2 Potenzen

Auftaktseiten Seiten 36, 37

1

Feld Nummer n	Anzahl Reiskörner	2^{n-1}
1	1	2^0
2	2	2^1
3	4	2^2
4	8	2^3
5	16	2^4
6	32	2^5
…	…	…
10	1024	2^{10}
…	…	…
19	524 288	2^{19}
20	1 048 576	2^{20}
…	…	…
30	1 073 741 824	2^{30}
…	…	…
64	$1{,}845 \cdot 10^{19}$	2^{64}

Die Anzahl der Reiskörner auf dem n-ten Feld lässt sich mithilfe der Zweierpotenz 2^{n-1} berechnen, da sich die Anzahl der Reiskörner gegenüber dem vorherigen Feld immer jeweils verdoppelt. Das n steht für die jeweilige Feldnummer.

Um herauszufinden, ab welchem Feld 1000 Reiskörner liegen, muss folgende Beziehung aufgelöst werden:

$2^x = 1000$

Durch Ausprobieren, z. B. mit dem Taschenrechner, erhält man für $x = 10$ einen Wert von 1024 Körnern.

Ab dem 10. Feld liegen mehr als 1000 Reiskörner.

Auf dieselbe Art untersucht man, ab welchem Feld die Million überschritten ist:

$2^x = 1\,000\,000$

Für $x = 20$ erhält man einen Wert von 1 048 576 Reiskörnern. Das bedeutet, dass auf dem 20. Feld 1 048 576 Reiskörner liegen. Daher liegen auf insgesamt 19 Feldern weniger als 1 000 000 Reiskörner.

Auf $45 = 64 - 19$ Feldern liegen also mindestens eine Million Reiskörner.

$2^x = 1\,000\,000\,000$

Für $x = 30$ erhält man einen Wert von 1 073 741 824 Reiskörnern.

Ab dem 30. Feld sind es mindestens eine Milliarde Reiskörner.

2 Damit die 10 000-fache Anzahl an Reiskörnern (also: 50 000 Stück) auf eine quadratische Fläche passen, werden 10 000 quadratzentimetergroße Flächen benötigt. Es gilt:

$10\,000\,\text{cm}^2 = 100\,\text{cm} \cdot 100\,\text{cm}$

$\Rightarrow 1\,\text{m} \cdot 1\,\text{m} = 1\,\text{m}^2$

Ein Quadrat, auf das 10 000-mal so viele Körner passen (also 50 000 Reiskörner), hat die Größe von einem Quadratmeter.

Um herauszufinden, wie viele Körner auf einen Quadratkilometer passen, muss man, ausgehend von einem Quadratmeter, mit dem Faktor 1 000 000 multiplizieren.

Bei der Umrechnung von Flächeninhalten gilt der Faktor 100.

$$\text{m}^2 \underset{\cdot 100}{\overset{:100}{\rightleftarrows}} \text{a} \underset{\cdot 100}{\overset{:100}{\rightleftarrows}} \text{ha} \underset{\cdot 100}{\overset{:100}{\rightleftarrows}} \text{km}^2$$

$100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000$

Seite 37

3 Auf dem 64. Feld liegen insgesamt $2^{64} = 1{,}845 \cdot 10^{19}$ Reiskörner.

Wenn man weiterhin davon ausgeht, dass 5 Reiskörner auf einem Quadratzentimeter nebeneinander Platz finden, so benötigt man insgesamt eine Fläche von $3{,}69 \cdot 10^{18}\,\text{cm}^2$.

Umgerechnet entspricht dies

$3{,}69 \cdot 10^8\,\text{km}^2 = 369\,\text{Mio. km}^2$.

Der prozentuale Anteil an der Erdoberfläche ist: $\frac{369\,000\,000\,\text{km}^2}{510\,000\,000\,\text{km}^2} \approx 0{,}72 = 72\,\%$

Das Bild D gibt die Flächengröße der Reiskörner im Vergleich zur Erdoberfläche am besten wieder.

1 Potenzen mit einer ganzen Zahl als Exponent Seiten 38, 39

Seite 38

Einstieg

→ In der oberen Reihe steht der Platzhalter jeweils für den Wert der Potenz; in der unteren Reihe steht er für den Exponenten bzw. für die Potenz.

$$625 \xrightarrow{:5} 125 \xrightarrow{:5} 25 \xrightarrow{:5} 5 \qquad 5^4 \xrightarrow{:5} 5^3 \xrightarrow{:5} 5^2 \xrightarrow{:5} 5^1$$

625	125	25	5	1
5^4	5^3	5^2	5^1	5^0

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{3125}$
5^{-1}	5^{-2}	5^{-3}	5^{-4}	5^{-5}

→ Es gilt: $5^0 = 1$

→

	$\xrightarrow{:10}$	$\xrightarrow{:10}$		
10 000	1000	100	10	1
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
	$\xrightarrow[:10]{}$	$\xrightarrow[:10]{}$		

0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}

Ist der Exponent ≥ 0, so ist der Exponent gleich der Anzahl der Nullen. Ist der Exponent negativ, dann gibt der Betrag des Exponenten die Anzahl der Nachkommastellen an.

