Komplexe Aufgaben zur Vorbereitung auf das Zentralabitur

1 Gegeben sei eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit $K_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x^2 + 8tx + 140$; $x \in [0; 14]$.
a) Bestimmen Sie, für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ die Kostenfunktion keine Extremstellen besitzt, und überprüfen Sie die Existenz von Wendestellen. Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Eigenschaften ökonomisch.
b) Die 1. Ableitung G_t' mit $G_t'(x) = -1{,}5x^2 - 16x + 224 - 8t$ der Gewinnfunktion gibt die Grenzgewinne der Unternehmung an. Bei einer Absatzmenge von 4 ME beträgt der Gewinn 276 GE. Wie groß ist in diesem Fall t?
c) Der Parameter t sei 10. Für welche Absatzmenge sind die Grenzgewinne maximal? Wie hoch ist der maximal erzielbare Gewinn? Das Produkt wird derzeit zu einem Preis von 144 $\frac{GE}{ME}$ verkauft. Wie hoch ist der damit erzielbare Gewinn?
d) Bestimmen Sie das Betriebsminimum und das Betriebsoptimum sowie die langfristige und kurzfristige Preisuntergrenze. Berechnen Sie ebenfalls die Nutzenschwelle und -grenze.

2 Die Kosten eines Ein-Produkt-Unternehmens lassen sich durch einen ertragsgesetzlichen Kostenverlauf darstellen.
a) Bei einer Produktion von 1 ME betragen die Gesamtkosten 395 GE und die Grenzkosten 145 GE. Die Produktion von 4 ME führt zu variablen Stückkosten von 90 GE/ME, die bei 6 ME ihr Minimum erreichen. Die Kapazitätsgrenze liegt bei 10 ME. Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion.
b) Die Gesamtkostenfunktion sei nun K mit $K(x) = 5x^3 - 60x^2 + 250x + 200$.
Bestimmen Sie das Betriebsminimum und das Betriebsoptimum sowie die langfristige und kurzfristige Preisuntergrenze. Welche Kostenelastizität liegt im Betriebsoptimum vor?
Geben Sie die ökonomischen Bedeutungen Ihrer Berechnungen an.
c) Der Betrieb sei Angebotsmonopolist. Betriebliche Berechnungen haben gezeigt, dass die Nutzenschwelle bei 2 ME erreicht wurde und bei der gegenwärtigen Produktion von 4 ME ein Gewinn von 190 GE erzielt wird. Es wird daher folgende Preis-Absatz-Funktion angenommen:
$p(x) = -\frac{125}{4}x + \frac{625}{2}$.
Überprüfen Sie diese Funktion aufgrund der obigen Angaben. Wie hoch ist der gegenwärtige Preis und wie elastisch reagieren die Nachfrager auf Preisänderungen?
d) Kann der Gewinn durch Produktionsausweitung erhöht (maximiert) werden und wie hoch ist dieser gegebenenfalls (rechnerische und grafische Lösung)?

3 Die Münter GmbH produziert Schulrucksäcke in den drei Qualitätsstufen: Basic, Classic und Limited Edition. Die Gesamtkosten lassen sich in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x und dem Qualitätsstandard a durch die Kostenfunktion K mit
$K_a(x) = x^3 - 12x^2 + (50 + a)x + 98$ modellieren.
a) Bestimmen Sie, für welche Werte von x die Kostenfunktion keine Extremstellen besitzt. Interpretieren Sie die Bedeutung der Existenz bzw. Nichtexistenz von Extremstellen ökonomisch.
b) Wie wirkt sich der Qualitätsstandard auf die Stückkosten aus?
Für die drei Qualitätsstufen sei $a \in \{0; 5; 10\}$. Bestimmen Sie jeweils die langfristige Preisuntergrenze.
c) Derzeit wird der Rucksack in der Basic-Version für 35 GE verkauft. Für die beiden höheren Qualitätsstufen können Preise im Rahmen der zusätzlichen Kosten erzielt werden. Beurteilen Sie die Gewinnsituation für die drei Produktvarianten.

