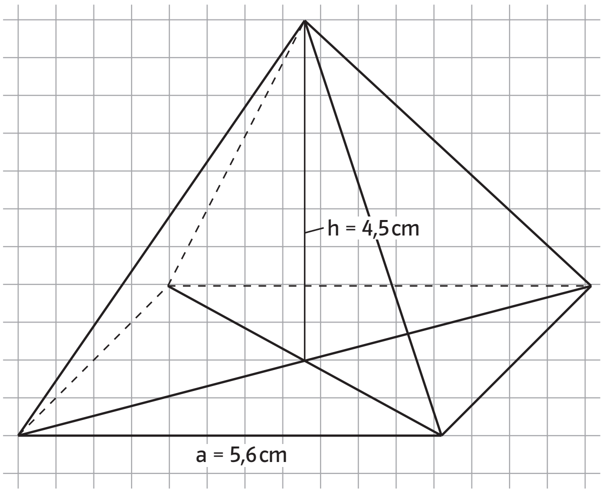
$O = a^2 + 2\,a\,h_s$

$O = 2{,}8^2 + 2 \cdot 2{,}8 \cdot 4{,}6$

$O = 33{,}6$

Der Oberflächeninhalt beträgt $33{,}6\,\text{cm}^2$.

4 Schrägbild (Maßstab 1:1)



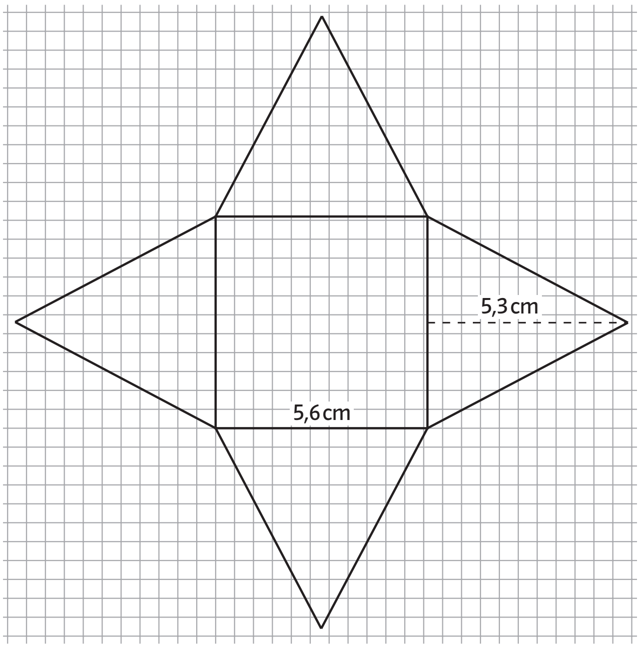
Um das Netz zu zeichnen, wird h_s berechnet:

$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_s = \sqrt{4{,}5^2 + 2{,}8^2}$

$h_s = 5{,}3\,\text{cm}$

Netz (Maßstab 2:1)



5 Mögliches Vorgehen:

Es gilt $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$, also erhält man:

$600 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h \quad | \cdot 3$

$1800 = a^2 \cdot h$

Nun muss man passende a und h bestimmen. Man kann z. B. einen Wert für a festlegen und mithilfe der Formel h berechnen oder anders herum. Zum Beispiel:

1. $a = 20\,\text{cm}$

$1800 = 20^2 \cdot h$

$1800 = 400 \cdot h \quad | : 400$

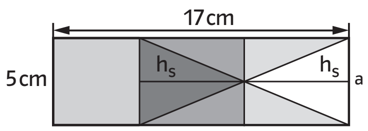
$4{,}5 = h$

$h = 4{,}5\,\text{cm}$

ACHTUNG: Sie arbeiten mit der Manuskriptfassung der Lösungen. Sie enthalten möglicherweise Fehler.
Gern können Sie Rückmeldungen an die folgende email-Adresse senden: SchnittpunktBW@klett.de
Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

2. $a = 15\,cm$
$1800 = 15^2 \cdot h$
$1800 = 225 \cdot h \qquad |:225$
$8 = h$
$h = 8\,cm$
3. $h = 18\,cm$
$1800 = a^2 \cdot 18 \qquad |:18$
$100 = a^2 \qquad |\sqrt{\ }$
$10 = a$
$a = 10\,cm$
Mögliche Lösungen:
$a = 10\,cm,\ h = 18\,cm;$
$a = 15\,cm,\ h = 8\,cm;$
$a = 20\,cm,\ h = 4{,}5\,cm.$

6



Aus dem blauen Quadrat (Grundfläche) erhält man: $a = 5\,cm$. Außerdem gilt: $a + h_s + h_s = 17\,cm$. Damit erhält man die Gleichung:
$5 + 2h_s = 17 \qquad |-5$
$2h_s = 12 \qquad |:2$
$h_s = 6$
Die Höhe h_s ist also 6 cm lang.
Höhe h der Pyramide berechnen:
$h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h = \sqrt{6^2 - 2{,}5^2}$
$h = 5{,}45\,cm$
Volumen V:
$V = \frac{1}{3} \cdot 2{,}5^2 \cdot 5{,}45$
$V = 11{,}4$
Das Volumen beträgt $11{,}4\,cm^3$.

Seite 61, rechts

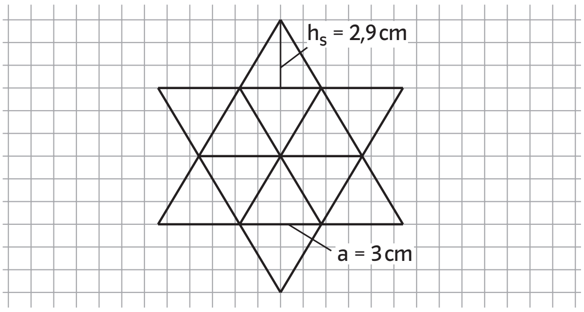
3

	a)	b)	c)	d)	e)
a	**4,8**	**12,0**	8,0	**5,4**	**8,0**
h	7,0	8,0	**13,89**	7,5	**7,5**
h_s	7,4	**10,0**	**14,46**	**7,97**	**8,5**
s	**7,8**	**11,66**	15,0	**8,42**	**9,39**
α	**64,1°**	**43,3°**	**67,8°**	**63,0°**	**53,0°**
β	**71,1°**	53°	**73,9°**	**70,2°**	**61,9°**
γ	**72,0°**	**59,0°**	**74,6°**	**71,2°**	**64,9°**
M	**71,04**	**240,0**	**231,4**	**86,1**	136,0
O	**94,08**	**384,0**	**295,4**	**115,2**	200,0
V	**53,76**	**384,0**	**296,3**	72,9	**160,0**

Die Winkel α, β und γ werden im jeweiligen gleichseitigen Dreieck anhand folgender Formeln berechnet:
$\sin\alpha = \frac{h}{s};\ \sin\beta = \frac{h}{h_s};\ \sin\gamma = \frac{h_s}{s}.$
Beispielrechnung zu e):
a berechnen:
$O = a^2 + M$
$200 = a^2 + 136 \qquad |-136$
$64 = a^2 \qquad |\sqrt{\ }$
$a = 8\,cm$
h_s berechnen:
$M = 2\,a\,h_s$
$136 = 2 \cdot 8 \cdot h_s \qquad |:(2 \cdot 8)$
$h_s = 8{,}5\,cm$
h berechnen: s berechnen:
$h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad s = \sqrt{h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h = \sqrt{8{,}5^2 - 4^2} \qquad s = \sqrt{8{,}5^2 + 4^2}$
$h = 7{,}5\,cm \qquad s = 9{,}39\,cm$
Winkel α, β und γ berechnen:
$\sin\alpha = \frac{7{,}5}{9{,}39} = 0{,}798 \Rightarrow \alpha = 53{,}0°$
$\sin\beta = \frac{7{,}5}{8{,}5} = 0{,}882 \Rightarrow \beta = 61{,}9°$
$\sin\gamma = \frac{8{,}5}{9{,}39} = 0{,}905 \Rightarrow \gamma = 64{,}9°$
Volumen V:
$V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 7{,}5$
$V = 160\,cm^3$
Hinweis: Bei allen Zwischenrechnungen werden die errechneten Werte für h, h_s bzw. s auf zwei Nachkommastellen gerundet.

4 Um das Netz zu zeichnen und anschließend den Oberflächeninhalt zu berechnen, benötigt man die Länge h_s der Seitendreiecke. Um diese zu berechnen, muss man zuerst (mithilfe des Volumens) h berechnen.
$V = \frac{1}{3} G \cdot h$
Grundfläche $G_{Sechseck}$:
$G_{Sechseck} = 6 \cdot a \cdot h_a$
$G_{Sechseck} = 6 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a$
$G_{Sechseck} = 46{,}77\,cm^2$
$39 = \frac{1}{3} \cdot 46{,}77 \cdot h$
$39 = 15{,}59\,h \qquad |:3$
$h = 2{,}5\,cm$
h_s berechnen:
$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_s = \sqrt{2{,}5^2 + 1{,}5^2}$
$h_s = 2{,}9\,cm$

Netz der Pyramide (Maßstab 1:1)



Oberflächeninhalt O:

$O = 6 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 + 6 \cdot 3 \cdot 2{,}9$

$O = 99{,}0\,cm^2$

2 Pyramide **Seite 62**

Seite 62, links

7 h im halben roten Dreieck berechnen:

$\tan\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} \Rightarrow h = \frac{a}{2} \cdot \tan\alpha$

$h = 5 \cdot \tan 67{,}4° = 12{,}01$

$h = 12{,}0\,cm$

h_s berechnen:

$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_s = \sqrt{12{,}01^2 + 5^2} = 13{,}01$

$h_s = 13{,}0\,cm$

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12{,}01$

$V = 400{,}3\,cm^3$

Oberflächeninhalt O:

$O = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 13{,}01$

$O = 360{,}2\,cm^2$

8 Wenn man die Breite der Fenster auf ca. 1,20 m schätzt, dann ergibt sich eine ungefähre Seitenlänge der Grundfläche von 5,0 m und eine Höhe der Pyramide von ca. 3,0 m.

$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_s = \sqrt{3^2 + 2{,}5^2}$

$h_s = 3{,}9\,m$

Oberflächeninhalt O:

$O = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3{,}9$

$O = 64$

Die Dachfläche ist etwa $64{,}0\,m^2$ groß.

9 $V = 1\,l = 1\,dm^3 = 1000\,cm^3$

Grundfläche G berechnen:

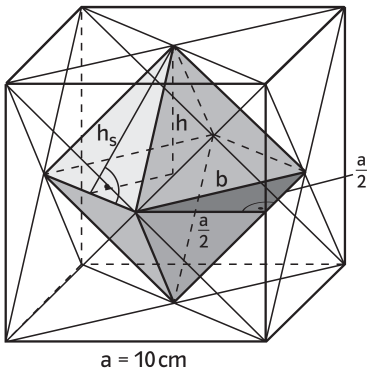
$V = \frac{1}{3} G h$

$1000 = \frac{1}{3} \cdot G \cdot 6{,}7 \qquad | \cdot 3 \quad | : 6{,}7$

$447{,}8 = G$

Die Grundfläche der Kerze ist $447{,}8\,cm^2$ groß.

10 Das Oktaeder besteht aus zwei gleich großen quadratischen Pyramiden mit Seitenlänge b der Grundfläche (und Seitenkante s = b) und Höhe $h = \frac{1}{2} \cdot a = 5\,cm$.



Seitenlänge b berechnen:

$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$b = \sqrt{5^2 + 5^2}$

$b = 7{,}07\,cm$

Höhe h_s der Seitenflächen:

$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

$h_s = \sqrt{5^2 + 3{,}54^2}$

$h_s = 6{,}12\,cm$

Volumen V des Oktaeders:

$V = 2 \cdot V_{Pyramide}$

$V = 2 \cdot \frac{1}{3} b^2 h$

$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 7{,}07^2 \cdot 5$

$V = 166{,}7$

Das Volumen des Oktaeders beträgt $166{,}7\,cm^3$.

Oberflächeninhalt O des Oktaeders:

$O = 2 \cdot M_{Pyramide}$

$O = 2 \cdot 2 \cdot 7{,}07 \cdot 6{,}12$

$O = 173{,}1$

Der Oberflächeninhalt des Oktaeders beträgt $173{,}1\,cm^2$.

Seite 62, rechts

5 a) Für den Flächeninhalt A der blauen Diagonalschnittfläche gilt:

$A = \frac{1}{2} d h$ bzw. $A = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} \cdot h$. Damit erhält man:

$57{,}4 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6{,}5^2 + 6{,}5^2} \cdot h$

$57{,}4 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}19 \cdot h \quad \left| : \frac{1}{2} \quad \right| : 9{,}19$

$12{,}5 = h$

$h = 12{,}5\,\text{cm}$

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot 6{,}5^2 \cdot 12{,}5$

$V = 176{,}0$

Das Volumen beträgt $176{,}0\,\text{cm}^3$.

Oberflächeninhalt O:

$O = 6{,}5^2 + 2 \cdot 6{,}5 \cdot h_s$

h_s berechnen:

$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_s = \sqrt{12{,}5^2 + 3{,}25^2}$

$h_s = 12{,}9\,\text{cm}$

$O = 6{,}5^2 + 2 \cdot 6{,}5 \cdot 12{,}9$

$O = 210{,}0$

Der Oberflächeninhalt beträgt $210{,}0\,\text{cm}^2$.

Winkel δ berechnen:

$\tan\delta = \frac{h}{\frac{d}{2}}$

$\tan\delta = \frac{12{,}5}{\frac{1}{2}\sqrt{6{,}5^2 + 6{,}5^2}} = 2{,}719$; also ist $\delta = 69{,}8°$.

b) h_a in einem halben gleichseitigen Dreieck der Grundfläche berechnen:

$h_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_a = \sqrt{7{,}2^2 - 3{,}6^2}$

$h_a = 6{,}235\,\text{cm}$

Grundfläche G berechnen:

$G = 6 \cdot \frac{1}{2} a\, h_a$

$G = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7{,}2 \cdot 6{,}235$

$G = 134{,}7\,\text{cm}^2$

Ein halbes rotes Dreieck hat die Katheten h und h_a und die Hypotenuse h_s.

h berechnen:	h_s berechnen:
$\tan\alpha = \frac{h}{h_a}$	$\cos\alpha = \frac{h_a}{h_s}$
$h = h_a \cdot \tan\alpha$	$h_s = \frac{h_a}{\cos\alpha}$
$h = 6{,}235 \cdot \tan 67{,}4°$	$h_s = \frac{6{,}235}{\cos 67{,}4°}$
$h = 15{,}0\,\text{cm}$	$h_s = 16{,}2\,\text{cm}$
Volumen V:	Oberflächeninhalt O:
$V = \frac{1}{3} G h$	$O = G + 3 a h_s$
$V = \frac{1}{3} \cdot 134{,}7 \cdot 15$	$O = 134{,}7 + 3 \cdot 7{,}2 \cdot 16{,}2$
$V = 673{,}5$	$O = 484{,}6$

Das Volumen beträgt $673{,}5\,\text{cm}^3$, der Oberflächeninhalt $484{,}6\,\text{cm}^2$.

$A_{\text{rotesDreieck}} = \frac{1}{2}(2 h_a) \cdot h$

$A_{\text{rotesDreieck}} = h_a \cdot h$

$A_{\text{rotesDreieck}} = 6{,}24 \cdot 15 = 93{,}6$

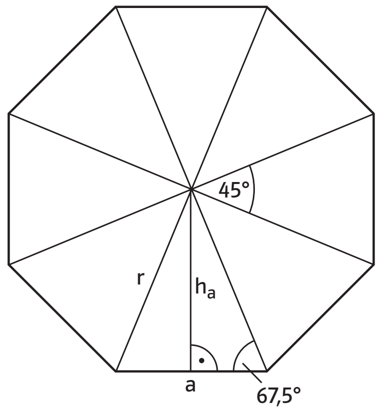
$A_{\text{rotesDreieck}} = 93{,}6\,\text{cm}^2$

Winkel ε berechnen:

$\tan\varepsilon = \frac{h_s}{\frac{a}{2}}$

$\tan\varepsilon = \frac{16{,}2}{3{,}6} = 4{,}5$; also ist $\varepsilon = 77{,}5°$.

6 a) Um den Grundflächeninhalt G zu berechnen, muss man h_a berechnen: h_a berechnet man in einem der gleichschenkligen Dreiecke der achteckigen Grundfläche.



Der Mittelpunktswinkel β im regelmäßigen Achteck ist $\frac{1}{8} \cdot 360° = 45°$ groß. Daher betragen die Basiswinkel in jedem der acht gleichschenkligen Dreiecke:

$(180° - 45°) : 2 = 67{,}5°$. Damit erhält man:

$\tan 67{,}5° = \frac{h_a}{\frac{a}{2}}$. ((Punkt am Ende?))

$\tan 67{,}5° = \frac{h_a}{2{,}5}$

$h_a = 2{,}5 \cdot \tan 67{,}5°$

$h_a = 6{,}04\,\text{cm}$

Grundfläche G:

$G = 8 \cdot \frac{1}{2} a\, h_a$

$G = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6{,}04$

$G = 120{,}8\,\text{cm}^2$

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} G h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 120{,}8 \cdot 8$

$V = 322{,}1$

Das Volumen beträgt $322{,}1\,\text{cm}^3$.

Oberflächeninhalt O:

$O = G + 8 \cdot \frac{1}{2} a\, h_s$

h_s berechnen:

$h_s = \sqrt{h^2 + h_a^2}$

$h_s = \sqrt{8^2 + 6{,}04^2}$

$h_s = 10{,}0\,\text{cm}$

$O = 120{,}8 + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10$

$O = 320{,}8$

Der Oberflächeninhalt beträgt $320{,}8\,\text{cm}^2$.

b) r berechnen (vgl. Skizze in a))

$r = \sqrt{s^2 - h^2}$

$r = \sqrt{6{,}5^2 - 6^2}$

$r = 2{,}5\,\text{cm}$

h_a mithilfe des Basiswinkels in einem Grundflächendreieck berechnen:

$\sin 67{,}5° = \frac{h_a}{r}$

$\sin 67{,}5° = \frac{h_a}{2{,}5}$

$h_a = 2{,}5 \cdot \sin 67{,}5°$

$h_a = 2{,}31\,\text{cm}$

Seitenlänge a berechnen:

$\cos 67{,}5° = \frac{\frac{a}{2}}{2{,}5}$

$\frac{a}{2} = 2{,}5 \cdot \cos 67{,}5° = 0{,}957$

$a = 1{,}91\,\text{cm}$

Grundfläche G:

$G = 8 \cdot \frac{1}{2} a h_a$

$G = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}91 \cdot 2{,}31$

$G = 17{,}65\,\text{cm}^2$

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} G h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 17{,}65 \cdot 6 = 35{,}3$

Das Volumen beträgt $35{,}3\,\text{cm}^3$.

h_s berechnen:

$h_s = \sqrt{h^2 + h_a{}^2}$

$h_s = \sqrt{6^2 + 2{,}31^2}$

$h_s = 6{,}43\,\text{cm}$

Oberflächeninhalt O:

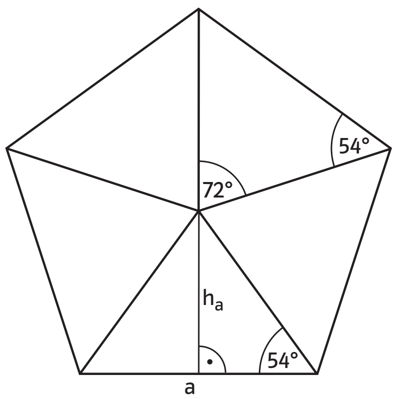
$O = G + 8 \cdot \frac{1}{2} a h_s$

$O = 17{,}65 + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}91 \cdot 6{,}43$

$O = 66{,}8$

Der Oberflächeninhalt beträgt $66{,}8\,\text{cm}^2$.

7



Der Mittelpunktswinkel im regelmäßigen Fünfeck ist $\frac{1}{5} \cdot 360° = 72°$ groß. Daher betragen die Basiswinkel in jedem der fünf gleichschenkligen Dreiecke:

$(180° - 72°) : 2 = 54°$. Damit erhält man:

$\tan 54° = \frac{h_a}{\frac{a}{2}}$. ((Punkt am Ende?))

$\tan 54° = \frac{h_a}{4}$

$h_a = 4 \cdot \tan 54°$

$h_a = 5{,}51\,\text{cm}$

Grundfläche G:

$G = 5 \cdot \frac{1}{2} a h_a$

$G = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5{,}51$

$G = 110{,}2\,\text{cm}^2$

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} G h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 110{,}2 \cdot 12$

$V = 440{,}8$

Das Volumen beträgt $440{,}8\,\text{cm}^3$.