→ In beiden Tabellen steht als Wert die Zahl 1 ($5^0 = 1$ und $10^0 = 1$).

1 a) $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$ b) $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$ c) $2^{-5} = \frac{1}{2^5}$

d) $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$ e) $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$ f) $0{,}3^{-2} = \frac{1}{0{,}3^2}$

2 a) $\frac{1}{3^2} = 3^{-2}$ b) $\frac{1}{4^3} = 4^{-3}$ c) $\frac{1}{5^6} = 5^{-6}$

d) $\frac{1}{2^1} = 2^{-1}$ e) $\frac{1}{10^{10}} = 10^{-10}$ f) $\frac{1}{0{,}5^3} = 0{,}5^{-3}$

3 a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

b) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

c) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0{,}008$

d) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \approx 0{,}0370$

e) $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278$

f) $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} \approx 0{,}0001$

Seite 39

A a) $\frac{1}{4^2}$ b) $\frac{1}{12^4}$ c) $\frac{1}{5^5}$

d) $\frac{1}{6^2}$ e) $\frac{1}{0{,}1^2}$ f) $\frac{1}{0{,}4^5}$

B a) 5^{-3} b) 3^{-3} c) $0{,}2^{-6}$

d) 12^{-2} e) $0{,}15^{-2}$ f) $1{,}6^{-4}$

Seite 39, links

4 Zusammen gehören die Kärtchen:

$0{,}01 = 10^{-2} = \frac{1}{100}$;

$0{,}0001 = 10^{-4} = \frac{1}{10\,000}$.

Übrig bleiben die Kärtchen:

0,01; 10^{-5} und $\frac{1}{1\,000\,000}$.

5 a) $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = 0{,}5$

b) $0{,}2^{-1} = \frac{1}{0{,}2^1} = 5$

c) $100 \cdot 5^{-2} = 100 \cdot \frac{1}{5^2} = 100 \cdot \frac{1}{25} = 4$

d) $8 \cdot 2^{-3} = 8 \cdot \frac{1}{2^3} = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1$

e) $20 \cdot 2^{-2} = 20 \cdot \frac{1}{2^2} = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5$

f) $50 \cdot 5^{-1} = 50 \cdot \frac{1}{5^1} = 10$

6 a) $4^{-6} = \frac{1}{4^6} = \frac{1}{4096} \approx 0{,}0002$

b) $12^{-3} = \frac{1}{12^3} = \frac{1}{1728} \approx 0{,}0006$

c) $8^{-4} = \frac{1}{8^4} = \frac{1}{4096} \approx 0{,}0002$

d) $7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343} \approx 0{,}0029$

e) $3^{-6} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729} \approx 0{,}0014$

f) $11^{-3} = \frac{1}{11^3} = \frac{1}{1331} \approx 0{,}0008$

7 a) $0{,}5^{-4} = \frac{1}{0{,}5^4} = \frac{1}{0{,}0625} = 16$

b) $0{,}2^{-3} = \frac{1}{0{,}2^3} = \frac{1}{0{,}008} = 125$

c) $0{,}25^{-4} = \frac{1}{0{,}25^4} = \frac{1}{0{,}003\,906\,25} = 256$

d) $2{,}5^{-2} = \frac{1}{2{,}5^2} = \frac{1}{6{,}25} = 0{,}16$

Alternativer Lösungsweg

z. B. zu a): $0{,}5^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{1}\right)^4 = 24 = 16$

8 a) $8^6 \cdot 4^{-5} = 8^6 \cdot \frac{1}{4^5} = 262\,144 \cdot \frac{1}{1024} = 256$

b) $5^2 \cdot 2^{-3} = 5^2 \cdot \frac{1}{2^3} = 25 \cdot \frac{1}{8} = 3{,}125$

c) $5^2 \cdot 4^{-5} = 5^2 \cdot \frac{1}{4^5} = 25 \cdot \frac{1}{1024} \approx 0{,}0244$

d) $8^{-6} \cdot 4^5 = \frac{1}{8^6} \cdot 45 = \frac{1}{262\,144} \cdot 1024 = 0{,}003\,906\,25$

e) $5^{-2} \cdot 2^3 = \frac{1}{5^2} \cdot 8 = \frac{1}{25} \cdot 8 = 0{,}32$

f) $5^{-2} \cdot 4^5 = \frac{1}{5^2} \cdot 45 = \frac{1}{25} \cdot 1024 = 40{,}96$