4 Gegeben sei die Funktion f mit $f_t(x) = 0{,}4x + 0{,}4 + \frac{t}{x+8}$; $t > 0$.
a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich. Für welche t besitzt die Funktion Nullstellen?
b) Untersuchen Sie die Funktion für t = 24 auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Polstellen (Lage und Art!), Hoch- und Tiefpunkten und Asymptoten.
c) Bestimmen Sie die vom Funktionsgraphen K_{24}, der Ordinate, der Asymptote und der Senkrechten x = 5 eingeschlossene Fläche.
d) Für welches t kann f die Gesamtkostenfunktion eines Betriebes mit 3,4 GE Fixkosten repräsentieren?
e) Kostenfunktionen verlaufen im gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend.
Überprüfen Sie, ob diese Voraussetzung für $K(x) = 0{,}4x + 0{,}4 + \frac{24}{x+8}$ gegeben ist.
f) Zeigen Sie, dass die Funktion k_v der variablen Stückkosten durch $k_v(x) = 0{,}4 - \frac{3}{x} + \frac{24}{(x+8)x}$ beschrieben wird. Geben Sie für diese Funktion einen ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich an, wenn die Kapazitätsgrenze bei 20 ME liegt und untersuchen Sie, ob ein Betriebsminimum existiert.
g) Die Erlöse können durch E mit $E(x) = -0{,}1x^2 + 2x$ dargestellt werden, wodurch sich für x = 2 ME die Gewinnschwelle ergibt. Bestimmen Sie die Gewinngrenze.

5 Gegeben sei die Funktion f mit $f_a(x) = 10e^{ax} - 2x$, $D = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.
a) Untersuchen Sie die Funktion auf Schnittpunkte mit der Ordinate, auf Extrema und Wendepunkte. Für welche a liegt der Extrempunkt auf der Ordinate? Bestimmen Sie eine Stammfunktion F_a. Berechnen Sie für a = 0,2 den Flächeninhalt der Fläche, die vom Funktionsgraphen und der x-Achse im Intervall [0; 1] eingeschlossen wird.
Für a = 0,2 lassen sich mit $f_a(x)$ die Gesamtkosten eines Unternehmens modellieren. x sei die Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME).
Die Kapazitätsgrenze des Betriebes liegt bei 15 ME. Für die weiteren Betrachtungen wird beliebige Teilbarkeit der Mengeneinheiten (ME) unterstellt.
b) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Stückkosten und der Grenzkosten. Ermitteln Sie das Betriebsoptimum sowie die langfristige Preisuntergrenze.
c) Die Unternehmung erzielt für ihr Produkt auf dem Markt einen Preis von sechs Geldeinheiten (GE) je ME. Ermitteln Sie mit einem geeigneten Näherungsverfahren (Startwert 1) die Nutzenschwelle (Gewinnschwelle) und den maximalen Gewinn auf zwei Nachkommastellen genau.
d) Für die weiteren Betrachtungen soll die Kostenfunktion K durch die Funktion K^* mit $K^* = x^2 - 3x + 10$ approximiert werden. Im folgenden Geschäftsjahr lässt sich bei entsprechendem Kostenverlauf nur noch ein Preis von t $\frac{GE}{ME}$ erzielen. Untersuchen Sie, für welche t eine verlustfreie Produktion nicht möglich ist.

6 Die Herstellung eines Produktes verursacht 21 GE fixe Kosten und 6 GE variable Kosten je ME. Die Kapazitätsgrenze liegt bei $x_{Kap} = 10$ ME.
Der Produzent genießt Monopolstellung und erzielt bei einem Absatz von 5 ME maximale Erlöse und erreicht bei 1 ME den Break-even-Point.
a) Bestimmen Sie die lineare Kostenfunktion, die quadratische Erlösfunktion und daraus die Gewinnfunktion.
b) Zeichnen Sie die Graphen von K, E und G.
c) Bestimmen Sie die Gewinngrenze für K mit $K(x) = 6x + 21$ und E mit $E(x) = -3x^2 + 30x$.
d) Zeichnen Sie den Graphen der Wirtschaftlichkeitsfunktion W mit $W(x) = \frac{E(x)}{K(x)}$ (neues Koordinatensystem mit gleicher Skalierung auf der Abszisse).