Oberflächeninhalt O:

$O = G + 5 \cdot \frac{1}{2} a h_s$

h_s berechnen:

$h_s = \sqrt{h^2 + h_a{}^2}$

$h_s = \sqrt{12^2 + 5{,}51^2}$

$h_s = 13{,}2\,\text{cm}$

$O = 110{,}2 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 13{,}2$

$O = 374{,}2$

Der Oberflächeninhalt beträgt $374{,}2\,\text{cm}^2$.

8 Beide Dachflächen sind gleich groß. Denn Dachfläche A besteht aus zwei Rechtecken mit den Seitenlängen 8 m und 7,2 m. Dachfläche B besteht aus vier Dreiecken, die jeweils eine Seitenlänge von 8 m und eine Höhe von 7,2 m. Da zwei Dreiecke zusammen den gleichen Flächeninhalt wie ein Rechteck haben, sind beide Dachflächen gleich groß.

3 Kegel. Oberflächeninhalt Seite 63

Seite 63

Einstieg

→ A gehört zu Kegel (2); B gehört zu Kegel (1); C gehört zu Kegel (3).

→ Individuelle Lösungen
Mögliche Begründung: Je schmaler der Kegel ist, desto kleiner ist der Winkel des Kreisausschnitts; damit ist die Bogenlänge des Kreisausschnitts auch entsprechend kleiner (was intuitiv klar ist: beim schmaleren Kegel ist der Grundflächenkreis am kleinsten).

3 Kegel. Oberflächeninhalt **Seite 64**

Seite 64

1 a) Oberflächeninhalt O:
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 2 \cdot 5$
$O = 44{,}0$
Der Oberflächeninhalt beträgt $44{,}0\,cm^2$.
b) Oberflächeninhalt O:
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 4 \cdot 12$
$O = 201{,}1$
Der Oberflächeninhalt beträgt $201{,}1\,cm^2$.
c) Hier muss die Mantellinie mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

(1) Radius r:	(2) Mantellinie s:
$r = \frac{1}{2}d$	$s = \sqrt{h^2 + r^2}$
$r = \frac{1}{2} \cdot 8{,}4$	$s = \sqrt{13{,}6^2 + 4{,}2^2}$
$r = 4{,}2\,cm$	$s = 14{,}23\,cm$

(3) Oberflächeninhalt O:
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot 4{,}2^2 + \pi \cdot 4{,}2 \cdot 14{,}23$
$O = 243{,}2$
Der Oberflächeninhalt beträgt $243{,}2\,cm^2$.

2 a) $r = 5{,}0\,cm$; $h = 12{,}0\,cm$
(1) Mantellinie s berechnen:
$s = \sqrt{h^2 + r^2}$
$s = \sqrt{12^2 + 5^2}$
$s = 13\,cm$
(2) Oberflächeninhalt O:
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 12$
$O = 267{,}0$
Der Oberflächeninhalt beträgt $267{,}0\,cm^2$.
b) $d = 16{,}0\,cm$, also $r = 8{,}0\,cm$; $h = 15{,}0\,cm$
(1) Mantellinie s berechnen:
$s = \sqrt{h^2 + r^2}$
$s = \sqrt{15^2 + 8^2}$
$s = 17\,cm$
(2) Oberflächeninhalt O:
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 8 \cdot 17$
$O = 628{,}3$
Der Oberflächeninhalt beträgt $628{,}3\,cm^2$.
c) $h = 7{,}0\,cm$; $s = 7{,}4\,cm$
(1) Radius r berechnen:
$r = \sqrt{s^2 - h^2}$
$r = \sqrt{7{,}4^2 - 7^2}$
$r = 2{,}4\,cm$
(2) Oberflächeninhalt O:
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot 2{,}4^2 + \pi \cdot 2{,}4 \cdot 7{,}4$
$O = 73{,}9$
Der Oberflächeninhalt beträgt $73{,}9\,cm^2$.

3 a) Den Radius r berechnet man mithilfe der Formel für die Mantelflächeninhalt.
$M = \pi \cdot r \cdot s$
$57 = \pi \cdot r \cdot 4{,}9 \quad |:\pi \quad |:4{,}9$
$3{,}7 = r$
Der Radius r beträgt $3{,}7\,cm$.
b) Die Mantellinie s berechnet man mithilfe der Formel für den Oberflächeninhalt.
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$69{,}1 = \pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 2 \cdot s$
$69{,}1 = 4\pi + 2\pi \cdot s \quad |-4\pi$
$56{,}53 = 2\pi \cdot s \quad |:(2\pi)$
$9{,}0 = s$
Die Mantellinie s beträgt $9{,}0\,cm$.

A a) $O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot 6 = 84{,}82$
Der Oberflächeninhalt des Kegels beträgt $84{,}8\,cm^2$.

b) Seitenlinie s:	O berechnen:
$s^2 = h^2 + r^2$	$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$s^2 = 4{,}2^2 + 4^2 \quad \vert\sqrt{\ }$	$O = \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 4 \cdot 5{,}8$
$s = 5{,}8\,cm$	$= 123{,}15$

Der Oberflächeninhalt des Kegels beträgt $123{,}2\,cm^2$.

c) Radius r:	O berechnen:
$s^2 = h^2 + r^2$	$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$10{,}6^2 = 9^2 + r^2 \quad \vert -9^2$	$O = \pi \cdot 5{,}6^2 + \pi \cdot 5{,}6 \cdot 10{,}6$
$10{,}6^2 - 9^2 = r^2 \quad \vert\sqrt{\ }$	$= 285{,}01$
$r = 5{,}6\,cm$	

Der Oberflächeninhalt des Kegels beträgt $285{,}0\,cm^2$.

B $M = \pi \cdot r \cdot s$
$75{,}4 = \pi \cdot 3 \cdot s \quad |:\pi \quad |:3$
$s = 8{,}0\,cm$
Die Länge der Mantellinie beträgt $8{,}0\,cm$.

Seite 64, links

4 a) Oberflächeninhalt O:
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot 3{,}7^2 + \pi \cdot 3{,}7 \cdot 5{,}4$
$O = 105{,}8$
Der Oberflächeninhalt beträgt $105{,}8\,cm^2$.

b) (1) Radius r berechnen
$r = \sqrt{s^2 - h^2}$
$r = \sqrt{13^2 - 11{,}2^2}$
$r = 6{,}6\,\text{cm}$
(2) Oberflächeninhalt O:
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot 6{,}6^2 + \pi \cdot 6{,}6 \cdot 13$
$O = 406{,}4$
Der Oberflächeninhalt beträgt $406{,}4\,\text{cm}^2$.
c) Oberflächeninhalt O:
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot r^2 + M$
$O = \pi \cdot 5^2 + 251{,}3$
$O = 329{,}8$
Der Oberflächeninhalt beträgt $329{,}8\,\text{cm}^2$.
Hinweis: Da die Mantellinie s nicht gefragt ist, kann man hier direkt den Oberflächeninhalt mithilfe des Wertes für den Mantelflächeninhalt berechnen.
d) (1) Radius r berechnen:
$M = \pi \cdot r \cdot s$
$84{,}8 = \pi \cdot r \cdot 7{,}5 \qquad |:\pi \quad |:7{,}5$
$3{,}60 = r$
(2) Oberflächeninhalt O:
$O = \pi \cdot r^2 + M$
$O = \pi \cdot 3{,}6^2 + 84{,}8$
$O = 125{,}5$
Der Oberflächeninhalt beträgt $125{,}5\,\text{cm}^2$.
Hinweis: Im Gegensatz zu Teilaufgabe c) muss man hier die fehlende Größe (den Radius) berechnen.

5 Individuelle Lösungen

6 Gegeben sind: $u = 13{,}5\,\text{m}$; $h = 5{,}8\,\text{m}$
Um den Oberflächeninhalt der Dachfläche zu berechnen, benötigt man die Längen von Radius r und Mantellinie s.

(1) Radius r:
$u = 2\pi r$
$13{,}5 = 2\pi r$
$r = 2{,}15\,\text{m}$

(2) Mantellinie s:
$s = \sqrt{h^2 + r^2}$
$s = \sqrt{5{,}8^2 + 2{,}15^2}$
$s = 6{,}19\,\text{m}$

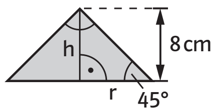
(2) Oberflächeninhalt O:
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot 2{,}15^2 + \pi \cdot 2{,}15 \cdot 6{,}19$
$O = 56{,}3$
Die Dachfläche ist $56{,}3\,\text{m}^2$ groß.

Seite 64, rechts

4

	r	h	s	M	O
a)	2,7	9,4	**9,8**	**144,4**	**167,3**
b)	**5,5**	**6,5**	8,5	146,9	**241,9**
c)	7,0	**23,0**	**24,0**	**527,8**	681,7
d)	**8,3**	**8,9**	**12,2**	318,1	534,5

Beispielrechnungen:
c) Mantelflächeninhalt M:
$O = \pi \cdot r^2 + M$
$681{,}7 = \pi \cdot 7^2 + M \qquad |-(\pi \cdot 7^2)$
$527{,}76 = M$
Mantellinie s:
$M = \pi \cdot r \cdot s$
$527{,}76 = \pi \cdot 7 \cdot s \qquad |:\pi \quad |:7$
$24{,}0 = s$
Höhe h des Kegels:
$h = \sqrt{s^2 - r^2}$
$h = \sqrt{24^2 - 7^2} = 23{,}0$

5 a) (1) Radius r berechnen:
$\cos 70° = \frac{r}{s}$
$\cos 70° = \frac{r}{20}$
$r = 20 \cdot \cos 70°$
$r = 6{,}84\,\text{cm}$
(2) Oberflächeninhalt O:
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot 6{,}84^2 + \pi \cdot 6{,}84 \cdot 20$
$O = 576{,}8$
Der Oberflächeninhalt beträgt $576{,}8\,\text{cm}^2$.
b)


(1) Radius r
Der Achsenschnitt des Kegels ist ein rechtwinkliges (und gleichschenkliges) Dreieck; daher sind die Basiswinkel 45° groß. Es gilt: $r = h$, also $r = 8\,\text{cm}$.
(2) Mantellinie s:
$s = \sqrt{h^2 + r^2}$
$s = \sqrt{8^2 + 8^2}$
$s = 11{,}3\,\text{cm}$
(3) Oberflächeninhalt O:
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 8 \cdot 11{,}3$
$O = 485{,}1$
Der Oberflächeninhalt beträgt $485{,}1\,\text{cm}^2$.

ACHTUNG: Sie arbeiten mit der Manuskriptfassung der Lösungen. Sie enthalten möglicherweise Fehler.
Gern können Sie Rückmeldungen an die folgende email-Adresse senden: SchnittpunktBW@klett.de
Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

6 a) Kegel A:

$r = 3\,cm$; $s = 6\,cm$

Die Bogenlänge b des Kreisausschnitts ist gleich dem Umfang u der Grundfläche des Kegels; es gilt also $b = u$.

Bogenlänge b berechnen

$b = 2 \cdot \pi \cdot r$

$b = 2 \cdot \pi \cdot 3$

$b = 18{,}85\,cm$

Winkel α des Kreisausschnitts

$b = 2 \cdot \pi \cdot s \cdot \frac{\alpha}{360°}$

$18{,}85 = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot \frac{\alpha}{360°} \quad |:\pi \quad |:12$

$0{,}5 = \frac{\alpha}{360°} \quad | \cdot 360°$

$\alpha = 180°$

Kegel B:

$r = 4\,cm$; $h = 4{,}2\,cm$

Mantellinie s berechnen

$s = \sqrt{h^2 + r^2}$

$s = \sqrt{4{,}2^2 + 4^2}$

$s = 5{,}8\,cm$

Bogenlänge b berechnen

$b = u$

$b = 2 \cdot \pi \cdot r$

$b = 2 \cdot \pi \cdot 4$

$b = 25{,}13\,cm$

Winkel α des Kreisausschnitts

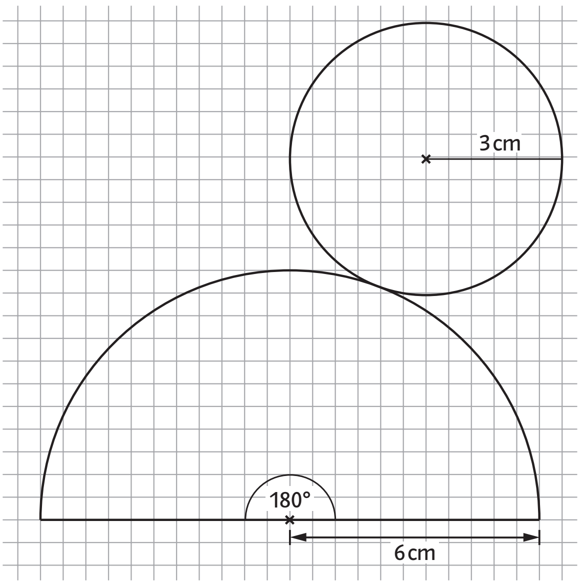
$b = 2 \cdot \pi \cdot s \cdot \frac{\alpha}{360°}$

$25{,}13 = 2 \cdot \pi \cdot 5{,}8 \cdot \frac{\alpha}{360°} \quad |:\pi \quad |:11{,}6$

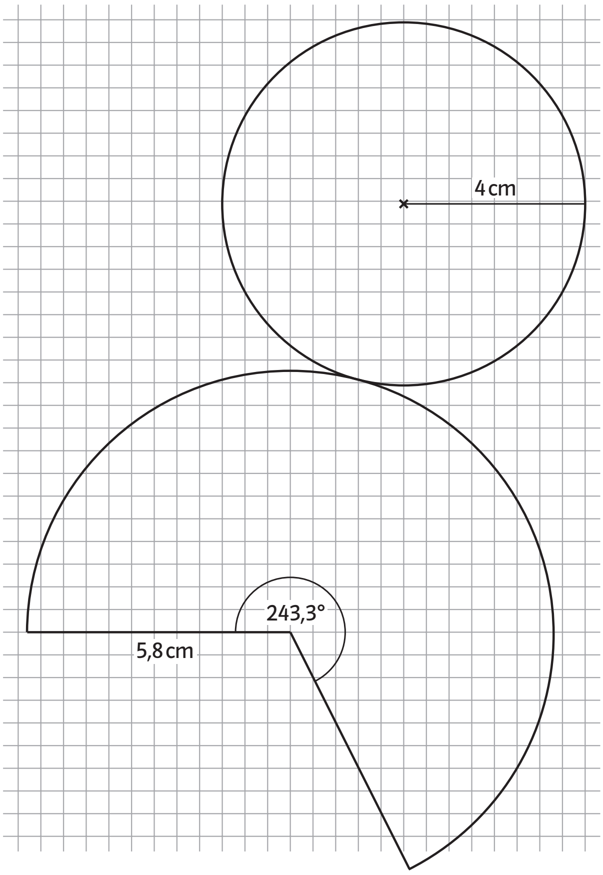
$0{,}69 = \frac{\alpha}{360°} \quad | \cdot 360°$

$\alpha = 248{,}3°$

b) Kegel A (Maßstab 1:1)



Kegel B (Maßstab 1:1)



c) Die Bogenlänge b des Kreisausschnitts ist gleich dem Umfang u der Grundfläche des Kegels, es gilt also $u = b$.

Für den Umfang des Grundflächenkreises gilt:

$u = 2 \cdot \pi \cdot r \qquad (1)$

Für die Bogenlänge b des Kreisausschnitts mit Radius s und Winkel α gilt andererseits:

$b = 2 \cdot \pi \cdot s \cdot \frac{\alpha}{360°} \qquad (2)$

Da (1) = (2) gilt, erhält man:

$2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot s \cdot \frac{\alpha}{360°} \quad |:2 \quad |:\pi$

$r = s \cdot \frac{\alpha}{360°} \quad | \cdot 360°$

$r \cdot 360° = s \cdot \alpha \quad |:s$

$\alpha = \frac{r}{s} \cdot 360°$

4 Kegel. Volumen Seite 65

Seite 65

Einstieg

→ Man füllt ein kegelförmiges Gefäß mit Wasser; anschließend schüttet man den Inhalt in ein zylinderförmiges Gefäß mit gleichem Radius und gleicher Höhe. Man überprüft die Höhe, bis zu der das Wasser im Zylinder steht.

→ Beide Körper haben den gleichen Radius und die gleiche Höhe.

→ Individuelle Lösungen
Es passen drei Kegelfüllungen in den Zylinder.

→ Es gilt: $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot V_{Zylinder}$

1 a) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 9$

$V = 84{,}8$

Das Volumen des Kegels beträgt $84{,}8\,cm^3$.

b) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 6{,}5$

$V = 15{,}3$

Das Volumen des Kegels beträgt $15{,}3\,cm^3$.

c) $d = 7{,}8\,cm$, also ist $r = 3{,}9\,cm$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}9^2 \cdot 11{,}5$

$V = 183{,}2$

Das Volumen des Kegels beträgt $183{,}2\,cm^3$.

4 Kegel. Volumen **Seite 66**

Seite 66

2 a) Höhe h des Kegels berechnen:

$h = \sqrt{s^2 - r^2}$

$h = \sqrt{7^2 - 3{,}2^2}$

$h = 6{,}23\,cm$

Volumen V

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}2^2 \cdot 6{,}23$

$V = 66{,}8$

Das Volumen des Kegels beträgt $66{,}8\,cm^3$.

b) Radius r des Kegels berechnen:

$r = \sqrt{s^2 - h^2}$

$r = \sqrt{25^2 - 24^2}$

$r = 7\,cm$

Volumen V

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7^2 \cdot 24$

$V = 1231{,}5$

Das Volumen des Kegels beträgt $1231{,}5\,cm^3$.

c) Radius r des Kegels:

$r = \frac{1}{2} \cdot 2{,}4$

$r = 1{,}2\,cm$

Höhe h des Kegels:

$h = \sqrt{s^2 - r^2}$

$h = \sqrt{7{,}4^2 - 1{,}2^2}$

$h = 7{,}30\,cm$

Volumen V

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}2^2 \cdot 7{,}3$

$V = 11{,}0$

Das Volumen des Kegels beträgt $11{,}0\,cm^3$.

A a) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 8{,}5 = 222{,}53$

Das Volumen des Kegels beträgt $222{,}5\,cm^3$.

b) Radius r:

$r = d : 2$

$r = 9 : 2$

$r = 4{,}5\,cm$

V berechnen:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 10$

$V = 212{,}06$

Das Volumen des Kegels beträgt $212{,}1\,cm^3$.

c) Radius r:

$r = d : 2$

$r = 11{,}2 : 2$

$r = 5{,}6\,cm$

Höhe h:

$h^2 + r^2 = s^2$

$h^2 + 5{,}6^2 = 10{,}6^2 \quad | -5{,}6^2$

$h^2 = 10{,}6^2 - 5{,}6^2 \quad | \sqrt{\ }$

$h = 9{,}0\,cm$

V berechnen:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5{,}6^2 \cdot 9 = 295{,}56$

Das Volumen des Kegels beträgt $295{,}56\,cm^3$.

Seite 66, links

3 a) Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 84{,}8 \cdot 25$

$V = 706{,}7\,cm^3$

b) Grundfläche G:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$974{,}9 = \frac{1}{3} \cdot G \cdot 19 \quad | \cdot 3 \quad | : 19$

$G = 153{,}9\,cm^2$

c) Radius r berechnen:

$u = 2\pi r$

$22{,}6 = 2\pi r \quad | : 2 \quad | : \pi$

$r = 3{,}60\,cm$

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}6^2 \cdot 7{,}7$

$V = 104{,}5\,cm^3$

d) Höhe h:

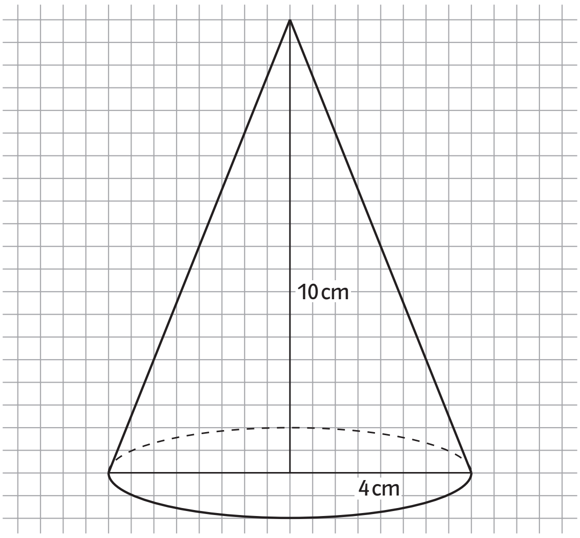
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$75{,}4 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot h$

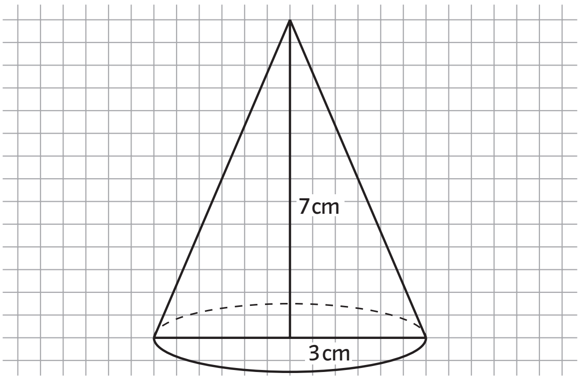
$75{,}4 = 3\pi \cdot h \quad | : 3 \quad | : \pi$

$h = 8{,}0\,cm$

4 a) Maßstab 1 : 2



b) Maßstab 1 : 2



5 a) $r = \frac{1}{2}d$, also $r = 4\,m$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 20$

$V = 335{,}1$

Das Volumen des Lichtkegels beträgt $335{,}1\,m^3$.

b) Radius r berechnen

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$654 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 25 \quad | \cdot 3 \quad | : \pi \quad | : 25$

$25{,}0 = r^2 \quad | \sqrt{}$

$r = 5{,}0$

$d = 10{,}0$

Der Durchmesser des Kegels beträgt 10,0 m.