9 a) $4^{-2} \cdot 3^{-2} = \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{9}$

b) $5^{-3} \cdot 6^{-2} = \frac{1}{5^3} \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{1}{125} \cdot \frac{1}{36}$

c) $5^{-2} \cdot 2^{-5} = \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{32}$

10 a) $2^{-4} \cdot 3^5 + 2^{-4} \cdot 53$

$= 2^{-4} \cdot (3^5 + 5^3)$

$= \frac{1}{2^4} \cdot (243 + 125)$

$= \frac{1}{16} \cdot 368 = 23$

b) $2^{-4} \cdot 7^3 + 2^{-4} \cdot 9^3$

$= 2^{-4} \cdot (7^3 + 9^3)$

$= \frac{1}{2^4} \cdot (343 + 729)$

$= \frac{1}{16} \cdot 1072 = 67$

ACHTUNG: Sie arbeiten mit der Manuskriptfassung der Lösungen. Sie enthalten möglicherweise Fehler.
Gern können Sie Rückmeldungen an die folgende email-Adresse senden: SchnittpunktBW@klett.de
Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

c) $5^{-3} \cdot 11^3 + 5^{-3} \cdot 13^2$
$= 5^{-3} \cdot (11^3 + 13^2)$
$= \frac{1}{5^3} \cdot (1331 + 169)$
$= \frac{1}{125} \cdot 1500 = 12$

d) $7^{-1} \cdot 2^6 + 7^{-1} \cdot 3^3$
$= 7^{-1} \cdot (2^6 + 3^3)$
$= \frac{1}{7^1} \cdot (64 + 27)$
$= \frac{1}{7} \cdot 91 = 13$

11 a) $a^{-6} = \frac{1}{a^6}$ b) $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$
c) $x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ d) $y^{-1} = \frac{1}{y^1} = \frac{1}{y}$

12 a) Hier wurden vermutlich Basis und Exponent miteinander multipliziert. Richtig ist:
$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

b) Das negative Vorzeichen vor der Potenz wurde vergessen oder man hat $(-3)^2$ statt -3^2 gerechnet. Richtig ist:
$-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$

c) Hier wurde das negative Vorzeichen vor der Potenz vergessen oder eventuell mit dem negativen Exponenten „multipliziert“. Richtig ist:
$-4^{-2} = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}$

d) Hier wurde vermutlich der Exponent von der Basis subtrahiert. Richtig ist:
$10^{-2} = -\frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

Seite 39, rechts

4 a) $5^{-1} = \frac{1}{5} = 0{,}2$
b) $0{,}5^{-1} = \frac{1}{0{,}5} = 2$
c) $0{,}2 - 1 = \frac{1}{0{,}2} = 5$
d) $125 \cdot 5 - 3 = 125 \cdot \frac{1}{5^3} = 125 \cdot \frac{1}{125} = 1$
e) $40 \cdot 2 - 3 = 40 \cdot \frac{1}{2^3} = 40 \cdot \frac{1}{8} = 5$
f) $200 \cdot 5 - 2 = 200 \cdot \frac{1}{5^2} = 200 \cdot \frac{1}{25} = 8$

5 a) $8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64} = 0{,}015\,625$
b) $0{,}8^{-2} = \frac{1}{0{,}8^2} = \frac{1}{0{,}64} = 1{,}5626$
c) $0{,}08^{-2} = \frac{1}{0{,}08^2} = \frac{1}{0{,}0064} = 156{,}25$
d) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0{,}008$
e) $0{,}5^{-3} = \frac{1}{0{,}5^3} = \frac{1}{0{,}125} = 8$
f) $0{,}05^{-3} = \frac{1}{0{,}05^3} = \frac{1}{0{,}000\,125} = 8000$

Wenn die Position der Kommastelle in der Basis sich um eins nach links verschiebt, so verschiebt sich die Position der Kommastelle im Ergebnis um 2 nach rechts (wenn der Exponent −2 lautet) bzw. um 3 nach rechts (wenn der Exponent −3 lautet).

6 a) $3^{-3} \cdot 2^6 + 3^{-3} \cdot 8^5$
$= 3^{-3} \cdot (2^6 + 8^5)$
$= \frac{1}{3^3} \cdot (64 + 32\,768)$
$= \frac{1}{27} \cdot 32\,832 = 1216$

b) $2^{-5} \cdot 9^4 + 2^{-5} \cdot 7^4 - 2^{-5} \cdot 5^4 - 2^{-5} \cdot 3^4$
$= 2^{-5} \cdot (9^4 + 7^4 - 5^4 - 3^4)$
$= \frac{1}{2^5} \cdot (6561 + 2401 - 625 - 81)$
$= \frac{1}{32} \cdot 6256 = 258$

c) $11^{-6} \cdot 10^5 + 11^{-6} \cdot 8^5 + 11^{-6} \cdot 7^5$
$= 11^{-6} \cdot (10^5 + 8^5 + 7^5)$
$= \frac{1}{11^6} \cdot (100\,000 + 32\,768 + 16\,807)$
$= \frac{1}{1\,771\,561} \cdot 149\,575 \approx 0{,}0844$

d) $0{,}05^{-2} \cdot 0{,}2^8 + 0{,}05^{-2} \cdot 0{,}7^8$
$= \frac{1}{0{,}05^2} \cdot (0{,}2^8 + 0{,}7^8)$
$= 400 \cdot (0{,}2^8 + 0{,}7^8) \approx 23{,}0602$

7 a) Die Potenzwerte unterscheiden sich durch ihr Vorzeichen. Denn es gilt:
$-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$ und
$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$

b) Die Potenzwerte sind gleich. Denn es gilt:
$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$ und
$-3^3 = -3 \cdot 3 \cdot 3 = -27.$

c) Die Potenzwerte unterscheiden sich durch ihr Vorzeichen. Denn es gilt:
$-4^{-2} = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}$ und $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}.$

d) Die Potenzwerte unterscheiden sich durch ihr Vorzeichen. Denn es gilt:
$-5^{-3} = -\frac{1}{5^3} = -\frac{1}{125}$ und $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}.$

e) Die Potenzwerte unterscheiden sich durch ihr Vorzeichen. Dadurch dass der Exponent 4 beträgt, also eine gerade Zahl ist, wird das Vorzeichen bei der ersten Potenz im Ergebnis positiv; bei der zweiten Potenz kommt aber das Vorzeichen nur einmal vor, das Ergebnis ist damit negativ. Genauer:
$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$ und
$-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81.$

f) Die Potenzwerte unterscheiden sich durch ihr Vorzeichen. Denn es gilt:
$(-3)^{-5} = \frac{1}{(-3)^5} = \frac{1}{-243} = -\frac{1}{243}$ und $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}.$

8 $5^3 = 125$ und $3^5 = 243$;
$6^4 = 1296$ und $4^6 = 4096$;
$10^8 = 100\,000\,000$ und $8^{10} = 1\,073\,741\,824.$

ACHTUNG: Sie arbeiten mit der Manuskriptfassung der Lösungen. Sie enthalten möglicherweise Fehler.
Gern können Sie Rückmeldungen an die folgende email-Adresse senden: SchnittpunktBW@klett.de
Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

Wählt man zwei Zahlen, die sich um (mindestens) zwei unterscheiden, dann stellt man fest, dass der Potenzwert größer ist, wenn die kleinere der beiden Zahlen die Basis der Potenz bildet und die größere im Exponenten steht.
Weiteres Beispiel:
$8^6 = 262\,144$ und $6^8 = 1\,679\,616$.
Man kann feststellen, dass diese Regel im Allgemeinen auch dann gilt, wenn der Unterschied zwischen den beiden Zahlen 1 beträgt (ist der Unterschied größer als 2, dann wird der Effekt noch verstärkt). Z. B.:
$4^3 = 64$ und $3^4 = 81$ oder
$5^4 = 625$ und $4^5 = 1045$
Ausnahme bilden allerdings die Zahlenpaare 1 und 3 bzw. 2 und 3. Die entstehenden Potenzwerte sind dann so klein, dass die oben genannte Regel verletzt wird. Man erhält:
$3^1 = 3$ und $1^3 = 1$ bzw. $3^2 = 9$ und $2^3 = 8$.
Eine weitere Ausnahme von der Regel findet man in Teilaufgabe b).
b) Es gilt ein einziges Zahlenpaar (a, b) bei dem $a^b = b^a$ gilt. Das sind die Zahlen 2 und 4. Es gilt:
$2^4 = 16$ und $4^2 = 16$.

9 Individuelle Ausführung
Man stellt fest, dass die Zahlen vor dem Komma die steigenden 2er-Potenzen sind:
2; 4; 8; 16; 32; 64; …
Die Zahlen nach dem Komma werden gebildet aus den Nachkommastellen der steigenden Potenzen von 0,5. Denn es gilt:
$0{,}5^1 = 0{,}5$; $0{,}5^2 = 0{,}25$; $0{,}5^3 = 0{,}125$; $0{,}5^4 = 0{,}0625$;
$0{,}5^5 = 0{,}031\,25$; $0{,}5^6 = 0{,}015\,625$; …
Das hängt damit zusammen, dass gilt:

$$2^1 + 2^{-1} = 2 + \frac{1}{2} = 2 + 0{,}5$$

$$2^2 + 2^{-2} = 2^2 + \frac{1}{2^2} = 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2^2 + 0{,}5^2 = 4 + 0{,}25$$

$$2^3 + 2^{-3}$$

$$= 2^3 + \frac{1}{2^3} = 2^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2^3 + 0{,}5^3 = 8 + 0{,}125$$

$$2^4 + 2^{-4}$$

$$= 2^4 + \frac{1}{2^4} = 2^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2^4 + 0{,}5^4 = 16 + 0{,}0625$$