6 a) Volumen eines (vollen) Glases berechnen

$d = 5{,}0\,cm$; also $r = 2{,}5\,cm$

$h = 12{,}0\,cm$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 12$

$V = 78{,}54\,cm^3$

Jedes Glas ist zu 90 % gefüllt, das sind:

$0{,}9 \cdot 78{,}54\,dm^3 = 70{,}7\,dm^3$

$1\,l = 1000\,cm^3$

Es gilt: $1000 : 70{,}7 = 14{,}1$

Mit einem Liter Sekt kann man also 14 Sektgläser füllen.

7 $h_{Keg} = h_{Pyr} = 20\,cm$;

Grundkante der Pyramide: $a = 8\,cm$

Gesucht ist der Radius r des Kegels.

Es gilt:

$V_{Kegel} = V_{Pyramide}$

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_{Keg} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_{Pyr}$

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 20 = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 20 \quad | \cdot 3 \quad | : 20$

$\pi \cdot r^2 = 82 \quad | : \pi$

$r^2 = 20{,}37 \quad | \sqrt{}$

$r = 4{,}51$

Der Radius des Kegels beträgt etwa 4,5 cm.

Seite 66, rechts

3

	r	h	s	G	O	V
a)	5,0	**14,14**	**15,0**	**78,5**	314,2	**370,2**
b)	**3,9**	8,0	**8,9**	**47,8**	**156,8**	127,4
c)	**1,7**	**14,4**	14,5	9,1	**86,5**	**43,6**
d)	**6,5**	**7,2**	**9,7**	132,7	**330,8**	318,6
e)	**8,4**	**23,93**	**25,36**	221,7	891,0	**1768,4**

Anmerkung: Manche Ergebnisse sind auf zwei Dezimalstellen angegeben worden, damit die Ergebnisse der weiteren Rechnungen genauer ausfallen.

4 Radius r:

$r = \frac{1}{2}d$

$r = 4\,cm$

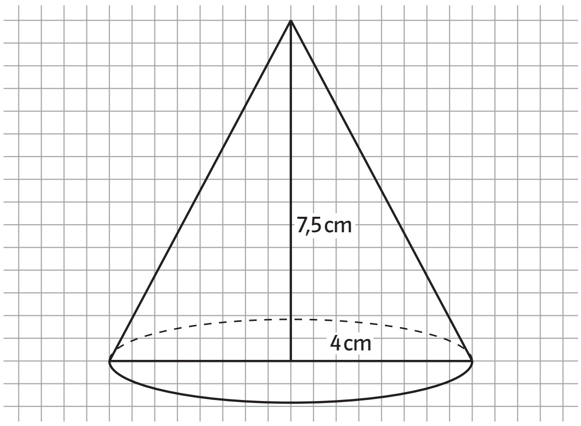
Höhe h:

$h = \sqrt{s^2 - r^2}$

$h = \sqrt{8{,}5^2 - 4^2}$

$h = 7{,}5\,cm$

Maßstab 1 : 2



Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

5 Paula täuscht sich: wenn die Werte für den Radius r und die Höhe h miteinander getauscht werden, dann bleibt das Volumen der entstehenden Kegel nicht gleich. Denn in der Volumenformel nimmt man den Wert für den Radius zum Quadrat, den Wert für die Höhe aber nicht. Genauer:

Kegel A	Kegel B
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 9$	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 6$
$V = 339{,}3\,\text{cm}^3$	$V = 508{,}9\,\text{cm}^3$

6 Radius r berechnen

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$500 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 1{,}2\,r$

$500 = 0{,}4\pi \cdot r^3 \quad |:0{,}4 \quad |:\pi$

$397{,}89 = r^3 \quad |\sqrt[3]{}$

$7{,}355 = r$

Der Radius des Haufens beträgt 7,355 m.

Grundfläche G

$G = \pi \cdot 7{,}355^2$

$G = 170{,}0$

Die Grundfläche des kegelförmigen Haufens ist $170{,}0\,\text{m}^2$ groß.

7 Wenn man die Höhe eines Kegels verdoppelt, so verdoppelt sich auch sein Volumen.
Wenn man den Radius eines Kegels verdoppelt, so vervierfacht sich sein Volumen.
Begründung: In der Formel für das Volumen des Kegels tritt der Wert für den Radius im Quadrat auf, der Wert für die Höhe aber einfach. In der allgemeinen Formel sieht es so aus:

Höhe verdoppeln: $h' = 2h$

$V' = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2h$

$V' = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V' = 2V$

Radius verdoppeln: $r' = 2r$

$V' = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2r)^2 \cdot h$

$V' = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4r^2 \cdot h$

$V' = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V' = 4\,V$

EXTRA: Satz von Cavalieri — Seite 67

Seite 67

1 Alle Körper haben die gleiche Höhe. Bei den Körpern A, D und E ist auch jeweils die Grundfläche ein halbes Quadrat groß und damit gleich der Grundfläche des roten Körpers. Das gleiche gilt auch für den Körper C, wenn man erst die obere und dann die untere Hälfte mit der entsprechenden Hälfte des roten Körpers vergleicht. Die Körper A, D, E und C haben daher nach dem Satz von Cavalieri das gleiche Volumen wie der rote Körper links.
Körper B hat aber ein anders Volumen, denn die Schnittflächen in seiner Mitte z. B. sind viel kleiner als die Schnittflächen in der Mitte des roten Körpers.

2 a) Nach dem Satz von Cavalieri hat der schiefe Zylinder das gleiche Volumen wie der entsprechende gerade Zylinder mit der gleichen Höhe und dem gleichen Radius.

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \pi \cdot 3{,}4^2 \cdot 6{,}2$

$V = 225{,}2\,\text{cm}^3$

b) Nach dem Satz von Cavalieri hat das Prisma das gleiche Volumen wie ein Quader mit der gleichen Höhe und der gleichen Grundfläche.

$V = a \cdot b \cdot h$

$V = 3{,}5 \cdot 5 \cdot 10{,}8$

$V = 189\,\text{cm}^3$

c) Der schiefe Kegel hat das gleiche Volumen wie der entsprechende gerade Kegel mit der gleichen Höhe und dem gleichen Radius (vgl. dazu auch Aufgabe 3). Denn nach den Strahlensätzen bleibt der Radius sowohl beim schiefem wie auch beim geraden Kegel auf einer bestimmten Höhe gleich. Die jeweiligen Schnittflächen sind damit auf der gleichen Höhe gleich und die Bedingungen des Satzes von Cavalieri sind erfüllt.

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}7^2 \cdot 7{,}2$

$V = 55{,}0\,\text{cm}^3$

d) Eine schiefe Pyramide mit quadratischer Basis hat das gleiche Volumen wie die entsprechende gerade quadratische Pyramide mit gleicher Höhe und gleicher Grundfläche. Denn alle Schnittflächen auf der gleichen Höhe haben die gleiche Seitenkante und damit den gleichen Flächeninhalt (vgl. dazu auch Aufgabe 3).
Die Höhe h berechnet man im vorderen rechtwinkligen Dreieck.

$h = \sqrt{10^2 - 6^2}$
$h = 8\,cm$
$V = \frac{1}{3}\, G \cdot h$
$V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 8$
$V = 96\,cm^3$

3 a) Boris hat recht. Die Höhe ist bei allen Kegeln gleich. Die Grundflächen sind gleich, weil alle Kegel den gleichen Durchmesser haben. Schneidet man dann die Kegel auf einer bestimmten Höhe parallel zur Grundfläche, dann sind die entstehenden Grundflächen gleich groß. (Denn nach den Strahlensätzen bleibt das Verhältnis zwischen Radius und Höhe erhalten.)
Damit sind die Bedingungen des Satzes von Cavalieri erfüllt, alle diese Kegel haben also das gleiche Volumen.
b) Felix täuscht sich. Der Satz des Cavalieri gilt nur für das Volumen. Der Oberflächeninhalt verändert sich dagegen: ein schiefer Körper z. B. hat eine größere Oberfläche als ein gerader mit demselben Volumen.

5 Kugel. Volumen — Seiten 68, 69

Seite 68

Einstieg

→ Die Flüssigkeit, die in einem kugelförmigen Gefäß ist, wird in ein würfelförmiges Gefäß umgefüllt.
→ Der Durchmesser der Kugel ist gleich der Kantenlänge des Würfels.
→ Das Wasser aus der Kugel füllt etwa den halben Würfel.
→ Individuelle Lösungen
Mögliche Annäherung: $V_{Kugel} \approx 0{,}5 \cdot V_{Würfel}$

1 a) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3$
$V = 113{,}1$
Das Volumen der Kugel beträgt $113{,}1\,cm^3$.
b) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5{,}5^3$
$V = 696{,}9$
Das Volumen der Kugel beträgt $696{,}9\,cm^3$.
c) $d = 8{,}0\,cm$, also $r = 4{,}0\,cm$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3$
$V = 268{,}1$
Das Volumen der Kugel beträgt $268{,}1\,cm^3$.
d) $d = 15{,}0\,cm$, also $r = 7{,}5\,cm$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 7{,}5^3$
$V = 1767{,}1$
Das Volumen der Kugel beträgt $1767{,}1\,cm^3$.

2 a) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$696{,}9 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad | : \frac{4}{3} \quad | : \pi$
$166{,}3 = r^3 \quad | \sqrt[3]{\ }$
$r = 5{,}5$
Der Radius der Kugel beträgt $5{,}5\,cm$.
b) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$2144{,}7 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad | : \frac{4}{3} \quad | : \pi$
$512{,}0 = r^3 \quad | \sqrt[3]{\ }$
$r = 8{,}0$
Der Radius der Kugel beträgt $8{,}0\,cm$.
c) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$15{,}0 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad | : \frac{4}{3} \quad | : \pi$
$3{,}58 = r^3 \quad | \sqrt[3]{\ }$
$r = 1{,}53$
Der Radius der Kugel beträgt etwa $1{,}5\,cm$.
d) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$3000 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad | : \frac{4}{3} \quad | : \pi$
$716{,}2 = r^3 \quad | \sqrt[3]{\ }$
$r = 8{,}95$
Der Radius der Kugel beträgt $8{,}95\,cm$.

A $r = 8{,}5\,cm$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8{,}5^3$
$V = 2572{,}4\,cm^3$
$d = 13\,cm;\ r = 6{,}5\,cm$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6{,}5^3$
$V = 1150{,}3\,cm^3$

$r = 4{,}5\,cm$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4{,}5^3$
$V = 381{,}7\,cm^3$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$1767{,}1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad | : \frac{4}{3} \quad | : \pi$
$421{,}86 = r^3 \quad | \sqrt[3]{\ }$
$r = 7{,}5\,cm$

Seite 69, links

3 a) $r = 28{,}6\,mm = 2{,}86\,cm$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}86^3$
$V = 98{,}0$
Das Volumen der Kugel beträgt $98{,}0\,cm^3$.
b) $r = 1{,}4\,cm$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}4^3$
$V = 11{,}5$
Das Volumen der Kugel beträgt $11{,}5\,cm^3$.

Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

4 a) Luis hat in der Volumenformel mit $\frac{3}{4}$ statt mit $\frac{4}{3}$ gerechnet.
Marie rechnet in cm statt in dm, den Wert hat sie richtig umgewandelt. Ihr Ergebnis ist in cm^3 angegeben, was auch korrekt ist. Sie hat allerdings in der 3. Zeile vergessen, den Wert für den Radius „hoch 3“ zu rechnen.
Die richtige Rechnung lautet:
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}2^3$
$V = 7{,}24\,dm^3$

5 Radius einer Kugel: $r = 2\,cm$
$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3$
$V_{Kugel} = 33{,}5\,cm^3$
Volumen aller Eiskugeln:
$V_{Eis} = 3 \cdot 33{,}5$
$V_{Eis} = 100{,}5\,cm^3$
Jan bekommt etwa 100 ml Eis.

6 Radius $r = 2{,}5\,cm$
Es gilt: $V_{Kugel} = V_{Kegel}$ und
Gesucht ist die Höhe h des Kegels.
$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}5^3$
$V_{Kugel} = 65{,}45\,cm^3$
$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
$65{,}45 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot h \quad | \cdot 3 \quad | :\pi \quad | :2{,}5^2$
$10{,}0 = h$
Noch etwas schneller kommt man zum Ergebnis, wenn man die beiden Formeln gleichsetzt (da das Volumen dasselbe ist).
$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}5^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot h \quad | \cdot 3 \quad | :\pi$
$4 \cdot 2{,}5^3 = 2{,}5^2 \cdot h \quad | :2{,}5^2$
$10 = h$
Die Höhe des Kegels beträgt 10,0 cm.

7 a) Individuelle Schätzungen
Volumen der Kugel:
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 7{,}5^3$
$V = 1767{,}15\,cm^3$
Gewicht der Kugel (in g):
$1767{,}15 \cdot 19{,}3 = 34\,106{,}0$
$34\,106\,g \approx 34{,}1\,kg$
Die Goldkugel wiegt etwa 34,1 kg.

b) Durchmesser der Kugel aus Kork:
Eine Kugel aus Kork müsste ein Volumen von $2 \cdot 34\,106\,cm^3 = 68\,212\,cm^3$ haben, um genauso schwer zur sein wie die Goldkugel, denn ein cm^3 wiegt nur ein halbes Gramm.
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_{Kork}^3$
$68\,212 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_{Kork}^3 \quad | :\frac{4}{3} \quad | :\pi$
$r_{Kork}^3 = 16\,284{,}42 \quad | \sqrt[3]{}$
$r_{Kork} = 25{,}35\,cm$
$d_{Kork} = 50{,}7\,cm$
Die Kugel aus Kork hätte einen Durchmesser von 50,7 cm.

Seite 69, rechts

3 große Kugel: $r = 2\,cm$
$V_{groß} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3$
$V_{groß} = 33{,}5\,cm^3$
Zwei kleine Kugeln: $r = 1{,}5\,cm$ (jeweils)
$V_{kleine} = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^3$
$V_{kleine} = 28{,}3\,cm^3$
Wenn Jule mehr Eis haben will, dann sollte sie sich für eine große Kugel Eis entscheiden.

4 a) $r = 16\,cm$
Volumen der halben Melone:
$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 16^3$
$V = 8578{,}6\,cm^3 = 8{,}6\,l$
b) $r = 12{,}5\,cm$
$\frac{45°}{360°} = \frac{1}{8} = 0{,}125; \quad 1 - 0{,}125 = 0{,}875$
Das Melonenstück entspricht 0,875 einer ganzen Melone.
$V = 0{,}875 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 12{,}5^3$
$V = 7158{,}6\,cm^3 = 7{,}2\,l$

5 a) $r_{Tropfen} = 2{,}5\,mm$
Volumen eines Wassertropfens:
$V_{Tropfen} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}5^3$
$V_{Tropfen} = 65{,}45\,mm^3$
Es fällt ein Tropfen alle drei Sekunden, das sind 20 Tropfen in einer Minute.
In einer Stunde: $20 \cdot 60$ Tropfen;
In einem Tag: $20 \cdot 60 \cdot 24$ Tropfen;
In einem Jahr: $20 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365$
$20 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 10\,512\,000$
Gesamtvolumen der Tropfen (in mm^3):
$10\,512\,000 \cdot 65{,}45 = 688\,010\,400$
$688\,010\,400\,mm^3 \approx 688{,}0\,dm^3 = 688{,}0\,l$
In einem Jahr gehen knapp 700 l Wasser verloren.

Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

6 Äußeren Radius berechnen

$7{,}1 = \pi\, r_{\text{außen}}^2 \quad |:\pi$

$2{,}26 = r_{\text{außen}}^2 \quad |\sqrt{}$

$r_{\text{außen}} = 1{,}50\,\text{m}$

Innerer Radius: $1{,}50 - 0{,}45 = 1{,}05$

$r_{\text{innen}} = 1{,}05\,\text{m}$

$V_{\text{Wand}} = V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}}$

$V_{\text{Wand}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}05^3$

$V_{\text{Wand}} = 9{,}3\,\text{m}^3$

Es wurden also $9{,}3\,\text{m}^3$ Eis verbaut.

7 Individuelle Beispiele

Allgemein gilt:

$V_{\text{Halbkugel}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \Rightarrow \quad V_{\text{Halbkugel}} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r \quad \Rightarrow \quad V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot r \quad \Rightarrow \quad V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^3$

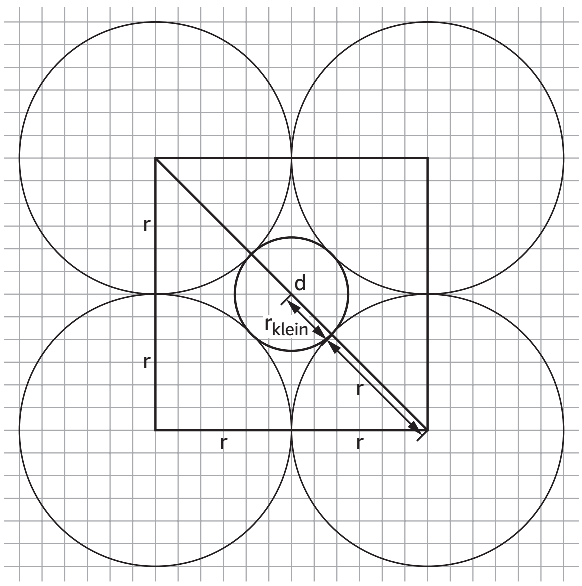
Damit erhält man folgende Verhältnisse:

$V_{\text{Halbkugel}} = \frac{2}{3} V_{\text{Zylinder}}$

$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} V_{\text{Zylinder}}$

$V_{\text{Halbkugel}} = 2\, V_{\text{Kegel}}$

8



Radius einer Holzkugel: r

Radius der fünften Kugel: r_{klein}

Für die Diagonale d des Quadrats gilt:

$d = \sqrt{(2r)^2 + (2r)^2}$

$d = \sqrt{4r^2 + 4r^2}$

$d = r\sqrt{8}$

Den Radius der fünften Kugel kann man mithilfe von r und d bestimmen, da es gilt:

$2r_{\text{klein}} + 2r = d$ bzw.

$2r_{\text{klein}} + 2r = r\sqrt{8}$

Der Radius r der Holzkugel kann über das Volumen berechnet werden.

Volumen Holzkugel (in dm^3):

$3{,}5\,\text{kg} = 3500\,\text{g}$

$3500 : 670 = 5{,}224$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$5{,}224 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad |:\frac{4}{3} \quad |:\pi$

$1{,}247 = r^3 \quad |\sqrt[3]{}$

$r = 1{,}08\,\text{dm}$

Radius r_{klein} der fünften Kugel:

$2r_{\text{klein}} + 2r = r\sqrt{8}$

$2r_{\text{klein}} + 2 \cdot 1{,}08 = 1{,}08 \cdot \sqrt{8}$

$2r_{\text{klein}} = 0{,}895$

$r_{\text{klein}} = 0{,}45\,\text{dm}$

Der Radius der Kugel in der Mitte kann maximal 0,45 dm groß sein.

Volumen der fünften Kugel:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}45^3$

$V = 0{,}38\,\text{dm}^3$

Gewicht der Kugel (in g):

$0{,}38 \cdot 670 = 254{,}6$

Die fünfte Kugel kann höchstens 255 g wiegen.

6 Kugel. Oberflächeninhalt — Seiten 70, 71

Seite 70

Einstieg

→ Genaugenommen hat Carmen recht: es gibt kein Netz der Kugel, weil die Kugeloberfläche an allen Stellen gekrümmt ist. Die in den zwei Grafiken dargestellten Netze sind aber gute Annäherungen und geben einen Eindruck von der Kugeloberfläche.

1 a) $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$O = 4 \cdot \pi \cdot 3^2$

$O = 113{,}1$

Die Oberfläche der Kugel beträgt $113{,}1\,\text{cm}^2$.

b) $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$O = 4 \cdot \pi \cdot 7^2$

$O = 615{,}7$

Die Oberfläche der Kugel beträgt $615{,}7\,\text{cm}^2$.

c) $d = 8{,}0\,\text{cm}$, also $r = 4{,}0\,\text{cm}$

$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$O = 4 \cdot \pi \cdot 4^2$

$O = 201{,}1$

Die Oberfläche der Kugel beträgt $201{,}1\,\text{cm}^2$.

d) $d = 17{,}0\,\text{cm}$, also $r = 8{,}5\,\text{cm}$

$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$O = 4 \cdot \pi \cdot 8{,}5^2$

$O = 907{,}9$

Die Oberfläche der Kugel beträgt $907{,}9\,\text{cm}^2$.

2 a) Radius berechnen:
$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
$380{,}1 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \quad |:4 \quad |:\pi$
$r^2 = 30{,}25$
$r = 5{,}5\,cm$
b) $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
$1809{,}6 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \quad |:4 \quad |:\pi$
$r^2 = 144{,}00$
$r = 12{,}0\,cm$
c) $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
$28{,}3 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \quad |:4 \quad |:\pi$
$r^2 = 2{,}25$
$r = 1{,}5\,cm$
d) $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
$1134{,}1 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \quad |:4 \quad |:\pi$
$r^2 = 90{,}25$
$r = 9{,}5\,cm$

A a) $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
$O = 4 \cdot \pi \cdot 7{,}4^2 = 688{,}13$
Der Oberflächeninhalt der Kugel beträgt $688{,}1\,cm^2$.
b) $d = 21\,cm$; $r = 10{,}5\,cm$
$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
$O = 4 \cdot \pi \cdot 10{,}5^2 = 1385{,}44$
Der Oberflächeninhalt der Kugel beträgt $1385{,}4\,cm^2$.
c) $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
$1963{,}5 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \quad |:4 \quad |:\pi$
$156{,}25 = r^2 \quad |\sqrt{\ }$
$12{,}5 = r$
$r = 12{,}5\,cm$
$d = 2 \cdot r = 25{,}0$
Der Durchmesser der Kugel beträgt 25 cm.

Seite 71, links

3

	r	d	O	V
a)	3,8	**7,2**	**181,9**	**229,8**
b)	**3,2**	6,4	**128,7**	**137,3**
c)	**5,7**	**11,4**	408,3	**775,7**
d)	**4,19**	**8,4**	**220,6**	73,6

4 Mit der Orangenschale, die die Oberfläche der Orange bildet, werden vier Kreise bedeckt, die den gleichen Radius wie die Orange haben. Das passt zur Oberflächeninhaltsformel, denn es gilt:
$O_{Orange} = 4 \cdot (\pi \cdot r^2)$ bzw.
$O_{Orange} = 4 \cdot A_{Kreis}$.

5 $d = 20{,}4\,m$, also $r = 10{,}2\,m$
Die vergoldete Kuppel ist eine Halbkugel.
$O = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$
$O = 2 \cdot \pi \cdot 10{,}2^2$
$O = 653{,}7\,m^2$

6 a) Radius r des Mondes:
$u = 2 \cdot \pi \cdot r$
$10\,900 = 2 \cdot \pi \cdot r \quad |:2 \quad |:\pi$
$r = 1735\,km$
Oberflächeninhalt des Mondes:
$O_{Mond} = 4 \cdot \pi \cdot 1735^2$
$O_{Mond} = 37\,828\,600$
Die Oberfläche des Mondes beträgt etwa 37,8 Mio. km^2.
b) $d = 12\,742\,km$, also $r = 6371\,km$
$O_{Erde} = 4 \cdot \pi \cdot 6371^2$
$O_{Erde} = 510\,064\,500$
Die Oberfläche der Erde beträgt etwa 510,0 Mio. km^2.
Vergleich der Oberflächeninhalte:
$\frac{O_{Mond}}{O_{Erde}} = \frac{37{,}8\text{ Mio.}}{510{,}0\text{ Mio.}} = 0{,}074 = 7{,}4\,\%$
Der Größe der Mondoberfläche beträgt etwa 7,4 % der Größe der Erdoberfläche.
c) $r_{Äq} = 6378{,}137\,km$; $r_{Pol} = 6356{,}752\,km$
Volumen zu Äquatorradius $r_{Äq}$
$V_{Äq} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6378{,}137^3$
$V_{Äq} = 1{,}086\,85 \cdot 10^{12}\,km^3$
Volumen zu Polarradius r_{Pol}
$V_{Pol} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6356{,}752^3$
$V_{Pol} = 1{,}075\,96 \cdot 10^{12}\,km^3$
Volumen zum mittleren Radius $r = 6371\,km$
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6371^3$
$V = 1{,}08321 \cdot 10^{12}\,km^3$
Volumenverhältnisse
$\frac{V_{Äq} - V}{V} = \frac{1{,}086\,85 \cdot 10^{12} - 1{,}083\,21 \cdot 10^{12}}{1{,}08321 \cdot 10^{12}} = 0{,}0034 = 0{,}34\,\%$
$\frac{V_{Pol} - V}{V} = \frac{1{,}07596 \cdot 10^{12} - 1{,}08321 \cdot 10^{12}}{1{,}08321 \cdot 10^{12}} = -0{,}0067 = -0{,}67\,\%$
Das Volumen einer Kugel mit Äquatorradius weicht um 0,34 % vom Volumen der Kugel mit mittleren Durchmesser $d = 12\,742\,km$ ab; das Volumen einer Kugel mit Polarradius weicht von diesem Volumen um 0,67 % nach unten ab.

Seite 71, rechts

3 a) $d_{außen} = 22{,}5\,m$, also $r_{außen} = 11{,}25\,m$
$O_{außen} = 4 \cdot \pi \cdot 11{,}25^2$
$O_{außen} = 1590{,}4$
Die bemalte Fläche ist $1590{,}4\,m^3$ groß.

b) Wandstärke: 24,5 mm = 0,0245 m
$r_{innen} = r_{außen}$ − Wandstärke
$r_{innen} = 11{,}25 - 0{,}0245$
$r_{innen} = 11{,}2255\,m$
Oberflächeninhalt innen
$O_{innen} = 4 \cdot \pi \cdot 11{,}2255^2$
$O_{innen} = 1583{,}5$
Die innere Oberfläche ist 1583,5 m³ groß.
c) Volumen der Hülle:
$V_{Hülle} = V_{außen} - V_{innen}$
$V_{Hülle} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot {r_{außen}}^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot {r_{innen}}^3$
$V_{Hülle} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 11{,}25^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 11{,}2255^3$
$V_{Hülle} = 38{,}88\ m^3$
Für die Dichte gilt:
$7{,}86\,g/cm^3 = 7{,}86\,kg/dm^3 = 7{,}86\,t/m^3$
(Die Einheiten multiplizieren sich pro Schritt im Zähler wie im Nenner mit 1000)
Gewicht der Hülle (in t):
$38{,}88 \cdot 7{,}86 = 305{,}6$
Die Hülle des Gasbehälters wiegt 305,6 Tonnen.

4 $d_{Kerze1} = 10\,cm$, also $r_{Kerze1} = 5\,cm$
Beide Kerzen haben das gleiche Volumen, also gilt:
$V_{Kerze2} = V_{Kerze1}$
$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r_{Kerze2})^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 \quad \Big|:\frac{4}{3} \quad |:\pi$
$(r_{Kerze2})^3 = \frac{1}{2} \cdot 5^3$
$(r_{Kerze2})^3 = 62{,}5 \quad \Big|\sqrt[3]{\ }$
$r_{Kerze2} = 3{,}97$
Oberflächeninhalt Kerze 1 (Halbkugel):
$O_{Kerze1} = \frac{1}{2}\,O_{Kugel} + A_{Kreis}$
$O_{Kerze1} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5^2$
$O_{Kerze1} = 3 \cdot \pi \cdot 5^2$
$O_{Kerze1} = 235{,}6$
Oberflächeninhalt Kerze 2 (Kugel):
$O_{Kerze2} = 4 \cdot \pi \cdot 3{,}97^2$
$O_{Kerze2} = 198{,}1$
Vergleich der Oberflächeninhalte:
$\frac{O_{Kerze1} - O_{Kerze2}}{O_{Kerze1}} = \frac{235{,}6 - 198{,}1}{235{,}6} = 0{,}159 = 15{,}9\,\%$
Der Oberflächeninhalt der zweiten, kugelförmigen Kerze unterscheidet sich um 15,9 % vom Oberflächeninhalt der ersten, halbkugelförmigen.

5 Volumenvergleich:
Behälter A
1 Kugel mit $d = 16\,cm$, also $r = 8\,cm$
$V_A = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8^3$
$V_A = 2144{,}7\,cm^3$
Behälter B
8 Kugeln mit $d = 8\,cm$, also $r = 4\,cm$
$V_B = 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3$
$V_B = 2144{,}7\,cm^3$
Behälter C
$4^3 = 64$ Kugeln mit $d = 4\,cm$, also $r = 2\,cm$
$V_C = 64 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3$
$V_C = 2144{,}7\,cm^3$
Behälter D
$8^3 = 512$ Kugeln mit $d = 2\,cm$, also $r = 1\,cm$
$V_C = 512 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3$
$V_C = 2144{,}7\,cm^3$
In allen Behältern haben die Kugeln, die jeweils enthalten sind, das gleiche Volumen.
Vergleich der Oberflächeninhalte:
Behälter A
$O_A = 4 \cdot \pi \cdot 8^2$
$O_A = 256\,\pi$
$O_A = 804{,}2\,cm^2$
Behälter B
$O_B = 8 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 4^2$
$O_B = 512\,\pi$
$O_B = 1608{,}5\,cm^2$
Behälter C
$O_C = 64 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 2^2$
$O_B = 1024\,\pi$
$O_C = 3217{,}0\,cm^2$
Behälter D
$O_D = 512 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 1^2$
$O_D = 2048\,\pi$
$O_D = 6434{,}0\,cm^2$
Bei den Oberflächeninhalte stellt man fest, dass sich der Wert von Behälter zu Behälter verdoppelt. Es gilt:
$O_D = 2\,O_C$; $O_C = 2\,O_B$; $O_B = 2\,O_A$.

7 Zusammengesetzte Körper Seiten 72, 73

Seite 72

Einstieg

→ Das Werkstück ist aus einem Quader und einem Zylinder zusammengestellt.
→ David kann den Oberflächeninhalt mit den Formeln (1), (3), (4) und (5) berechnen.
Bei der Formel (2) fehlen zwei Stücke: die Grundfläche des Quaders und der Rand der Grundfläche des Zylinders, der vom Quader nicht abgedeckt wird (diese addieren sich zur Grundfläche des Kegels).
Formel (5) ist zwar vollständig, aber unnötig kompliziert. Denn hier wird der Oberflächen-

inhalt G_{Quader} einmal addiert und dann wieder subtrahiert. Vereinfacht lautet sie daher $O = M_{Quader} + G_{Kegel} + M_{Kegel}$ und ist dann gleich der Formel (3).

→ Mögliche Lösung:
$V = V_{Quader} + V_{Kegel}$

1 a) Man erkennt den Teil einer Kugel und zwei Kegel. (Den Faden, an dem das Gewicht hängt, könnte man zusätzlich als Zylinder beschreiben.)
b) Das Kirchenschiff ist ein Fünfeckprisma (bzw. besteht aus einem Quader und einem Dreieckprisma). Der Turm besteht aus zwei Trapezprismen (bzw. einem Fünfeckprisma) und einer quadratischen Pyramide.
c) Die Hütte besteht aus einem Zylinder und einem Kegel.
d) Man erkennt ein Sechseckprisma mit einer aufgesetzten Halbkugel.

Seite 73

2 a) Zylinder mit aufgesetzter Halbkugel
$V = V_{Zylinder} + V_{Halbkugel}$
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 4 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3$
$V = 469{,}1$
Das Volumen beträgt 469,1 cm^3.
b) Der Körper besteht aus zwei quadratischen Pyramiden.
$V = V_{Pyramide1} + V_{Pyramide2}$
$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_2$
$V = \frac{1}{3} \cdot 12{,}6^2 \cdot 11 + \frac{1}{3} \cdot 12{,}6^2 \cdot 18{,}5$
$V = 156{,}1$
Das Volumen beträgt 156,1 cm^3.
c) Der Körper besteht aus einem Würfel, aus dem eine Pyramide herausgeschnitten wurde.
$V = V_{Würfel} - V_{Pyramide}$
$V = a^3 - \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a$
$V = \frac{2}{3} \cdot 10{,}0^3$
$V = 666{,}7$
Das Volumen beträgt 666,7 cm^3.
d) Der Körper besteht aus einem Zylinder, aus dem ein kleiner Würfel herausgeschnitten wurde.
$V = V_{kegel} - V_{Würfel}$
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h - a^3$
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 10 - 3^3$
$V = 350{,}0$
Das Volumen beträgt 350,0 cm^3.

3 a) Zylinder mit aufgesetztem Kegel
$O = O_{Kegel} + M_{Zylinder}$
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s + 2\pi \cdot r \cdot h_{Zylinder}$
$O = \pi \cdot 12{,}5^2 + \pi \cdot 12{,}5 \cdot 30 + 2 \cdot \pi \cdot 12{,}5 \cdot 12$
$O = 2611{,}4$
Der Oberflächeninhalt beträgt 2611,4 cm^2.
b) Quader mit aufgesetztem Halbzylinder
$O = M_{Quader} + G_{Quader} + \frac{1}{2} O_{Zylinder}$
$O = 2(a + b) \cdot h_{Quader} + a \cdot b$
$+ \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h_{Zylinder})$
$O = 2(a + b) \cdot h_{Quader} + a \cdot b$
$+ \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot h_{Zylinder}$
$O = 2(18 + 20) \cdot 9 + 18 \cdot 20$
$+ \pi \cdot 9^2 + \pi \cdot 9 \cdot 20$
$O = 1044 + 820{,}0$
$O = 1864{,}0$
Der Oberflächeninhalt beträgt 1864,0 cm^2.
c) Pyramide mit herausgearbeiteter Halbkugel
$O = O_{Pyramide} + \frac{1}{2} \cdot O_{Kugel} - A_{Kreis}$
$O = 2 \cdot a \cdot h_a + a^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 - \pi \cdot r^2$
$O = 2 \cdot a \cdot h_a + a^2 + \pi \cdot r^2$
$O = 2 \cdot 11{,}2 \cdot 10{,}8 + 11{,}2^2 + \pi \cdot 4{,}4^2$
$O = 428{,}2$
Der Oberflächeninhalt beträgt 428,2 cm^2.
d) Würfel mit herausgearbeitetem Zylinder
$O = O_{Würfel} + M_{Zylinder} - A_{Kreis}$
$O = 6 \cdot a^2 + \pi \cdot r \cdot s - \pi \cdot r^2$
s berechnen
$s = \sqrt{r^2 + h^2}$
$s = \sqrt{4{,}5^2 + 5^2}$
$s = 6{,}73\,cm$
$O = 6 \cdot 9^2 + \pi \cdot 4{,}5 \cdot 6{,}73 - \pi \cdot 4{,}5^2$
$O = 517{,}5$
Der Oberflächeninhalt beträgt 517,5 cm^2.

A a) Körper (1) besteht aus einer Halbkugel und einem Kegel.
Körper (2) ist ein Dreieckprisma, aus dem ein Zylinder herausgearbeitet wurde.
b) (1) $V = V_{Halbkugel} + V_{Kegel}$
Höhe h des Zylinders:
$5^2 = h^2 + \left(\frac{7{,}2}{2}\right)^2$
$h^2 = 5^2 - 3{,}6^2$
$h = \sqrt{5^2 - 3{,}6^2} = 3{,}47$
$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}6^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}6^2 \cdot 3{,}47 = 144{,}81$
Das Volumen des Körpers beträgt 144,8 cm^3.
(2) $V = V_{Dreieckprisma} - V_{Zylinder}$

Grundflächenhöhe h_a:
$h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$
$h_a^2 + 2{,}5^2 = 5^2 \quad | -2{,}5^2$
$h_a^2 = 5^2 - 2{,}5^2 \quad | \sqrt{\ }$
$h_a = 4{,}33\,cm$
V berechnen:
$V = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \cdot h - \pi \cdot r^2 \cdot h$
$V = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4{,}33 \cdot 2{,}6 - \pi \cdot 1^2 \cdot 2{,}6 = 19{,}98$
Das Volumen des Körpers beträgt $20{,}0\,cm^3$.
c) (1) $O = \frac{1}{2} \cdot O_{Kugel} + M_{Kegel}$
$O = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$O = 2 \cdot \pi \cdot 3{,}6^2 + \pi \cdot 3{,}6 \cdot 5 = 137{,}98$
Der Oberflächeninhalt des Körpers beträgt $138{,}0\,cm^2$.
(2) $O = O_{Dreieckprisma} - 2 \cdot G_{Zlinder} + M_{Zylinder}$
$O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a + u \cdot h - 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
$O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4{,}33 + (3 \cdot 5) \cdot 2{,}6 - 2 \cdot \pi \cdot 1^2$
$+ 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 2{,}6 = 70{,}70$
Der Oberflächeninhalt des Körpers beträgt $70{,}7\,cm^2$.

Seite 73, links

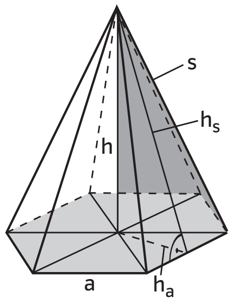
4 a) Der Körper besteht aus zwei Dreieckprismen; das Prisma links liegt auf seiner Grundfläche, das andere auf einem Mantelrechteck.
Volumen V:
$V = V_{Prisma1} + V_{Prisma2}$
$V = \left(\frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot b_1\right) \cdot h_1 + \left(\frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot b_2\right) \cdot h_2$
$V = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6$
$V = 36$
Das Volumen beträgt $36{,}0\,cm^3$.
Oberflächeninhalt O:
Zuerst werden die fehlenden Hypotenusen in den dreieckigen Grundflächen berechnet.

Hypotenuse c_1	Hypotenuse c_2
$c_1 = \sqrt{4^2 + 6^2}$	$c_2 = \sqrt{2^2 + 2^2}$
$c_1 = 7{,}21\,cm$	$c_2 = 2{,}83\,cm$

$O = O_{Prisma1} + O_{Prisma2} - 2 \cdot A_{Rechteck}$
$O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 + (4 + 6 + 7{,}21) \cdot 2$
$+ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + (2 + 2 + 2{,}83) \cdot 6 - 2 \cdot (2 \cdot 6)$
$O = 79{,}4$
Der Oberflächeninhalt beträgt $79{,}4\,cm^2$.
b) Der Körper besteht aus einem Zylinder und einem aufgesetzten Kegel.
Volumen V:
$V = V_{Zylinder} + V_{Kegel}$
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h_{Zylinder} + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_{Kegel}$
$V = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 3$
$V = 39{,}3$
Das Volumen beträgt $39{,}3\,cm^3$.
Oberflächeninhalt O:
s berechnen:
$s = \sqrt{2{,}5^2 + 3^2}$
$s = 3{,}91\,cm$
$O = M_{Zylinder} + O_{Kegel}$
$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h_{Zylinder} + \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r^2$
$O = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}5 \cdot 1 + \pi \cdot 2{,}5 \cdot 3{,}91 + \pi \cdot 2{,}5^2$
$O = 66{,}05$
Der Oberflächeninhalt beträgt $66{,}05\,cm^2$.
c) Der Körper besteht aus einem auf der Mantelfläche liegendem Trapezprisma und einer aufgesetzten quadratischen Pyramide.
Volumen:
$V = V_{Prisma} + V_{Pyramide}$
$V = \frac{a + c}{2} \cdot h_T \cdot h_{Prisma} + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_{Pyr}$
Höhe der Pyramide h_{Pyr}:
$h_{Pyr} = \sqrt{h_s{}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_{Pyr} = \sqrt{8{,}5^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2}$
$h_{Pyr} = 4\,cm$
$V = \frac{10 + 15}{2} \cdot 8 \cdot 15 + \frac{1}{3} \cdot 15^2 \cdot 4$
$V = 1800$
Das Volumen beträgt $1800{,}0\,cm^3$.
Oberflächeninhalt:
$O = O_{Prisma} - A_{Quadrat} + M_{Pyramide}$
Fehlende Seitenlänge der trapezförmigen Grundfläche des Prismas berechnen:
$d = \sqrt{8^2 + (15 - 10)^2}$
$d = 9{,}43\,cm$
$O = 2 \cdot \frac{a + c}{2} \cdot h_T + (a + b + c + d) \cdot h_{Prisma}$
$- a \cdot h_{Prisma} + 2 \cdot a \cdot h_s$
$O = 2 \cdot \frac{10 + 15}{2} \cdot 8 + (15 + 15 + 10 + 9{,}43) \cdot 15$
$- 15 \cdot 15 + 2 \cdot 15 \cdot 8{,}5$
$O = 971{,}5$
Der Oberflächeninhalt beträgt $971{,}5\,cm^2$.