…

Allgemein gilt:

$$2^n + 2^{-n} = 2^n + \frac{1}{2^n} = 2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^n + 0{,}5^n$$

Je nachdem, wie die Anzahl der angezeigten Nachkommastellen eingestellt ist, „verschwindet“ der zweite Summand ab einer bestimmten Größe von n. Bei 4 angezeigten Nachkommastellen werden ab $n = 15$ nur noch Nullen nach dem Komma angezeigt, bei 2 Nachkommastellen bereits ab $n = 8$ etc.
Egal wie hoch jedoch die Anzeige eingestellt ist, sind ab einem bestimmten alle Nachkommastellen gleich null (bei Verwendung von Excel 2010 beispielsweise ab $n = 25$). Hier ist die Rechengenauigkeit des Programms erreicht.

2 Potenzen mit gleicher Basis Seiten 40, 41

Seite 40

Einstieg

→ grüne Tabelle:

·	2	4	8	16	32	64
2	4	8	16	32	64	128
4	8	16	32	64	128	256
8	16	32	64	128	256	512
16	32	64	128	256	512	1024
32	64	128	256	512	1024	2048
64	128	256	512	1024	2048	4096

orange Tabelle:

·	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}
2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}

Für die Multiplikationen in der grünen Tabelle hat man vermutlich etwas länger gebraucht.

→ Mögliche Antwort:
In der orangen Tabelle findet man den neuen Exponenten, indem man den Exponenten der passenden Potenz in der Kopfspalte mit demjenigen in der entsprechenden Potenz in der Kopfzeile addiert.
Oder auch: Die Exponenten fangen oben links mit 2 an. Pro Kästchen nach rechts bzw. nach unten erhöht sich der Exponent jeweils um 1. Die Basis bei allen Potenzen beträgt stets 2.

→ 1. Divisionstabelle:

:	2	4	8	16	32	64
2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$
64	32	16	8	4	2	1

2. Divisionstabelle:

:	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}
2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Mögliches Vorgehen:
Man subtrahiert den Exponenten der Potenz in der Kopfzeile vom Exponenten der entsprechenden Potenz in der Kopfspalte. Die Basis beträgt immer 2.

Seite 41

1 a) $6^5 \cdot 6^3 = 6^{5+3} = 6^8$
b) $4^7 \cdot 4^2 = 4^{7+2} = 4^9$
c) $5^{12} : 5^8 = 5^{12-8} = 5^4$
d) $2^{10} \cdot 2^{-4} = 2^{10+(-4)} = 2^6$
e) $10^4 \cdot 10^{-6} = 10^{4+(-6)} = 10^{-2}$
f) $\frac{9^6}{9^3} = 9^{6-3} = 9^3$

2 a) $a^7 \cdot a^2 = a^{7+2} = a^9$
b) $a^4 \cdot a^4 = a^{4+4} = a^8$
c) $a^8 : a^6 = a^{8-6} = a^2$
d) $x^5 \cdot x^{-2} = x^{5+(-2)} = x^3$
e) $x^4 \cdot x^{-7} = x^{4+(-7)} = x^{-3}$
f) $\frac{x^7}{x^6} = x^{7-6} = x^1 = x$

3 a) $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$
b) $(4^5)^2 = 4^{5 \cdot 2} = 4^{10}$
c) $(2^3)^{-2} = 2^{3 \cdot (-2)} = 2^{-6}$
d) $(10^{10})^{10} = 10^{10 \cdot 10} = 10^{100}$
e) $(a^4)^5 = a^{4 \cdot 5} = a^{20}$
f) $(b^2)^{-1} = b^{2 \cdot (-1)} = b^{-2}$

A a) $7^5 \cdot 7^2 = 7^{5+2} = 7^7$
b) $7^5 \cdot 7^{-2} = 7^{5-2} = 7^3$
c) $12^9 : 12^3 = 12^{9-3} = 12^6$
d) $12^{10} \cdot 12^{-15} = 12^{10-15} = 12^{-5}$
e) $\frac{11^8}{11^7} = 11^{8-7} = 11^1 = 11$
f) $(5^4)^6 = 5^{4 \cdot 6} = 5^{24}$