Seite 73, rechts

4 a) Der Körper besteht aus einem Sechseckprisma, aus dem unten eine Sechseckpyramide herausgeschnitten und oben aufgesetzt wurde.
Das Volumen des Körpers ist damit gleich dem Volumen des Prismas.
$V = V_{Prisma}$
$V = G_{Sechseck} \cdot h_{Prisma}$



Volumen:
Fläche des Sechsecks mit Seitenlänge $a = 7{,}6\,cm$ berechnen:

$A_{Sechseck} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

$h_a = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_a = \sqrt{7{,}6^2 + 3{,}8^2}$

$h_a = 8{,}50\,cm$

$A_{Sechseck} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7{,}6 \cdot 8{,}5$

$A_{Sechseck} = 193{,}8\,cm$

$V = 193{,}8 \cdot 6{,}4$

$V = 1240{,}3$

Das Volumen beträgt $1240{,}3\,cm^3$.

Oberflächeninhalt:

$O = M_{Prisma} + 2 \cdot M_{Pyramide}$

$O = 6 \cdot a \cdot h_{Prisma} + 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$

$O = 6 \cdot a \cdot h_{Prisma} + 6 \cdot a \cdot h_s$

Höhe h_s der Seitendreiecke berechnen

$h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_s = \sqrt{9{,}4^2 - 3{,}8^2}$

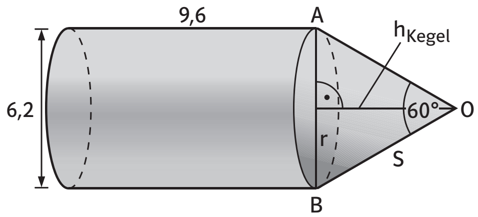
$h_s = 8{,}60\,cm$

$O = 6 \cdot 7{,}6 \cdot 6{,}4 + 6 \cdot 7{,}6 \cdot 8{,}6$

$O = 864$

Der Oberflächeninhalt beträgt $864{,}0\,cm^2$.

b)



Zylinder mit aufgesetztem Kegel

Volumen:

$V = V_{Zylinder} + V_{Kegel}$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h_{Zylinder} + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_{Kegel}$

Höhe des Kegels berechnen

$\tan\left(\frac{60^\circ}{2}\right) = \frac{r}{h_{Kegel}}$

$\tan 30^\circ = \frac{3{,}1}{h_{Kegel}} \quad | \cdot h_{Kegel.} \quad | : \tan 30^\circ$

$h_{Kegel} = \frac{3{,}1}{\tan 30^\circ}$ ((Punkt?))

$h_{Kegel} = 5{,}37\,cm$

$V = \pi \cdot 3{,}1^2 \cdot 9{,}6 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}1^2 \cdot 5{,}37$

$V = 343{,}9$

Das Volumen beträgt $343{,}9\,cm^3$.

Oberflächeninhalt:

$O = M_{Zylinder} + O_{Kegel}$

$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h_{Zylinder} + \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$

Mantellinie s berechnen:
Das Dreieck ABO (vgl. Skizze oben) ist gleichseitig, da es gleichschenklig ist und der Winkel an der Spitze 60° beträgt. Damit gilt:
$s = 2r$, also $s = 6{,}2\,cm$.

$O = 2 \cdot \pi \cdot 3{,}1 \cdot 9{,}6 + \pi \cdot 3{,}1^2 + \pi \cdot 3{,}1 \cdot 6{,}2$

$O = 277{,}6$

Der Oberflächeninhalt beträgt $277{,}6\,cm^2$.

Seite 74, links

5 a) Oberflächeninhalt:

$O = M_{Quader} + M_{Pyramide}$

$O = 4 \cdot a \cdot h_{Quader} + 2 \cdot a \cdot h_s$

$O = 4 \cdot 3 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 3 \cdot 1{,}6$

$O = 39{,}6$

Die Außenfläche ist $39{,}6\,m^2$ groß.

b) Höhe der Pyramide:

$h_{Pyr} = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_{Pyr} = \sqrt{1{,}6^2 - 1{,}5^2}$

$h_{Pyr} = 0{,}56\,m$

Volumen

$V = V_{Quader} + V_{Pyramide}$

$V = a^2 \cdot h_{Quader} + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_{Pyr}$

$V = 3^2 \cdot 2{,}5 + \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 0{,}56$

$V = 24{,}2$

Der Rauminhalt des Pavillons beträgt $24{,}2\,m^3$.

6 a) äußerer Radius: $r_a = 24\,cm$;
innerer Radius: $r_i = 24 - 0{,}5$
$r_i = 23{,}5\,cm$
Höhe des Zylinders: $h = 5\,m = 500\,cm$
Das Volumen des Materials berechnet man, indem man das Volumen des inneren Zylinders vom Volumen des gesamten Rohrs subtrahiert.

$V = V_{außen} - V_{innen}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_a^2 \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_i^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 24^2 \cdot 500 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 23{,}52 \cdot 500$

$V = 12\,435{,}5\,cm^3$

Gewicht (in g):
$12\,435{,}5 \cdot 7{,}3 = 90\,779{,}15$
$90\,779{,}15\,g \approx 90{,}8\,kg$
Das Rohr aus Gusseisen wiegt knapp 91 kg.

7 a) Das Silo bildet einen zusammengesetzten Körper; dieser besteht aus einem Kegel, einem Zylinder und einer Halbkugel.

$V = V_{Kegel} + V_{Zylinder} + V_{Halbkugel}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_{Keg} + \pi \cdot r^2 \cdot h_{Zyl} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 5 + \pi \cdot 3^2 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3$

$V = 273{,}3$

Das Fassungsvermögen des Silos beträgt $273{,}3\,m^3$.

b) Die Oberfläche, die gestrichen werden soll, besteht aus dem Mantel des Zylinders und der Oberfläche der Halbkugel.

$O = M_{Zylinder} + O_{Halbkugel}$

$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h_{Zyl} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$O = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot \pi \cdot 3^2$

$O = 169{,}65\,m^2$

benötigte Farbe:

Fläche (in m^2)	Farbe (in l)
50	7,5
1	0,15
169,65	25,45

Für das Streichen des oberirdischen Teils des Silos werden 25,45 l Farbe benötigt.

c) Gesamthöhe des Silos: 14,0 m

$\frac{3}{4} \cdot 14{,}0 = 10{,}5$

Das Silo ist bis zu einer Höhe von 10,5 m gefüllt. Das bedeutet, dass der kegelförmige Teil ganz gefüllt und der zylinderförmige Teil bis zu einer Höhe von 5,5 m gefüllt ist.

$V = V_{Kegel} + V_{Zylinder}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_{Keg} + \pi \cdot r^2 \cdot h'_{Zyl}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 5 + \pi \cdot 3^2 \cdot 5{,}5$

V = 202,6 m3

$202{,}6\,m^3 = 202\,600\,dm^3 = 202\,600\,l = 2026\,hl$

Gewicht des Roggens (in kg):

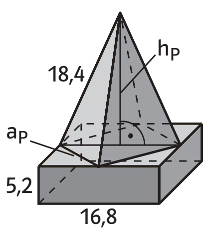
bei $70\frac{kg}{hl}$: $2026 \cdot 70 = 141\,820$

bei $75\frac{kg}{hl}$: $2026 \cdot 75 = 151\,950$

Der Roggen wiegt zwischen 142 und 152 Tonnen.

Seite 74, rechts

5



Der Körper besteht aus einem Quader mit quadratischer Grundfläche und einer quadratischen Pyramide.

Zuerst werden die Höhe der Pyramide h_P und die Seitenlänge a_P ihrer Grundfläche berechnet. a_P ist so lang wie die halbe Diagonale der quadratischen Grundfläche des Quaders. Es gilt:

$a_P = \sqrt{\left(\frac{16{,}8}{2}\right)^2 + \left(\frac{16{,}8}{2}\right)^2}$

$a_P = 11{,}88\,cm$

Höhe der Pyramide:

$h_P = \sqrt{18{,}4^2 - \left(\frac{16{,}8}{2}\right)^2}$

$h_P = 16{,}37\,cm$

Volumen des Körpers:

$V = V_{Quader} + V_{Pyramide}$

$V = 16{,}8^2 \cdot 5{,}2 + \frac{1}{3} \cdot 11{,}88^2 \cdot 16{,}37$

$V = 2237{,}7$

Das Volumen des Körpers beträgt $2237{,}7\,cm^3$.

Oberflächeninhalt O:

$O = O_{Prisma} + M_{Pyramide} - G_{Pyramide}$

$O = 2 \cdot a_Q^2 + 4 \cdot a_Q \cdot h_Q + 2 \cdot a_P \cdot h_s - a_P^2$

Höhe h_s der Seitendreiecke:

$h_s = \sqrt{h_P^2 + \left(\frac{a_P}{2}\right)^2}$

$h_s = \sqrt{16{,}37^2 + \left(\frac{11{,}88}{2}\right)^2}$

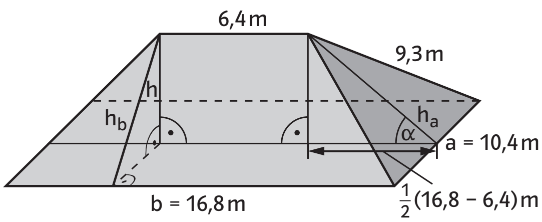
$h_s = 17{,}41\,cm$

$O = 2 \cdot 16{,}8^2 + 4 \cdot 16{,}8 \cdot 5{,}2$
$\quad + 2 \cdot 11{,}88 \cdot 17{,}41 - 11{,}88^2$

$O = 1186{,}4$

Der Oberflächeninhalt beträgt $1186{,}4\,cm^2$.

6



a) Höhe h_a der Seitendreiecke berechnen (vgl. Skizze):

$h_a = \sqrt{9{,}3^2 - \left(\frac{10{,}4}{2}\right)^2}$

$h_a = 7{,}71\,cm$

Höhe h (in einem der Dreiecke im Parallelschnitt) berechnen:

$h = \sqrt{7{,}71^2 - \left(\frac{16{,}8 - 6{,}4}{2}\right)^2}$

$h = \sqrt{7{,}71^2 - 5{,}2^2}$

$h = 5{,}7\,cm$

b) Die Dachfläche besteht aus zwei Trapezen und zwei Dreiecke.
Trapezhöhe h_b berechnen:

$h_b = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_b = \sqrt{7{,}71^2 + \left(\frac{10{,}4}{2}\right)^2}$

$h_b = 9{,}30\,\text{cm}$

Oberflächeninhalt der Dachfläche

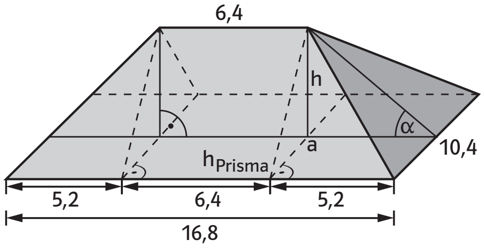
$O_{Dach} = 2 \cdot A_{Trapez} + 2 \cdot A_{Dreieck}$

$O_{Dach} = 2 \cdot \frac{16{,}8 + 6{,}4}{2} \cdot 9{,}3 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10{,}4 \cdot 7{,}71$

$O_{Dach} = 295{,}9$

Die Dachfläche ist $295{,}9\,\text{m}^3$ groß.

c)



Wenn man den Dachraum geschickt teilt (vgl. Skizze), dann sieht man, dass dieser sich aus zwei Hälften einer quadratischen Pyramide und aus einem auf der Mantelfläche liegendem Dreieckprisma zusammensetzen lässt.

$V_{Dach} = V_{Pyramide} + V_{Prisma}$

$V_{Dach} = \frac{1}{3} \cdot a_{Py} r^2 \cdot h + \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \cdot h_{Prisma}$

Dabei gilt: $a_{Pyr} = 16{,}8 - 6{,}4 = 10{,}4\,\text{cm}$ und $h_{Prisma} = 6{,}4\,\text{cm}$

(Die Angaben a bzw. h beziehen sich auf diejenigen aus Teilaufgabe a).)

$V_{Dach} = \frac{1}{3} \cdot 10{,}4^2 \cdot 5{,}7 + \frac{1}{2} \cdot 10{,}4 \cdot 5{,}7 \cdot 6{,}4$

$V_{Dach} = 395{,}2$

Das Volumen des Dachraums beträgt $395{,}2\,\text{m}^3$.

d) $\sin\alpha = \frac{h}{h_a}$; es muss also gelten:

$\sin 48° = \frac{5{,}7}{7{,}71}$ bzw. $0{,}743 \approx 0{,}739$.

Die Angabe $\alpha = 48°$ stimmt in etwa. (Genauer müsste es lauten: $\alpha = 47{,}7°$.)

e) Winkel berechnen

$\tan\beta = \frac{h}{\frac{a}{2}}$

$\tan\beta = \frac{7{,}71}{5{,}2} = 1{,}48 \;\Rightarrow\; \beta = 56°$

Der Neigungswinkel der trapezförmigen Dachfläche ist 56° groß.

7 a) Volumen:

$V = V_{Halbkugel} + V_{Kegel}$

$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (12 - 5)$

$V = 235{,}6$

Das Volumen beträgt $235{,}6\,\text{cm}^3$.

Oberflächeninhalt:

$O = M_{Kegel} + O_{Halbkugel}$

$O = \pi \cdot r \cdot s + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$

s berechnen

$s = \sqrt{h^2 + r^2}$

$s = \sqrt{7^2 + 5^2}$

$s = 8{,}6\,\text{cm}$

$O = \pi \cdot 5 \cdot 8{,}6 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 5^2$

$O = 292{,}2$

Der Oberflächeninhalt beträgt $292{,}2\,\text{cm}^2$.

b) Radius r berechnen:

$V = V_{Halbkugel} + V_{Kegel}$

$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2r$

$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$14{,}14 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \qquad \left|\, : \frac{4}{3} \quad \right| : \pi$

$r^3 = 3{,}376 \qquad \left| \sqrt[3]{} \right.$

$r = 1{,}50\,\text{cm}$

$\rightarrow\; h = 3{,}0\,\text{cm}$

s berechnen:

$s = \sqrt{h^2 + r^2}$

$s = \sqrt{3^2 + 1{,}5^2}$

$s = 3{,}35\,\text{cm}$

$O = \pi \cdot r \cdot s + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$O = \pi \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}35 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 1{,}5^2$

$O = 29{,}9$

Der Oberflächeninhalt beträgt $29{,}9\,\text{cm}^2$.

c) Es gilt: $h_g = 4r$. Für die Höhe h gilt dann:

$h = 4r - r = 3r$.

Für die Mantellinie s erhält man:

$s = \sqrt{(3r)^2 + r^2}$

$s = \sqrt{10r^2}$

$s = r\sqrt{10}$

Formel für das Volumen:

$V = V_{Halbkugel} + V_{Kegel}$

$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 3r$

$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + \pi \cdot r^3$

$V = \frac{5}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Formel für den Oberflächeninhalt:

$O = M_{Kegel} + O_{Halbkugel}$

$O = \pi \cdot r \cdot s + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$O = \pi \cdot r \cdot r\sqrt{10} + 2 \cdot \pi \cdot r^2$

$O = \pi \cdot r^2\sqrt{10} + 2 \cdot \pi \cdot r^2$

$O = \pi \cdot r^2\left(\sqrt{10} + 2\right)$

Basistraining Seiten 76, 77

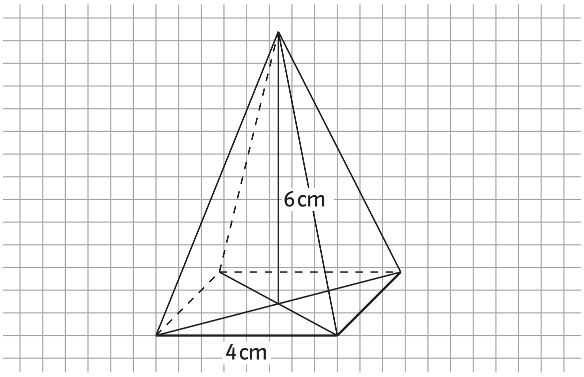
Seite 76

1 a) Volumen:
$V = G \cdot h$
$V = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 \cdot 12$
$V = 720\,cm^3$
Hypotenuse der dreieckigen Grundfläche:
$c = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$
Oberflächeninhalt:
$O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 + (8 + 15 + 17) \cdot 12$
$O = 600\,cm^2$
b) Volumen:
$V = G \cdot h$
$V = \frac{1}{2} \cdot (9 + 4{,}5) \cdot 7{,}7 \cdot 12$
$V = 623{,}7\,cm^3$
Fehlende Seite des Trapezes:
$b = \sqrt{(9 - 4{,}5)^2 + 7{,}7^2} = 8{,}92$
Oberflächeninhalt:
$O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (9 + 4{,}5) \cdot 7{,}7 + (9 + 8{,}92 + 4{,}5 + 7{,}7) \cdot 12$
$O = 465{,}4\,cm^2$
c) Volumen:
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12$
$V = 400\,cm^3$
Oberflächeninhalt:
$O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$
$O = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 13$
$O = 360\,cm^2$
Höhe h_a:
$h_a = \sqrt{5^2 + 12^2}$
$h_a = 13\,cm$
d) Volumen:
$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 4$
$V = 452{,}4\,cm^3$
Oberflächeninhalt:
$O = 2 \cdot \pi \cdot 6^2 + 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 4$
$O = 377{,}0\,cm^2$
e) Volumen:
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 6$
$V = 127{,}2\,cm^3$
Oberflächeninhalt:
$O = \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot s$
s berechnen:
$s = \sqrt{4{,}5^2 + 6^2}$
$s = 7{,}5\,cm$
$O = \pi \cdot 4{,}5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 4{,}5 \cdot 7{,}5$
$O = 275{,}7\,cm^2$
f) Volumen:
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 22^3$
$V = 44\,602{,}2\,cm^3$
Oberflächeninhalt:
$O = 4 \cdot \pi \cdot 22^2$
$O = 6082{,}1\,cm^2$

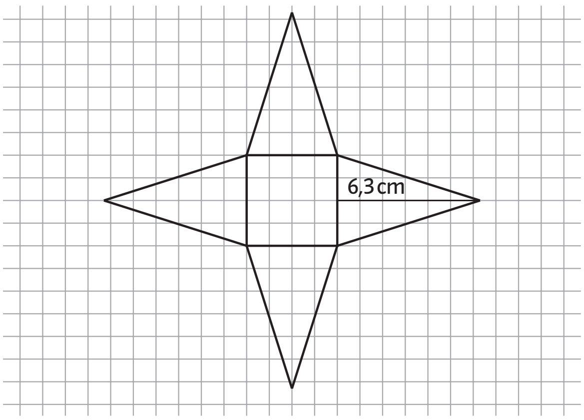
2

	a)	b)	c)	d)	e)
a	4,0	**11,2**	2,5	**7,2**	3,6
h	**4,36**	10,5	**6,0**	**7,7**	**8,0**
h_a	4,8	11,9	**6,13**	8,5	**8,2**
s	**5,2**	**13,15**	**6,25**	**9,2**	**8,4**
M	**41,6**	**266,6**	**30,65**	122,4	**59,04**
O	**57,6**	**392,0**	**36,9**	**174,2**	72,0
V	**23,3**	**439,0**	12,5	**133,1**	**34,6**

3 a) Schrägbild



Netz Pyramide:
$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_s = \sqrt{6^2 + 2^2}$
$h_s = 6{,}3\,cm$
Maßstab 1 : 1



4 a) h_a berechnen:
$h_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_a = \sqrt{8^2 - 4^2}$
$h_a = 6{,}93\,cm$
h_s berechnen:
$h_s = \sqrt{h^2 + h_a^2}$
$h_s = \sqrt{15^2 + 6{,}93^2}$
$h_s = 16{,}52\,cm$
Volumen V:
$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$
$V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 15$
$V = 320\,cm^3$

ACHTUNG: Sie arbeiten mit der Manuskriptfassung der Lösungen. Sie enthalten möglicherweise Fehler.
Gern können Sie Rückmeldungen an die folgende email-Adresse senden: SchnittpunktBW@klett.de
Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

Oberflächeninhalt O:

$O = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$

$O = 3 \cdot 8 \cdot 6{,}93 + 3 \cdot 8 \cdot 16{,}52$

$O = 562{,}8\,\text{cm}^2$

b) h berechnen:

$h = \sqrt{s^2 - a^2}$

$h = \sqrt{8{,}5^2 - 3{,}6^2}$

$h = 7{,}7\,\text{cm}$

h_a berechnen:

$h_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_a = \sqrt{3{,}6^2 - 1{,}8^2}$

$h_s = 3{,}1\,\text{cm}$

h_s berechnen:

$h_s = \sqrt{h^2 + h_a{}^2}$

$h_s = \sqrt{7{,}7^2 + 3{,}1^2}$

$h_s = 8{,}3\,\text{cm}$

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}6^2 \cdot 7{,}7$

$V = 33{,}3\,\text{cm}^3$

Oberflächeninhalt O:

$O = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$

$O = 3 \cdot 3{,}6 \cdot 3{,}1 + 3 \cdot 3{,}6 \cdot 8{,}3$

$O = 123{,}1\,\text{cm}^2$

5
- Der Radius a im Schrägbild entspricht dem Radius e im Netz.
- Die Kreislinie c im Schrägbild entspricht der Kreislinie i und der Bogenlänge h im Netz.
- Die Mantellinie d entspricht dem Radius g bzw. f des Kreisausschnitts im Netz.

Die anderen Elemente haben keinen Partner: zur Höhe b im Schrägbild gibt es keine Entsprechung im Netz; die Winkel α im Schrägbild und β im Netz beschreiben unterschiedliche Winkel.

6

	a)	b)	c)	d)	e)
r	3,4	**3,6**	**4,8**	**3,9**	**0,9**
d	**6,8**	7,2	**9,6**	7,8	**1,8**
h	6,5	**7,8**	**5,5**	**8,0**	4,0
s	**7,34**	8,6	7,3	**8,9**	**4,1**
M	**78,4**	**97,3**	110,1	**109,0**	**14,1**
O	**114,7**	**138,0**	**182,5**	156,8	**16,7**
V	**82,3**	**106,0**	**132,7**	127,4	3,4

Seite 77

7 a) Der Körper besteht aus zwei gleich großen Kegeln (mit $r = 4{,}0\,\text{cm}$ und $h = 6{,}0\,\text{cm}$ jeweils).

Für das Volumen gilt:

$V = 2 \cdot V_{Kegel}$

$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 6$

$V = 201{,}1\,\text{cm}^3$

Oberflächeninhalt O:

$O = 2 \cdot M_{Kegel}$

$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot s$

$O = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 7{,}2$

$O = 181{,}0\,\text{cm}^2$

s berechnen:

$s = \sqrt{h^2 + r^2}$

$s = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7{,}2$

b) Der Körper besteht aus einer großen Halbkugel und zwei kleineren, gleich großen Halbkugeln, welche sich zu einer ganzen Kugel ergänzen lassen. (Radius $r_{groß} = 7{,}0\,\text{cm}$; $r_{klein} = 3{,}5\,\text{cm}$)

Volumen V:

$V = \frac{1}{2} V_{groß} + V_{klein}$

$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3_{groß} + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3_{klein}$

$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 7^3 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}5^3$

$V = 898{,}0\,\text{cm}^3$

Oberflächeninhalt O:

$O = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2_{groß} + 4 \cdot \pi \cdot r^2_{klein}$
$\quad + \pi \cdot r^2_{groß} - 2 \cdot \pi \cdot r^2_{klein}$

$O = 3 \cdot \pi \cdot r^2_{groß} + 2 \cdot \pi \cdot r^2_{klein}$

$O = 3 \cdot \pi \cdot 7^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3{,}5^2$

$O = 538{,}8\,\text{cm}^2$

8 a) $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$725{,}8 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \qquad |:4 \quad |:\pi$

$57{,}76 = r^2 \qquad |\sqrt{\ }$

$r = 7{,}60\,\text{cm}$

b) Volumen der Kugel:

$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 7{,}6^3$

$V_{Kugel} = 1738{,}8\,\text{cm}^3$

Damit erhält man: $V_{Würfel} = 1738{,}78\,\text{cm}^3$; für die Kantenlänge a des Würfels gilt daher:

$a^3 = 1738{,}8 \qquad |\sqrt[3]{\ }$

$a = 12{,}25$

Der Würfel hat eine Kantenlänge von etwa 12,25 cm.

9 a) Sina hat richtig gerechnet. Der Fehler ist in Janas Rechnung zu finden: sie hat beim inneren Zylinder mit einem Radius von 2 cm statt 1,5 cm gerechnet. (Vermutlich hat sie dabei die Wandstärke mit dem Radius verwechselt). Richtig ist:

$V = V_{außen} - V_{innen}$

$V = \pi \cdot r_a{}^2 \cdot h - \pi \cdot r_i^2 \cdot h$

$V = \pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 4 - \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 4$

$V = 153{,}94 - 28{,}27 = 125{,}67$

Das Volumen beträgt $125{,}7\,\text{cm}^3$.

b) $r_a = 0{,}5\,\text{m} = 50\,\text{cm}$; $r_i = 30\,\text{cm}$

Berechnung des Volumens, z. B. nach dem Verfahren von Sina:

$G = \pi \cdot r_a{}^2 - \pi \cdot r_i{}^2$

$G = \pi \cdot 50^2 - \pi \cdot 30^2 = 5026{,}55$

$V = G \cdot h$
$V = 5026{,}55 \cdot 50 = 251\,327{,}5$
Das Volumen beträgt $251\,327{,}5\,cm^3$ bzw. ca. $0{,}25\,m^3$.

10 $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 16{,}5$
$V = 155{,}5\,cm^3 = 155\,ml$
Die Angaben des Herstellers stimmen.

11 $d = 24\,cm$, also $r = 12\,cm$;
$h = 30\,cm$
Volumen der Bumenampeln:
$V_{ges} = 2 \cdot V_{Kegel}$
$V_{ges} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
$V_{ges} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 30$
$V_{ges} = 9047{,}8\,cm^3 \approx 9{,}0\,dm^3 = 9{,}0\,l$
Für beide Blumenampeln benötigt man etwa 9 Liter Erde.

12 a) Die Dachoberfläche entspricht der Mantelfläche eines Kegels.
$d = 13\,m$, also $r = 6{,}5\,m$; $h_{Kegel} = 13\,m$
Mantellinie s:
$s = \sqrt{13^2 + 6{,}5^2} = 14{,}53$
Mantelflächeninhalt:
$M = \pi \cdot 6{,}5 \cdot 14{,}53$
$M = 296{,}7$
Die Dachfläche ist etwa $297\,m^3$ groß.
b) $V = V_{Zyl} + V_{Kegel}$
$V = \pi \cdot 6{,}5^2 \cdot (30 - 13) + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6{,}5^2 \cdot 13$
$V = 2831{,}6$
Das Volumen des Turms beträgt etwa $2832\,m^3$.

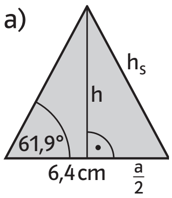
13 a) $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$
$8840{,}42 = \frac{1}{3} \cdot 35^2 \cdot h \quad | \cdot 3 \quad | : 35^2$
$h = 21{,}65$
Die Pyramide ist $21{,}65\,m$ hoch.
b) Seitenhöhe h_s berechnen
$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_s = \sqrt{21{,}65^2 + 17{,}5^2} = 27{,}84$
Mantelflächeninhalt M der Pyramide:
$M = 2 \cdot 35 \cdot 27{,}84$
$M = 1948{,}8$
Glasfläche:
$1948{,}8 \cdot \frac{95}{100} = 1851{,}36$
Die Größe der Glasfläche beträgt $1851{,}4\,m^2$.

c) $a = 10{,}0\,m$; $h_s = 8{,}0\,m$
Höhe h berechnen:
$h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h = \sqrt{8^2 - 5^2} = 6{,}25$
Volumen V:
$V = \frac{1}{3} G \cdot h$
$V = \frac{1}{3} \cdot 10{,}0^2 \cdot 6{,}25 = 208{,}3$
Das Volumen der Pyramide beträgt etwa $208\,m^3$.

Anwenden. Nachdenken — Seiten 78, 79

Seite 78

14 a)

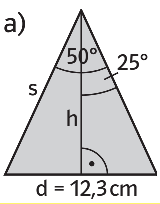


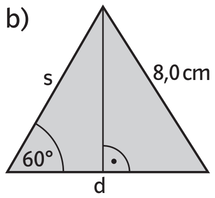
h berechnen:
$\tan 61{,}9° = \frac{h}{3{,}2}$
$h = 3{,}2 \cdot \tan 61{,}9°$
$h = 6{,}0\,cm$

h_s berechnen:
$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_s = \sqrt{6^2 + 3{,}2^2}$
$h_s = 6{,}8\,cm$

Volumen V:
$V = \frac{1}{3} \cdot 6{,}4^2 \cdot 6$
$V = 81{,}9\,cm^3$
Oberflächeninhalt O:
$O = 6{,}4^2 + 2 \cdot 6{,}4 \cdot 6{,}8$
$O = 128{,}0\,cm^2$
b) Das Dreieck ist rechtwinklig und gleichschenklig, daher gilt für h_s:
$2 \cdot h_s^2 = 16{,}8^2 \quad | : 2$
$h_s^2 = 141{,}12 \quad | \sqrt{\ }$
$h_s = 11{,}88\,cm$
Höhe h:
$h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h = \sqrt{11{,}88^2 - 8{,}4^2}$
$h = 8{,}4\,cm$
Volumen V:
$V = \frac{1}{3} \cdot 16{,}8^2 \cdot 8{,}4$
$V = 790{,}3\,cm^3$
Oberflächeninhalt O:
$O = 16{,}8^2 + 2 \cdot 16{,}8 \cdot 11{,}88$
$O = 681{,}4\,cm^2$

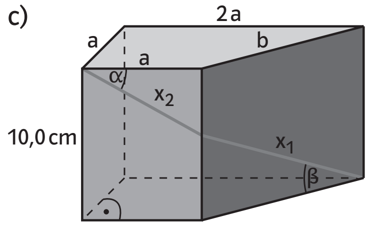
15 a)



Für die Diagonale d der quadratischen Grundfläche erhält man: d = 12,3 cm
Grundseite a berechnen:
$2 \cdot a^2 = 12{,}3^2 \quad |:2$
$a^2 = 75{,}645 \quad |\sqrt{\ }$
$a = 8{,}70\,\text{cm}$
h berechnen:
$\tan 25° = \frac{6{,}15}{h}$
$h = \frac{6{,}15}{\tan 25°}$
$h = 13{,}19\,\text{cm}$
h_s berechnen:
$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_s = \sqrt{13{,}19^2 + 4{,}35^2}$
$h_s = 13{,}89\,\text{cm}$
Volumen V:
$V = \frac{1}{3} \cdot 8{,}7^2 \cdot 13{,}19$
$V = 332{,}8\,\text{cm}^3$
Oberflächeninhalt O:
$O = 8{,}7^2 + 2 \cdot 8{,}7 \cdot 13{,}89$
$O = 317{,}4\,\text{cm}^2$
b)


Das Dreieck ist gleichschenklig und hat einen Basiswinkel von 60°. Damit ist es auch gleichseitig. Für die Diagonale d gilt also:
d = s = 8,0 cm.
Grundkantenlänge a berechnen:
$2 \cdot a^2 = 8^2 \quad |:2$
$a^2 = 32 \quad |\sqrt{\ }$
$a = 5{,}657\,\text{cm}$
h_s berechnen:
$h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_s = \sqrt{8^2 - 2{,}83^2}$
$h_s = 7{,}48\,\text{cm}$
h berechnen:
$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$
$h = \sqrt{8^2 - 4^2}$
$h = 6{,}93\,\text{cm}$
$V = \frac{1}{3} \cdot 5{,}657^2 \cdot 6{,}93$
$V = 73{,}9\,\text{cm}^3$
Oberflächeninhalt O:
$O = 5{,}657^2 + 2 \cdot 5{,}657 \cdot 7{,}48$
$O = 116{,}6\,\text{cm}^2$

16 a) Die Länge von a berechnet man mithilfe der Formel für das Volumen.
$V = G \cdot h$
$V = \frac{a + 2a}{2} \cdot a \cdot 10$
$735 = \frac{3a^2}{2} \cdot 10$
$735 = a^2 \cdot 15 \quad |:15$
$a^2 = 49 \quad |\sqrt{\ }$
$a = 7\,\text{cm}$
Die Strecke a ist 7,0 cm lang.

b) Fehelende Seitenlänge der trapezförmigen Grundfläche berechnen:
$b = \sqrt{a^2 + a^2}$
$b = a\sqrt{2}$
$b = 9{,}90\,\text{cm}$
Oberflächeninhalt O:
$O = 2 \cdot \frac{a + 2a}{2} \cdot a + (a + a + 2a + b) \cdot 10$
$O = 3a^2 + (4a + b) \cdot 10$
$O = 3 \cdot 7^2 + (4 \cdot 7 + 9{,}9) \cdot 10$
$O = 526$
Der Oberflächeninhalt beträgt 526,0 cm².
c)


x_1 berechnen:
$\cos\beta = \frac{b}{x_1}$
$\cos 32° = \frac{9{,}9}{x_1} \quad |\cdot x_1 \quad |:\cos 32°$
$x_1 = \frac{9{,}9}{\cos 32°} = 11{,}67\,\text{cm}$
s_1 berechnen:
$s_1 = \sqrt{x_1^2 - b^2}$
$s_1 = \sqrt{11{,}67^2 - 9{,}9^2} = 6{,}18$
Damit erhält man: $s_2 = 10{,}0 - 6{,}19 = 3{,}82$
x_2 berechnen:
$x_2 = \sqrt{s_2^2 + a^2}$
$x_2 = \sqrt{3{,}82^2 + 7^2}$
$x_2 = 7{,}97\,\text{cm}$
Länge der roten Linie:
$l = x_1 + x_2$
$l = 11{,}67 + 7{,}97 = 19{,}64$
Die rote Linie ist 19,6 cm lang.
d) Damit die rote Linie auf einem Netz eine gerade Linie ergibt, muss für die Wechselwinkel α und β gelten: α = β.
Berechnen von α
$\tan\alpha = \frac{s_2}{a}$
$\tan\alpha = \frac{3{,}82}{7}$
$\tan\alpha = 0{,}546 \Rightarrow \alpha = 28{,}6°$
Die Winkel α und β sind unterschiedlich groß, daher kann sich auf dem Netz keine gerade Linie ergeben.

17 a) h_a berechnen:
$h_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_a = \sqrt{6^2 - 3^2}$
$h_a = 5{,}20\,\text{cm}$
h_s berechnen:
$h_s = \sqrt{h^2 + h_a^2}$
$h_s = \sqrt{15^2 + 5{,}2^2}$
$h_s = 15{,}9\,\text{cm}$

Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5{,}2 \cdot 15$

$V = 468{,}0\,cm^3$

Oberflächeninhalt O:

$O = G + M$

$O = 3 \cdot a \cdot h_a + 3 \cdot a \cdot h_s$

$O = 3 \cdot 6 \cdot 5{,}2 + 3 \cdot 6 \cdot 15{,}9$

$O = 38{,}0\,cm^2$

b) h_a berechnen:

$h_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_a = \sqrt{4{,}2^2 - 2{,}1^2}$

$h_a = 3{,}64\,cm$

h_s berechnen:

$h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_s = \sqrt{9{,}6^2 - 2{,}1^2}$

$h_s = 9{,}37\,cm$

Höhe h der Pyramide:

$h = \sqrt{h_s^2 - h_a^2}$

$h = \sqrt{9{,}37^2 - 3{,}64^2}$

$h = 8{,}63\,cm$

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4{,}2 \cdot 3{,}64 \cdot 8{,}63$

$V = 131{,}9\,cm^3$

Oberflächeninhalt O

$O = 3 \cdot a \cdot h_a + 3 \cdot a \cdot h_s$

$O = 3 \cdot 4{,}2 \cdot 3{,}64 + 3 \cdot 4{,}2 \cdot 9{,}37$

$O = 163{,}9\,cm^2$

c) h_a berechnen:

$h_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_a = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6{,}93\,cm$

Die Höhe h der Pyramide berechnet man mithilfe des Volumens.

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \cdot h$

$V = a \cdot h_a \cdot h$

$831{,}4 = 8 \cdot 6{,}93 \cdot h \qquad |:8 \quad |:6{,}93$

$h = 15{,}0\,cm$

h_s berechnen:

$h_s = \sqrt{h^2 + h_a^2}$

$h_s = \sqrt{15^2 + 6{,}93^2}$

$h_s = 16{,}52\,cm$

Oberflächeninhalt O:

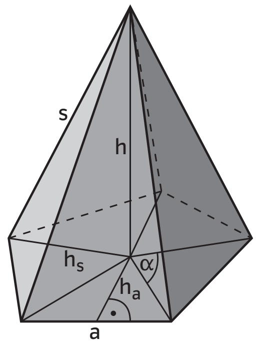
$O = 3 \cdot a \cdot h_a + 3 \cdot a \cdot h_s$

$O = 3 \cdot 8 \cdot 6{,}93 + 3 \cdot 8 \cdot 16{,}52$

$O = 562{,}8\,cm^2$

18 a) Winkel α

Es gilt $5 \cdot \alpha = 360°$, also ist $\alpha = 72°$.



h_a berechnen:

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{h_a}$

$\tan 36° = \frac{4{,}5}{h_a}$

$h_a = \frac{4{,}5}{\tan 36°}$

$h_a = 6{,}19\,cm$

h_s berechnen:

$h_s = \sqrt{h^2 + {h_a}^2}$

$h_s = \sqrt{12^2 + 6{,}19^2}$

$h_s = 13{,}50\,cm$

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6{,}19 \cdot 12$

$V = 557{,}1\,cm^3$

Oberflächeninhalt O:

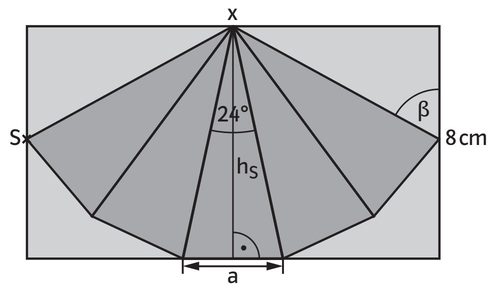
$O = G + M$

$O = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$

$O = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6{,}19 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 13{,}5$

$O = 443{,}0\,cm^2$

19 a)



In der Skizze ist der halbe Mantel der Pyramide zu sehen. Es gilt: $h_s = 8\,cm$.

Die Grundkante a berechnet man mithilfe des angegebenen Winkels $\alpha = 24°$.

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{h_s}$

$\tan 12° = \frac{\frac{\alpha}{2}}{8}$

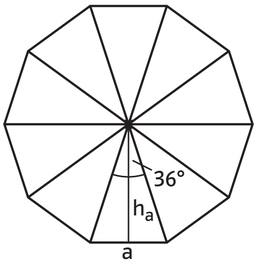
$\tan 12° = \frac{\alpha}{16} \qquad | \cdot 16$

$a = 16 \cdot \tan 12°$

$a = 3{,}40\,cm$

Für das Volumen wird die Höhe h_a eines Grundflächendreiecks benötigt.

Mittelpunktswinkel im regelmäßigem Zehneck:
$\gamma = 360° : 10 = 36°$



h_a berechnen:

$\tan 18° = \frac{\frac{\alpha}{2}}{h_a}$

$\tan 18° = \frac{1{,}7}{h_a}$

$h_a = 5{,}23\,cm$

h berechnen:

$h = \sqrt{h_s^2 - h_a^2}$

$h = \sqrt{8^2 - 5{,}23^2}$

$h = 6{,}05\,cm$

Grundfläche G:

$G = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

$G = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3{,}4 \cdot 5{,}23$

$G = 88{,}91\,cm^2$

Volumen V berechnen:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 88{,}91 \cdot 6{,}05$

$V = 179{,}3\,cm^3$

Das Volumen beträgt $179{,}3\,cm^3$.

Oberflächeninhalt O:

$O = G + 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$

$O = 88{,}91 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3{,}4 \cdot 8$

$O = 156{,}9\,cm^2$

Der Oberflächeninhalt beträgt $156{,}9\,cm^3$.

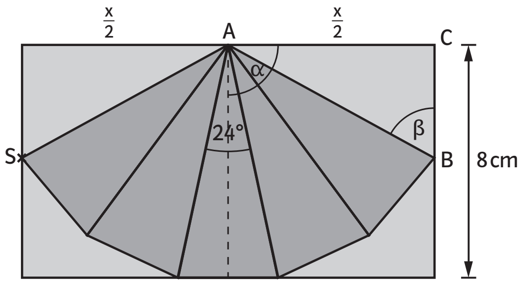
b) Da je eine Hälfte des Mantels aus je einem von zwei kongruenten Rechtecke ausgeschnitten wird, genügt es, ein Rechteck zu betrachten.