B a) $a^2 \cdot a^2 = a^{2+2} = a^4$
b) $x^6 \cdot x^{-3} = x^{6-3} = x^3$
c) $(y^2)^6 = y^{2 \cdot 6} = y^{12}$
d) $(x^4)^{-2} = x^{4 \cdot (-2)} = x^{-8}$
e) $\frac{a^4}{a^6} = a^{4-6} = a^{-2}$
f) $a^8 : a^3 = a^{8-3} = a^5$

Seite 41, links

4 a) $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
b) $2^8 : 2^7 = 2^{8-7} = 2^1 = 2$
c) $5^8 \cdot 5^{-6} = 5^{8+(-6)} = 5^2 = 25$
d) $23^5 : 23^4 = 23^{5-4} = 23^1 = 23$

5 a) $2^3 \cdot 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$
b) $4^5 \cdot 4^2 = 4^{5+2} = 4^7$
c) $3^5 \cdot 3^6 : 3^4 = 3^{5+6-4} = 3^7$
d) $5^2 \cdot 5^4 : 5^8 = 5^{2+4-8} = 5^{-2}$
e) $3^8 : (3^2 \cdot 3^4) = 3^8 : 3^{2+4} = 3^8 : 3^6 = 3^{8-6} = 3^2$
f) $10^5 : (10^6 \cdot 10^4)$
$= 10^5 : 10^{6+4} = 10^5 : 10^{10} = 10^{5-10} = 10^{-5}$

6 a) $4^6 \cdot 4^3 = 4^9$
b) $3^4 \cdot 3^{-6} = 3^{-2}$
c) $\frac{12^8}{12^{10}} = 12^{-2}$
d) $(6^4)^3 = 6^{12}$

7 Man kann folgende Gleichungen legen:
$2^{-4} = 0{,}0625$; $2^{-5} = 0{,}03125$; $5^4 = 625$;
$5^{-5} = 0{,}00032$

8 a) $3^4 \cdot 3^5 = 3^{20}$
Statt die Exponenten miteinander zu addieren, hat man sie miteinander multipliziert. Richtig ist: $3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$
b) $(3^4)^2 = 3^{16}$
Statt die Exponenten miteinander zu multiplizieren, hat man den Exponenten innerhalb der Klammer mit dem anderen Exponenten potenziert. Richtig ist:
$(3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$.
c) $6^5 : 6^2 = 3^3$
Hier hat man einerseits die Exponenten voneinander subtrahiert, was richtig ist, auf der anderen Seite aber auch die Basis des Ergebnisses verändert, was falsch ist. Richtig ist:
$6^5 : 6^2 = 6^{5-2} = 6^3$.
d) $3^5 + 3^2 = 3^7$
Hier hat man versucht, zwei unterschiedliche Potenzen miteinander zu addieren; dafür hat man die Exponenten miteinander addiert. Diese Operation ist aber nicht möglich: unterschiedliche Potenzen zu gleicher Basis können nur miteinander multipliziert oder dividiert werden, aber nicht addiert oder subtrahiert. Richtig ist:
$3^5 + 3^2 = 243 + 9 = 252$
(Eine Addition ist nur möglich, indem man die Potenzwerte ausrechnet.)
e) $\frac{3^8}{3^2} = 3^4$

Um zwei Potenzen mit der gleichen Basis zu dividieren, muss man den unteren Exponenten vom oberen subtrahieren. Stattdessen hat man hier den oberen Exponenten durch den unteren dividiert. Richtig ist: $\frac{3^8}{3^2} = 3^{8-2} = 3^6$

f) $\frac{4^4}{4^2} = 1^2$

Um die Potenzen zu dividieren, hat man hier sowohl den unteren Exponenten vom oberen subtrahiert – was richtig ist – als auch die eine Basis durch die andere Basis dividiert – was falsch ist. Die richtige Rechnung lautet: $\frac{4^4}{4^2} = 4^{4-2} = 4^2$.

g) $33^2 = 66$

Um die Potenz auszurechnen, hat man hier die Basis 33 mit dem Exponenten 2 multipliziert.
Richtig ist: $33^2 = 33 \cdot 33 = 1089$

h) $2 + 2^3 = 16$

Hier hat man versucht, zwei unterschiedliche Potenzen zu addieren – was nicht zulässig ist; dafür hat man die zwei Werte miteinander multipliziert, also $2 \cdot 2^3$ gerechnet. Richtig ist:
$2 + 2^3 = 2 + 8 = 10$
(Eine Addition ist nur möglich, indem man die Potenzwerte ausrechnet.)