Größe der halben Mantelfläche:

$M_{halb} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$

$M_{halb} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3{,}4 \cdot 8$

$M_{halb} = 68\,cm^2$



Seite x des Rechtecks (im Dreieck ABC) berechnen:

$\beta = \frac{1}{2} \cdot 24° + 24° + 24°$

$\beta = 60°$ (Wechselwinkel zu α)

Damit erhält man:

$\sin\beta = \frac{\frac{x}{2}}{s}$

$\sin\beta = \frac{x}{2s}$

$\sin 60° = \frac{x}{2 \cdot 8{,}18}$

$x = 2 \cdot 8{,}18 \cdot \sin 60°$

$x = 14{,}17\,cm$

s berechnen:

$s = \sqrt{h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$s = \sqrt{8^2 + 1{,}7^2}$

$s = 8{,}18\,cm$

Flächeninhalt des Rechtecks A_R:

$A_R = 14{,}17 \cdot 8$

$A_R = 113{,}36\,cm^2$

Anteil des Abfalls:

$\frac{A_R - M_{halb}}{A_R} = \frac{113{,}36 - 68}{113{,}36} = 0{,}40 = 40\,\%$

Es entstehen 40 % Abfall.

20 a) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$817{,}3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \left| : \frac{4}{3} \quad \right| : \pi$

$r^3 = 195{,}116 \quad \left| \sqrt[3]{} \right.$

$r = 5{,}80\,cm$

Oberflächeninhalt der Kugel:

$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$O = 4 \cdot \pi \cdot 5{,}8^2$

$O = 422{,}7\,cm^2$

Der Oberflächeninhalt beträgt $422{,}7\,cm^3$.

b) Wenn man die Kugel in zwei Hälften schneidet, kommen zum ursprünglichen Oberflächeninhalt von $4 \cdot \pi \cdot r^2$ noch die Flächeninhalte von zwei Kreisflächen dazu. Damit erhöht sich der Oberflächeninhalt um 50 %. Genauer:

$O_{Kugel} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$O_{neu} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot O_{Kugel} + 2 \cdot A_{Kreis}$

$O_{neu} = O_{Kugel} + 2 \cdot A_{Kreis}$

$O_{neu} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r^2$

$O_{neu} = 6 \cdot \pi \cdot r^2$

Damit gilt:

$\frac{O_{neu} - O_{Kugel}}{O_{Kugel}} = \frac{6 \cdot \pi \cdot r^2 - 4 \cdot \pi \cdot r^2}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^2}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = 0{,}5$

$= 50\,\%$

Der Flächeninhalt erhöht sich um 50 %. Kevin hat also Recht.

21 Für die Körper A und B ist die Aussage richtig. Das hat damit zu tun, dass der Wert für den Radius in der Volumenformel im Quadrat genommen wird.

Für Körper C stimmt die Aussage nicht. Es gilt dagegen: „Wenn man den Radius verdoppelt, verachtfacht sich das Volumen“. Das ist der Fall, da hier der Radius in der 3. Potenz vorkommt. Genauer:

A: Zylinder

$V_{(2r)} = \pi \cdot (2r)^2 \cdot h$

$V_{(2r)} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V_{(2r)} = 4 \cdot V_{(r)}$

B: Kegel

$V_{(2r)} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2r)^2 \cdot h$

$V_{(2r)} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V_{(2r)} = 4 \cdot V_{(r)}$

C: Kugel

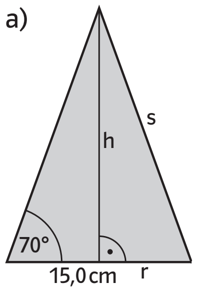
$V_{(2r)} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2r)^3$

$V_{(2r)} = 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$V_{(2r)} = 8 \cdot V_{(r)}$

Seite 79

22 a)



Radius r = 7,5 cm

h berechnen:

$\tan 70° = \frac{h}{7{,}5}$

$h = 7{,}5 \cdot \tan 70°$

$h = 20{,}61$ cm

s berechnen:

$\cos 70° = \frac{7{,}5}{s}$

$s = \frac{7{,}5}{\cos 70°}$

$s = 21{,}93$ cm

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7{,}5^2 \cdot 20{,}61$

$V = 1214{,}0$

Das Volumen beträgt 1214,0 cm^3.

Oberflächeninhalt O:

$O = \pi \cdot 7{,}5^2 + \pi \cdot 7{,}5 \cdot 21{,}93$

$O = 693{,}4$

Der Oberflächeninhalt beträgt 693,4 cm^2.

b) s = 9,4 cm

r und h werden in der Hälfte des gleichschenkligen Dreiecks mit Winkel 12,5° an der Spitze.

r berechnen:

$\sin 12{,}5° = \frac{r}{9{,}4}$

$r = 9{,}4 \cdot \sin 25°$

$r = 3{,}97$ cm

h berechnen:

$\cos 12{,}5° = \frac{h}{9{,}4}$

$h = 9{,}4 \cdot \cos 25°$

$h = 8{,}52$ cm

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}97^2 \cdot 8{,}52$

$V = 140{,}6$

Das Volumen beträgt 140,6 cm^3.

Oberflächeninhalt O:

$O = \pi \cdot 3{,}97^2 + \pi \cdot 3{,}97 \cdot 9{,}4$

$O = 166{,}8$

Der Oberflächeninhalt beträgt 166,8 cm^2.

23 a) Mantellinie s berechnen:

$s = \sqrt{4^2 + 2{,}5^2}$

$s = 4{,}72$ cm

Winkel α berechnen:

Es gilt b = u und damit:

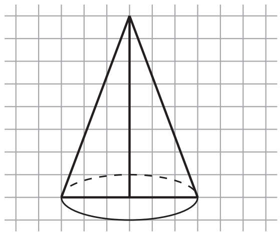
$2 \cdot \pi \cdot s \cdot \frac{\alpha}{360°} = 2 \cdot \pi \cdot r \quad |:2 \quad |:\pi$

$s \cdot \frac{\alpha}{360°} = r \quad | \cdot 360° \quad |:s$

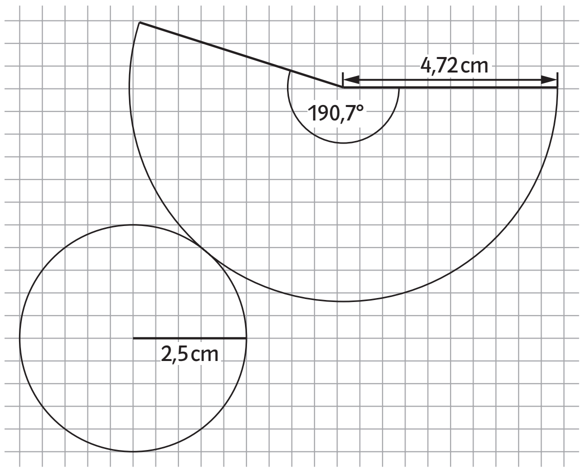
$\alpha = \frac{r}{s} \cdot 360°$

$\alpha = \frac{2{,}5}{4{,}72} \cdot 360° = 190{,}7°$

b) Schrägbild:



Netz:



c) Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 4$

$V = 26{,}2$

Das Volumen beträgt 26,2 cm^3.

Oberflächeninhalt O:

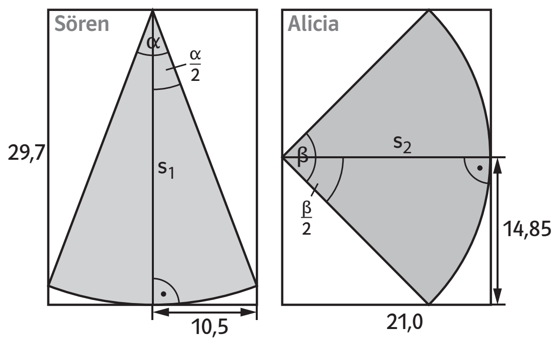
$O = \pi \cdot 2{,}5^2 + \pi \cdot 2{,}5 \cdot 4{,}72$

$O = 56{,}7$

Der Oberflächeninhalt beträgt 56,7 cm^2.

24 a) Individuelle Schätzungen

Der Radius des Kegelmantels ist die Mantellinie s des Kegels.



Sören: $s_1 = 297$ mm = 29,7 cm

Alicia: $s_2 = 210$ mm = 21,0 cm

ACHTUNG: Sie arbeiten mit der Manuskriptfassung der Lösungen. Sie enthalten möglicherweise Fehler.
Gern können Sie Rückmeldungen an die folgende email-Adresse senden: SchnittpunktBW@klett.de
Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

Winkel der Kreisausschnitte berechnen:
Sören:
$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{10{,}5}{29{,}7} = 0{,}354 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 19{,}47°$,
also $\alpha = 38{,}9°$
Alicia:
$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{14{,}85}{21{,}0} = 0{,}707 \Rightarrow \frac{\beta}{2} = 35{,}27°$,
also $\beta = 70{,}5°$
Flächeninhalt der Kreisausschnitte:

Sören:	Alicia:
$A_{S1} = \pi \cdot s_1^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$	$A_{S2} = \pi \cdot s_2^2 \cdot \frac{\beta}{360°}$
$A_{S1} = \pi \cdot 29{,}7^2 \cdot \frac{38{,}9°}{360°}$	$A_{S2} = \pi \cdot 21{,}0^2 \cdot \frac{70{,}5°}{360°}$
$A_{S1} = 299{,}4\,cm^2$	$A_{S2} = 271{,}3\,cm^2$

Sören hat also den größeren Zylindermantel gezeichnet.
b) Die Radien der Zylinder werden mithilfe der Bogenlängen b berechnet.
(Zur Erinnerung: Die Bogenlänge des Kreisausschnitts ist der Umfang der Kreisfläche des Zylinders. Es gilt also $b = u$.)

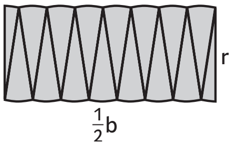
Sören	Alicia
$b_1 = 2 \cdot \pi \cdot s_1 \cdot \frac{\alpha}{360°}$	$b_2 = 2 \cdot \pi \cdot s_2 \cdot \frac{\beta}{360°}$
$b_1 = 2 \cdot \pi \cdot 29{,}7 \cdot \frac{38{,}9°}{360°}$	$b_2 = 2 \cdot \pi \cdot 21{,}0 \cdot \frac{70{,}5°}{360°}$
$b_1 = 20{,}68\,cm$	$b_2 = 25{,}84\,cm$
Radius r_1	Radius r_2
$u_1 = 2 \cdot \pi \cdot r_1$	$u_2 = 2 \cdot \pi \cdot r_2$
$20{,}68 = 2 \cdot \pi \cdot r_1$	$25{,}84 = 2 \cdot \pi \cdot r_2$
$r_1 = 3{,}29\,cm$	$r_2 = 4{,}11\,cm$

Höhen der Zylinder berechnen:

Sören	Alicia
$h_1 = \sqrt{s_1^2 - r_1^2}$	$h_2 = \sqrt{s_2^2 - r_2^2}$
$h_1 = \sqrt{29{,}7^2 - 3{,}29^2}$	$h_2 = \sqrt{21^2 - 4{,}11^2}$
$h_1 = 29{,}5\,cm$	$h_2 = 20{,}6\,cm$

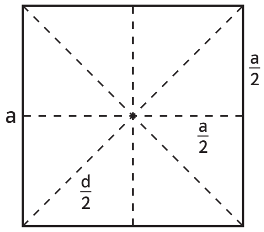
Volumen der zwei Zylinder:
Sören:
$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1$
$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}29^2 \cdot 29{,}5$
$V_1 = 334{,}4\,cm^3$
Alicia:
$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot h_2$
$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4{,}11^2 \cdot 20{,}6$
$V_2 = 364{,}4\,cm^3$
Volumenvergleich:
$\frac{V_2 - V_1}{V_2} = \frac{364{,}4 - 334{,}4}{364{,}4} = 0{,}082 = 8{,}2\,\%$
Das Volumen des Zylinders von Sören ist um 8,2 % kleiner als das Volumen des Zylinders von Alicia.

25 (1) Die Mantelfläche des Kegels wird entlang der Mantellinie s „ausgerollt“.
(2) Der entstehende Kreisausschnitt wird gleich große Kreisausschnitte geteilt (im Bild in acht Kreisausschnitte).
(3) Die Kreisausschnitte werden abwechselnd umgedreht und so gelegt, dass annähernd ein Rechteck entsteht.
(4) Man nimmt eine viel feinere Teilung in Kreisausschnitte vor und wiederholt die Prozedur aus (3).
Ist die Teilung fein genug, dann ist die entstehende Figur praktisch nicht von einem Rechteck zu unterscheiden. Die Seitenlängen des Rechtecks betragen dann r und $\frac{1}{2}b$ (vgl. Skizze unten).
Der Flächeninhalt der Mantelfläche entspricht dem Flächeninhalt des Rechtecks, es gilt also:
$M = \frac{1}{2}b \cdot r$ bzw. $M = \frac{b \cdot r}{2}$.



26 a) $V = V_{Kegel} \cdot \frac{\alpha}{360°}$
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \frac{\alpha}{360°}$
1 berechnen:
$h = \sqrt{7{,}5^2 - 4{,}5^2}$
$h = 6\,cm$
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 6 \cdot \frac{150°}{360°}$
$V = 53{,}0$
Das Volumen beträgt $53{,}0\,cm^3$.
b) Die Formel gilt nicht. Denn nur derjenige Teil der Oberfläche des Körpers, der zur ursprünglichen Oberfläche des Kegels gehört (Grund- und Mantelfläche), wird anteilig zum Winkel α genommen. Hinzu kommen allerdings die zwei dreieckigen Schnittflächen, die bei der Kegeloberfläche nicht vorkommen.
Rechnerische Überprüfung:
$O_{Kegel} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$O_{Kegel} = \pi \cdot 4{,}5^2 + \pi \cdot 4{,}5 \cdot 7{,}5$
$O_{Kegel} = 169{,}6\,cm^3$
Oberflächeninhalt O des Körpers
$O = (\pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s) \cdot \frac{\alpha}{360°} + 2 \cdot A_{Dreieck}$
$O = (\pi \cdot 4{,}5^2 + \pi \cdot 4{,}5 \cdot 7{,}5) \cdot \frac{150°}{360°} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4{,}5 \cdot 6$
$O = 97{,}7\,cm^3$
$\frac{O}{O_{Kegel}} = \frac{97{,}7}{169{,}6} = 0{,}576 \neq \frac{150°}{360°} = 0{,}417$
c) Mögliches Vorgehen:
Wenn man die Grundfläche der Pyramide in acht gleich große Teile teilt (vgl. Skizze), dann sieht man, dass zur Körpergrundfläche $\frac{5}{8}$ des Quadrats gehören.

ACHTUNG: Sie arbeiten mit der Manuskriptfassung der Lösungen. Sie enthalten möglicherweise Fehler.
Gern können Sie Rückmeldungen an die folgende email-Adresse senden: SchnittpunktBW@klett.de
Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.



Für das Volumen V des Körpers erhält man daher: $V = V_{Pyramide} \cdot \frac{5}{8}$ bzw.

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h \cdot \frac{5}{8}$

(mit $a = 7\,cm$ und $h = 8{,}4\,cm$).

Der Oberflächeninhalt des Körpers besteht aus $\frac{5}{8}$ des Oberflächeninhalts der Pyramide, ergänzt um die Flächeninhalte der zwei Dreiecke der Schnittfläche. Die Dreiecke haben die Katheten $\frac{a}{2}$ und h bzw. $\frac{d}{2}$ und h (wobei d die Diagonale der quadratischen Basis der Pyramide ist).

Es gilt also:

$O = \frac{5}{8} \cdot (a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a) + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot h$

Um den Oberflächeninhalt zu berechnen müssen noch – jeweils mit dem Satz des Pythagoras – h_a und d berechnet werden.

27 a) Grundkante a berechnen:

$O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$

$351 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 15 \quad | -351$

$a^2 + 30a - 351 = 0$

quadratische Gleichung lösen:

$a_{1,2} = -\frac{30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{30}{2}\right)^2 - (-351)}$

$a_{1,2} = -15 \pm \sqrt{576}$

$a_{1,2} = -15 \pm 24$

$a_1 = 9; \quad a_2 = -39$

Der negative Wert wird verworfen, daher erhält man: $a = 9\,cm$.

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot 9^2 \cdot 15$

$V = 405$

Das Volumen beträgt $405\,cm^3$.

28 a) Volumen V:

$V = V_{Pyr1} - V_{Pyr2}$

$V = \frac{1}{3} \cdot G_1 \cdot h_1 - \frac{1}{3} \cdot G_2 \cdot h_2$

Grundfläche G_1 der sechseckigen Pyramide:

$G_1 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot h_{a1}$

h_{a1} berechnen:

$h_{a1} = \sqrt{9^2 - 4{,}5^2}$

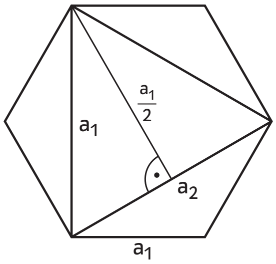
$h_{a1} = 7{,}80\,cm$

$G_1 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7{,}8$

$G_1 = 210{,}6\,cm^3$

Die Grundfläche G_2 der dreieckigen Pyramide ist halb so groß wie G_1 (vgl. Skizze). Es gilt also:

$G_2 = 105{,}3\,cm^3$



Volumen des Restkörpers:

$V = \frac{1}{3} \cdot 210{,}6 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot 105{,}3 \cdot 7{,}5$

$V = 789{,}75$

Das Volumen des Restkörpers beträgt $789{,}75\,cm^3$.

Oberflächeninhalt O:

$O = M_1 + M_2 + G_1 - G_2$

Aus den Überlegungen zu den Grundflächen wissen wir: $G_1 - G_2 = \frac{1}{2} G_1 = G_2$

Man erhält:

$O = 2 \cdot a_1 \cdot h_{s1} + 2 \cdot a_2 \cdot h_{s2} + G_2$

h_{s1} berechnen:

$h_{s1} = \sqrt{h^2 + h_{a1}{}^2}$

$h_{s1} = \sqrt{15^2 + 7{,}8^2}$

$h_{s1} = 16{,}9\,cm$

h_{s2} berechnen:

Aus der Skizze oben erhält man:

$h_{a2} = \frac{a_1}{2}$; also $h_{a2} = 4{,}5\,cm$

Aus der Symmetrie in den gleichseitigen Dreiecken der sechseckigen Grundfläche erhält man: $\frac{a_2}{2} = h_{a1}$; also $\frac{a_2}{2} = 7{,}8\,cm$.

Daraus folgt: $a_2 = 15{,}6\,cm$.

$h_{s2} = \sqrt{h^2 + h_{a2}{}^2}$

$h_{s2} = \sqrt{7{,}5^2 + 4{,}5^2}$

$h_{s2} = 8{,}75\,cm$

$O = 2 \cdot a_1 \cdot h_{s1} + 2 \cdot a_2 \cdot h_{s2} + G_2$

$O = 2 \cdot 9 \cdot 16{,}9 + 2 \cdot 15{,}6 \cdot 8{,}75 + 105{,}3$

$O = 682{,}5$

Der Oberflächeninhalt beträgt $682{,}5\,cm^2$.

b) Volumen V:

$V = V_{Würfel} + V_{Pyr1} - V_{rot}$

$V = a^3 + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_1 - \frac{1}{3} \cdot G_{rot} \cdot h_{rot}$

Für den Grundflächeninhalt der roten Pyramide gilt: $G_{rot} = \frac{1}{2} \cdot a^2$;

Höhe $h_{rot} = 4{,}8 + \frac{1}{2} \cdot 3{,}8 = 6{,}7\,cm$

Damit erhält man:

$V = a^3 + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot h_{rot}$

$V = 4{,}8^3 + \frac{1}{3} \cdot 4{,}8^2 \cdot 3{,}8 - \frac{1}{3} \cdot \frac{4{,}8^2}{2} \cdot 6{,}7$

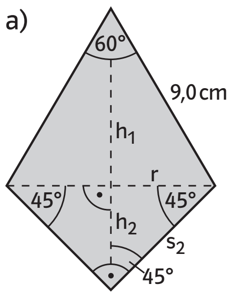
$V = 114{,}0$

Das Volumen des Restkörpers beträgt $114{,}0\,\text{cm}^3$.
Oberflächeninhalt O:
$O = M_{Würfel} + M_{Pyr1} + M_{rot} + \frac{1}{2}a^2$
$O = 4 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot h_{s1} + 2 \cdot a_{rot} \cdot h_{s\_rot} + \frac{1}{2}a^2$
h_{s1} berechnen:
$h_{s1} = \sqrt{h_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_{s1} = \sqrt{3{,}8^2 + 2{,}4^2}$
$h_{s1} = 4{,}50\,\text{cm}$
a_{rot} berechnen:
$a_{rot} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$a_{rot} = \sqrt{2{,}4^2 + 2{,}4^2}$
$a_{rot} = 3{,}39\,\text{cm}$
h_{s_rot} berechnen:
$h_{s\_rot} = \sqrt{h_{rot}^2 + \left(\frac{a_{rot}}{2}\right)^2}$
$h_{s\_rot} = \sqrt{6{,}7^2 + 3{,}39^2}$
$h_{s\_rot} = 7{,}5\,\text{cm}$
$O = 4 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot h_{s1} + 2 \cdot a_{rot} \cdot h_{s\_rot} + \frac{1}{2}a^2$
$O = 4 \cdot 4{,}8^2 + 2 \cdot 4{,}8 \cdot 4{,}5 + 2 \cdot 3{,}39 \cdot 7{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 4{,}8^2$
$O = 197{,}7$
Der Oberflächeninhalt beträgt $197{,}7\,\text{cm}^2$.

Anwenden. Nachdenken **Seiten 80, 81**

Seite 80

29 a)



Radius r:
Das obere Dreieck ist gleichschenklig und hat an der Spitze einen 60°-Winkel; das Dreieck ist daher gleichseitig und es gilt:
$d = 2r = s_1 = 9{,}0\,\text{cm}$, also $r = 4{,}5\,\text{cm}$.
Höhe h_1 des oberen Kegels:
$h_1 = \sqrt{s^2 - r^2}$
$h_1 = \sqrt{9^2 - 4{,}5^2}$
$h_1 = 7{,}80\,\text{cm}$
Höhe h_2 des unteren Kegels:
Der Achsenschnitt des unteren Kegels ist ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck. Damit betragen die Basiswinkel jeweils 45°. Die Höhe h_2 teilt den rechten Winkel an der Spitze ebenfalls in zwei 45°-Winkel, daher gilt:
$h_2 = r = 4{,}5\,\text{cm}$.

Mantellinie s_2 des unteren Kegels:
$s_2 = \sqrt{r^2 + h_2^2}$
$s_2 = \sqrt{4{,}5^2 + 4{,}5^2}$
$s_2 = 6{,}36\,\text{cm}$
Volumen V:
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_2$
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 7{,}8 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 4{,}5$
$V = 260{,}8$
Das Volumen beträgt $260{,}8\,\text{cm}^3$.
Oberflächeninhalt O:
$O = M_1 + M_2$
$O = \pi \cdot r \cdot s_1 + \pi \cdot r \cdot s_2$
$O = \pi \cdot 4{,}5 \cdot 9 + \pi \cdot 4{,}5 \cdot 6{,}36$
$O = 217{,}1$
Der Oberflächeninhalt beträgt $217{,}1\,\text{cm}^3$.
b) xxx

30 a) Volumen des Quaders
$V_1 = a^2 \cdot 2a$
$V_1 = 2a^3$
Volumen des zusammengesetzten Körpers
$V_2 = V_{Würfel} + V_{Pyramide}$
$V_2 = a^3 + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a$
$V_2 = a^3 + \frac{1}{3} \cdot a^3$
$V_2 = \frac{4}{3}a^3$
Damit erhält man:
$\frac{2}{3} \cdot V_1 = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot a^3 = \frac{4}{3}a^3 = V_2$
Es gilt also: $V_2 = \frac{2}{3}V_1$

31 a) Körper A
$V_A = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot h$
$V_A = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4} \cdot h$
$V_A = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
Körper B
$V_B = 2 \cdot V_{Kegel}$
$V_B = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2}$
$V_B = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4} \cdot \frac{h}{2}$
$V_B = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
Das Volumen der beiden Körper ist gleich groß. Körper B besteht aus zwei Kegeln, die jeweils die halbe Höhe des Kegels von Körper A haben. Für das Volumen rechnet man also mit dem Doppelten der halben Höhe: also auch mit h.

32 Volumen V:
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h$

Oberflächeninhalt O:

$O = G + M$

$O = a \cdot b + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$

$O = a \cdot b + a \cdot h_a + b \cdot h_b$

Soll die Oberflächenformel nur in den Größen a, b und h angegeben werden, so erhält man die Formel:

$O = a \cdot b + a \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + b \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

Denn es gilt

$h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ bzw. $h_b = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

33 Die Seitenlängen der rechteckigen Grundfläche betragen:

a = 9,0 cm und b = 16,0 cm.

Die Höhe der Pyramide ist gleich dem Radius des Zylinders. Also ist h = 4,5 cm.

Volumen V:

$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4{,}5$

$V = 216$

Das Volumen beträgt 216 cm³.

Oberflächeninhalt O:

$h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$	$h_b = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
$h_a = \sqrt{4{,}5^2 + 8^2}$	$h_b = \sqrt{4{,}5^2 + 4{,}5^2}$
$h_a = 9{,}18\,\text{cm}$	$h_b = 6{,}36\,\text{cm}$

$O = a \cdot b + a \cdot h_a + b \cdot h_b$

$O = 9 \cdot 16 + 9 \cdot 9{,}18 + 16 \cdot 6{,}36$

$O = 328{,}4$

Der Oberflächeninhalt beträgt 328,4 cm³.

34 a) Damit die beiden Körper das gleiche Volumen haben, muss gelten:

$V_K = V_Z$

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_K^2 \cdot h_K = \pi \cdot r_K^2 \cdot h_Z \quad |:\pi$

$\frac{1}{3} \cdot r_K^2 \cdot h_K = r_K^2 \cdot h_Z$

$\frac{1}{3} \cdot r_K^2 \cdot 12 = 1{,}5^2 \cdot 15 \quad |\cdot 3$

$12 \cdot r_K^2 = 101{,}25 \quad |:12$

$r_K^2 = 8{,}44 \quad |\sqrt{\ }$

$r_K^2 = 2{,}9\,\text{cm}$

Damit bei beiden Körpern das Volumen gleich ist, muss der Radius des Kegels 2,9 cm betragen.

b) Gesucht ist der Radius des Zylinders r_Z (im folgenden r).

Es muss gelten:

$O_Z = O_K$

$2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h_Z = \pi \cdot r_K^2 + \pi \cdot r_K \cdot s \quad |:\pi$

$2r^2 + 2r \cdot h_Z = r_K^2 + r_K \cdot s$

$2r^2 + 2r \cdot 15 = 3{,}5^2 + 3{,}5 \cdot 12$

$2r^2 + 30r = 54{,}25 \quad |-54{,}25$

$2r^2 + 30r - 54{,}25 = 0 \quad |:2$

$r^2 + 15r - 27{,}125 = 0$

quadratische Gleichung lösen

$r_{1,2} = -\frac{15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - (-27{,}125)}$

$r_{1,2} = -7{,}5 \pm \sqrt{83{,}375}$

$r_{1,2} = -7{,}5 \pm 9{,}13$

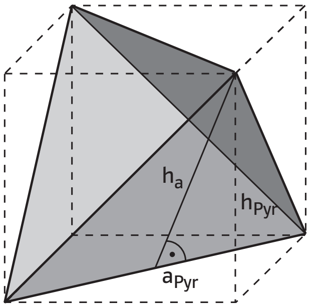
$r_1 = 1{,}63;\ r_2 = -16{,}63$

Der negative Wert wird verworfen, daher erhält man: r = 1,63.

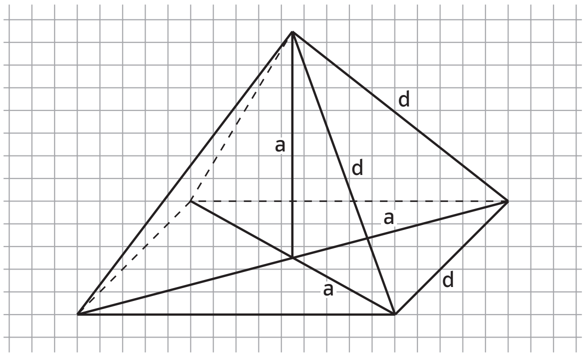
Damit der Oberflächeninhalt der beiden Körper gleich ist, muss der Radius des Zylinders 1,63 cm betragen.

35 a) Der Restkörper ist ein Tetraeder, also eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche, bei der die Seitenflächen genauso groß wie die Grundfläche sind; alle Seiten sind gleichseitige Dreiecke.

b) Die entstehende quadratische Pyramide hat eine Höhe gleich der Kantenlänge a des Würfels und Grundkante gleich der Flächendiagonale d des Würfels.

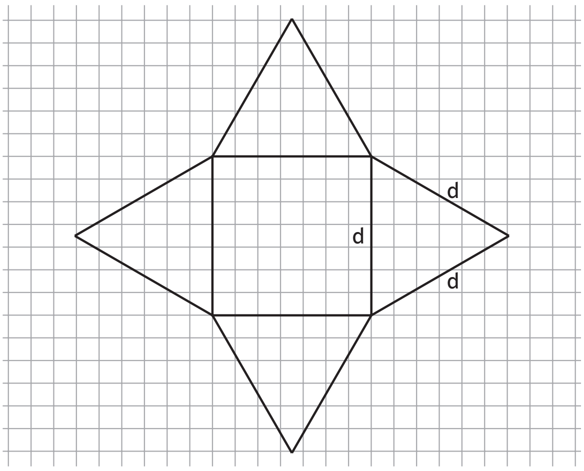


Schrägbild Pyramide (Maßstab 1 : 1)



Eins der vier aus dem Würfel abgeschnittenen Körperstücke ist grau gefärbt. Die Angaben a und d beziehen sich auf die Grundkante und die Flächendiagonale des Würfels.

Netz Pyramide (Maßstab 1:2)



Volumen V:

Es gilt: $h_{Pyr} = a = 5{,}0\,cm$ und $a_{Pyr} = d = a\sqrt{2}$

Alos ist $a_{Pyr} = 5 \cdot \sqrt{2} = 7{,}07\,cm$.

$V = \frac{1}{3} \cdot {a_{Pyr}}^2 \cdot h_{Pyr}$

$V = \frac{1}{3} \cdot 7{,}07^2 \cdot 5$

$V = 83{,}3\,cm^3$

Oberflächeninhalt O:

$O = {a_{Pyr}}^2 + 2 \cdot a_{Pyr} \cdot h_a$

h_a berechnen (vgl. Skizze oben):

$h_a = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$

$h_a = \sqrt{7{,}07^2 - 3{,}535^2}$

$h_a = 6{,}12\,cm$

c) Volumen des Restkörpers:

$V_R = V_{Würfel} - V_{Pyr}$

$V_R = 5^3 - 83{,}3$

$V_R = 41{,}7\,cm^3$

Volumenverhältnis:

$\frac{V_R}{V_{Pyr}} = \frac{41{,}7}{83{,}3} = 0{,}50 = 50\,\%$

Das Volumen des Restkörpers ist halb so groß wie das Volumen der Pyramide.

Seite 81

36 Vergleicht man den Radius der Kugel mit dem Kind, das daneben steht, dann kann man ihn auf ca. 1,50 m schätzen. Den Durchmesser schätzt man daher auf ca. 3,0 m. Damit erhält man:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^3$

$V = 14{,}14\ m^3$

Gewicht der Kugel (in t):

$14{,}14 \cdot 2{,}8 = 39{,}6$

Die Kugel wiegt also knapp 4 Tonnen.

37 a) $V = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 139$

$V = 2\,451\,033{,}3\,m^3$

Das Volumen der Cheopspyramide beträgt etwa $2\,451\,000\,m^3$.

b) d: Diagonale der quadratischen Grundfläche

$d = \sqrt{a^2 + a^2}$

$d = \sqrt{230^2 + 230^2}$

$d = 325{,}3\,m$

Winkel β berechnen:

$\tan\beta = \frac{h}{\frac{d}{2}}$

$\tan\beta = \frac{139}{162{,}6} = 0{,}855 \Rightarrow \beta = 40{,}5°$

Der Basiswinkel β in der Diagonalschnittfläche beträgt 40,5°.

c) $100 - 5{,}2 = 94{,}8$

Es sind 94,8 % der Höhe verblieben.

$0{,}948 \cdot 139 = 131{,}772$

Die neue Höhe beträgt ca. 131,8 m.

Man geht davon aus, dass die Seitenkante gleichmäßig von oben nach unten verwittert, sodass die Seitenfläche der Pyramide ein Dreieck bleibt (also kein Trapezfläche entsteht).

Ursprüngliches h_a und neues h'_a berechnen:

$h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ $\qquad h'_a = \sqrt{{h_{neu}}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$h_a = \sqrt{139^2 + 115^2}$ $\qquad h'_a = \sqrt{131{,}8^2 + 115^2}$

$h_a = 180{,}4\,m$ $\qquad h'_a = 175\,m$

Ursprünglichen und neuen Mantelflächeninhalt berechnen:

$M = 2 \cdot 230 \cdot 180{,}4$ $\qquad M_{neu} = 2 \cdot 230 \cdot 175$

$M = 82\,984\,m^2$ $\qquad M_{neu} = 80\,500\,m^2$

Größenvergleich:

$\frac{M - M_{neu}}{M} = \frac{82\,980 - 80\,500}{82\,980} = 0{,}03 = 3\,\%$

Die Größe der Mantelfläche ist durch den Materialverlust um 3 % kleiner geworden.

38 a) Mögliche Lösung:

Man geht von einer quadratischen Grundfläche aus. Der Turm setzt sich also aus einem Quader und einer Pyramide zusammen.

Aus dem Tipp entnimmt man, dass die Tür, die unten zu sehen ist, ca. 1,8 m hoch ist.

Im Bild misst sie ca. 2 mm.

Da der Turm nicht frontal, sondern schräg aufgenommen ist, sollte man die Diagonale der Grundfläche messen. Diese beträgt im Bild 10 mm, also gilt in der Realität $d = 9\,m$.

Die Höhe des sichtbaren Mauerwerks beträgt ca. 22 mm im Bild, das entspricht $h_{Quader} = 19{,}80\,m$.

Die Höhe des Dachs beträgt im Bild etwa 40 mm, das entspricht $h_{Pyramide} = 7{,}20\,m$.

Wenn man mit diesen Zahlen rechnet, erhält man:

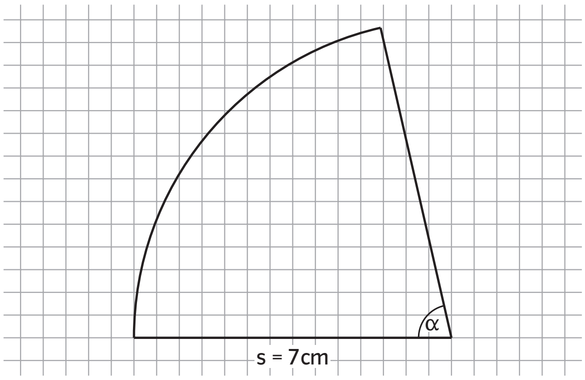
Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

Grundkante a:
$2 \cdot a^2 = d^2$, also $a = 6{,}35\,m$
$V_{Turm} = V_{Quader} + V_{Pyramide}$
$V_{Turm} = a^2 \cdot h_{Quader} + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_{Pyramide}$
$V_{Turm} = 40{,}5 \cdot 19{,}8 + \frac{1}{3} \cdot 40{,}5 \cdot 7{,}2 = 899{,}1$
Das Volumen des Turms beträgt rund 900 m^3.
b) Berechnung der Seitenhöhe h_s:
$h_s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + {h_{Pyramide}}^2$, also $h_s = 9{,}6\,m$
$M_{Pyramide} = 2 \cdot h_s \cdot a = 121{,}9\ m^2$

39 Aktuelle Maße des Baums:
$r = 3{,}55\,m$; $h = 12{,}77\,m$
Aktuelles Volumen:
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}55^2 \cdot 12{,}77$
$V = 168{,}5\ m^3$
Maße des Baums im letzten Jahr:
Höhe: $h_{alt} = 12{,}77 - 1{,}35$
$\Rightarrow h_{alt} = 11{,}42\,m$
Durchmesser: $d_{alt} = 7{,}10 - 0{,}74$
$\Rightarrow d_{alt} = 6{,}36\,m$; also $r_{alt} = 3{,}18\,m$
Volumen des Baums im letzten Jahr
$V_{alt} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}18^2 \cdot 11{,}42$
$V = 120{,}9\,m^3$
Man erhält also:
$\frac{V - V_{alt}}{V_{alt}} = \frac{168{,}5 - 120{,}9}{120{,}9} = 0{,}394 = 39{,}4\,\% \approx 40\,\%$
Das Volumen des Baums vergrößerte sich seit letztem Jahr um fast 40 %.

40 Mantellinie $s = 70\,cm$;
Durchmesser $d = 30\,cm$, also $r = 15\,cm$
a) Um den Kegelmantel zu zeichnen, muss der Winkel α des Kreisausschnitts berechnet werden. Es gilt:
$u = b$
$2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot s \cdot \frac{\alpha}{360°}$ $\quad |:2 \quad |:\pi$
$r = s \cdot \frac{\alpha}{360°}$ $\quad |:s$
$\frac{r}{s} = \frac{\alpha}{360°}$ $\quad |\cdot 360°$
$\alpha = \frac{r}{s} \cdot 360°$
$\alpha = \frac{15}{70} \cdot 360° = 77{,}1°$

Kegelmantel (Maßstab 1:10)



b) Mantelflächeninhalt
$M = \pi \cdot r \cdot s$
$M = \pi \cdot 15 \cdot 70$
$M = 3298{,}7$
$M \approx 3300\,cm^2$
Seitenlänge Karton:
$1\,m = 100\,cm$
$\frac{A_{Karton} - M_{Kegel}}{A_{Karton}} = \frac{100^2 - 3300}{100^2} = 0{,}67 = 67\,\%$
Es bleiben 67 % des Kartons übrig.

41 Für den Öltropfen gilt:
$d = 5\,mm = 0{,}5\,cm$, also $r = 0{,}25\,cm$.
Der kreisförmige Ölfleck bildet einen Zylinder mit $d = 1\,m = 100\,cm$, also $r = 50\,cm$.
Gesucht ist die Höhe des Zylinders. Das Volumen des Tropfens und des Ölflecks bleibt dabei gleich. Es gilt also:
$V_K = V_Z$
$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_K^3 = \pi \cdot r_Z^2 \cdot h$ $\quad |:\pi$
$\frac{4}{3} \cdot r_K^3 = r_Z^2 \cdot h$
$\frac{4}{3} \cdot 0{,}25^3 = 50^2 \cdot h$ $\quad |:50^2$
$h = 8{,}3 \cdot 10^{-6}\,cm = 8{,}3 \cdot 10^{-5}\,mm$
Die Dicke des Ölflecks beträgt 0,000 083 mm.

42 Der Durchmesser eines Tennisballs liegt zwischen 6,54 cm und 6,86 cm.
In der Aufgabe geht man von einem Durchmesser von etwa 6,8 cm aus. Also ist $r = 3{,}4\,cm$.
Länge der drei Bälle:
$3 \cdot 6{,}8 = 20{,}4\,cm$
Damit die drei Bälle gut in die Dose hineinkommen, muss diese also eine Mindestlänge von 20,5 cm haben.
a) Volumen der Bälle:
$V_{Bälle} = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_B^3$
$V_{Bälle} = 4 \cdot \pi \cdot 3{,}4^3$
$V_{Bälle} = 493{,}9\,cm^3$

Volumen der Dose:

$V_{Dose} = \pi \cdot r_D^2 \cdot h$

$V_{Dose} = \pi \cdot 3{,}4^2 \cdot 20{,}5$

$V_{Dose} = 744{,}5\,cm^3$

Prozentualer Anteil des leeren Raums:

$\frac{V_{Dose} - V_{Bälle}}{V_{Dose}} = \frac{744{,}5 - 493{,}9}{744{,}5} = 0{,}337 = 33{,}7\,\%$

Es bleiben also 33,7 % des zur Verfügung stehenden Raums leer.

b) Bei der möglichst kleinen quaderförmigen Verpackung müsste gelten:
Seitenlänge der quadratischen Grundfläche:
$a = 6{,}8\,cm$;
Höhe des Quaders: $h = 20{,}5\,cm$

$V_{Quader} = a^2 \cdot h$

$V_{Quader} = 6{,}8^2 \cdot 20{,}5$

$V_{Quader} = 947{,}9\,cm^3$

Prozentualer Anteil des leeren Raums:

$\frac{V_{Quader} - V_{Bälle}}{V_{Quader}} = \frac{947{,}9 - 493{,}9}{947{,}9} = 0{,}479 = 47{,}9\,\%$

Es bleiben also 47,9 % des zur Verfügung stehenden Raums leer.

c) Tennisbälle werden in Dosen verpackt, damit der vorhandene Platz optimal ausgenutzt wird. Prozentual bleibt dabei viel weniger Raum frei als bei anderen Verpackungen. Dadurch wird sowohl Material als auch Platz gespart (z.B. bei Lagerung und Transport).