i) $x^{10} : x^5 = x^2$

Hier hat man den ersten Exponenten durch den zweiten dividiert, statt den zweiten vom ersten zu subtrahieren. Richtig ist: $x^{10} : x^5 = x^{10-5} = x^5$

j) $x^5 - x^3 = x^2$

Unterschiedliche Potenzen zu gleicher Basis können nicht voneinander subtrahiert oder miteinander addiert werden: nur Division oder Multiplikation sind möglich. Der gegebene Rechenausdruck kann also nicht vereinfacht werden.
Richtig ist: $x^5 - x^3 = x^5 - x^3$

Seite 41, rechts

4 a) $a^4 \cdot a^{-2} \cdot a^5 = a^{4-2+5} = a^7$
b) $b^3 \cdot b^3 \cdot (b^3)^2 = b^{3+3+3 \cdot 2} = b^{12}$
c) $(c^4)^2 : c^4 : c^2 = c^{4 \cdot 2 - 4 - 2} = c^2$
d) $(x^5 : x^7) \cdot x^6 = x^{5-7} \cdot x^6 = x^{-2+6} = x^4$
e) $x^{10} : x^8 \cdot x^{-4} = x^{10-8} \cdot x^{-4} = x^{2+(-4)} = x^{-2}$
f) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot a^{-10} = a^{2+3+4+(-10)} = a^{-1}$

5 a) $a^1 \cdot a^2 \cdot a^{-3} = a^{1+2+(-3)} = a^0 = 1$
b) $a^9 : a^8 : a^1 = a^{9-8-1} = a^0 = 1$
c) $\frac{a^5 \cdot a^3}{a^7} = a^{5+3-7} = a^1 = a$
d) $\frac{a^2}{a^4} \cdot a^3 = \frac{a^2 \cdot a^3}{a^4} = a^{2+3-4} = a^{-1} = \frac{1}{a}$
e) $\frac{a^7}{a^3 \cdot a^4} = a^{7-3-4} = a^0 = 1$

6 Die Terme können nicht mit dem Taschenrechner berechnet werden, weil die Zahlen zu groß für den Taschenrechner sind. Man erhält eine Fehlermeldung, z. B. „Math Error“ oder ähnliches. Die Terme können aber mithilfe der Potenzrechengesetze vereinfacht und anschließend berechnet werden.
a) $\frac{2^{800}}{2^{796}} = 2^{800-796} = 2^4 = 16$
b) $4^{-250} \cdot 4^{252} = 2^{-250+252} = 4^2 = 16$
c) $3^{210} \cdot 3^{-209} = 2^{210-209} = 3^1 = 3$
d) $3^{-210} \cdot 3^{209} = 2^{-210+209} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

7 a) $(2x)^4 = (2x) \cdot (2x) \cdot (2x) \cdot (2x)$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$
$= 2^4 \cdot x^4$
$= 16x^4$
b) $(5a)^2 = (5a) \cdot (5a)$
$= 5 \cdot 5 \cdot a \cdot a$
$= 5^2 \cdot a^2$
$= 25a^2$
c) $(-4x)^4 = (-4x) \cdot (-4x) \cdot (-4x) \cdot (-4x)$
$= (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$
$= (-4)^4 \cdot x^4$
$= 64x^4$
d) $(3x)^6 = (3x) \cdot (3x) \cdot (3x) \cdot (3x) \cdot (3x) \cdot (3x)$
$= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$
$= 3^6 \cdot x^6$
$= 729x^6$
e) $(25a^2)^2 = (25a^2) \cdot (25a^2)$
$= 25 \cdot 25 \cdot a^2 \cdot a^2$
$= 25^2 \cdot (a^2)^2$
$= 625a^4$
f) $(-2x)^3 = (-2x) \cdot (-2x) \cdot (-2x)$
$= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot x \cdot x \cdot x$
$= (-2)^3 \cdot x^3$
$= -8x^3$

2 Potenzen mit gleicher Basis Seite 42

Seite 42, links

9 a) $x^5 \cdot x^4 = x^{5+4} = x^9$
b) $x^3 \cdot x^{-5} = x^{3-5} = x^{-2}$
c) $(y^4)^2 = y^{4 \cdot 2} = y^8$
d) $a^{-8} \cdot a^6 = a^{-8+6} = a^{-2}$
e) $b^{-4} \cdot b^{-2} = b^{-4-2} = b^{-6}$
f) $(z^3)^{-2} = z^{3 \cdot (-2)} = z^{-6}$
g) $\frac{c^5}{c^3} = c^{5-3} = c^2$
h) $\frac{c^4}{c^6} = c^{4-5} = c^{-2}$
i) $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$

10 a) $8a^2 \cdot 5a^3 = 8 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a^3 = 40a^5$
b) $5x^2 \cdot 4x^4 = 5 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot x^4 = 20x^6$
c) $20a^5 \cdot 8a^5 = 20 \cdot 8 \cdot a^5 \cdot a^5 = 160a^{10}$
d) $6x^3 \cdot 2x^5 = 6 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot x^5 = 12x^8$
e) $4a^4 \cdot 4a^4 = 4 \cdot 4 \cdot a^4 \cdot a^4 = 16a^8$
f) $3x^4 \cdot 5x^{-6} = 3 \cdot 5 \cdot x^4 \cdot x^{-6} = 15x^{-2}$
g) $9a^{-2} \cdot 3a^{-4} = 9 \cdot 3 \cdot a^{-2} \cdot a^{-4} = 27a^{-6}$
h) $4a^{-2} \cdot 5a^{-3} = 4 \cdot 5 \cdot a^{-2} \cdot a^{-3} = 20a^{-5}$

11 a) $2^9 \cdot 2^{-8} = 2^1 = 2$ b) $3^7 \cdot 3^{-8} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
c) $5^{17} \cdot 5^{-17} = 5^0 = 1$ d) $\frac{4^3}{4^4} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$
e) $\frac{6^{10}}{6^9} = 6^1 = 6$ f) $\frac{12^{12}}{12^{12}} = 12^0 = 1$
g) $a^7 : a^{-6} = a^{7-(-6)} = a^{13}$ h) $x^{10} \cdot x^{-10} = x^0 = 1$
i) $b^5 : b^6 = b^{-1} = \frac{1}{b}$ j) $\frac{x^3}{x^2} = x^1 = x$
k) $\frac{x^1}{x^1} = x^0 = 1$ l) $\frac{x}{x^2} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

12 Folgende Terme sind gleich:
$x^n \cdot x^{3n} = x^{4n}$; $2x^n \cdot x^{2n} = 2x^{3n}$;
$x^{n+1} \cdot x^{n+2} = x^{2n+3}$; $2x^{2n} \cdot 3x^{3n} = 6x^{5n}$;
$x^{n+1} \cdot x^n = x^{2n+1}$; $6x^{n+1} \cdot x^{1-n} = 6x^0 = 6$

13 a) Man schreibt die Basis der Potenz als neue Potenz zu einer möglichst kleinen Basis. Der neue Exponent ergibt sich aus den Potenzrechengesetzen als Produkt beider Exponenten.
(1) $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}$
(2) $8^2 = (2^3)^2 = 2^6$
(3) $27^4 = (3^3)^4 = 3^{12}$
(4) $125^5 = (5^3)^5 = 5^{15}$
b) Um die Potenz mit möglichst großer Basis und kleinem Exponenten zu schreiben, schreibt man als erstes den Exponenten als Produkt und nimmt man einen möglichst großen Faktor des Produkts zum Bilden der neuen Basis.
(1) $2^{10} = 2^{2 \cdot 5} = (2^5)^2 = 32^2$
(2) $8^4 = 8^{2 \cdot 2} = (8^2)^2 = 64^2$
(3) $3^9 = 3^{3 \cdot 3} = (3^3)^3 = 27^3$
(4) $25^8 = 25^{4 \cdot 2} = (25^4)^2 = 390\,625^2$

14 Spiel; individuelle Lösungen

Seite 42, rechts

8 a) $a^m \cdot a^{1-m} = a^{m+(1-m)} = a^1 = a$
b) $y^{m-2} \cdot y^{2-m} = y^{m-2+2-m} = y^0 = 1$
c) $x^1 \cdot x = x^1 \cdot x^1 = x^2$
d) $\frac{b^m}{b} = \frac{b^m}{b^1} = b^{m-1}$
e) $\frac{a^{2(n+1)}}{a^{2n+2}} = a^{2(n+1)-(2n+2)} = a^{2n+2-2n-2} = a^0 = 1$
f) $\frac{a^{2n}}{a^{2n+1}} = a^{2n-(2n+1)} = a^{2n-2n-1} = a^{-1} = \frac{1}{a}$
g) $\frac{a^{m+1}}{a^{m-1}} = a^{m+1-(m-1)} = a^{m+1-m+1} = a^2$
h) $\frac{x^{2m}}{x^m} = x^{2m-m} = x^m$
i) $\frac{y^{2m+1}}{y^{3m}} = y^{2m+1-3m} = y^{1-m}$

9 a) $5a^m \cdot 4a^m = 5 \cdot 4a^{m+m} = 20a^{2m}$
b) $6x^{m+1} \cdot 3x^{m-1} = 6 \cdot 3x^{m+1+m-1} = 18x^{2m}$
c) $3a^{2m} \cdot 5a^{3m} = 3 \cdot 5a^{2m+3m} = 15a^{5m}$
d) $6x^{m-5} \cdot x^5 = 6x^{m-5+5} = 6x^m$
e) $2a^{4-m} \cdot 2a^m = 2 \cdot 2\,a^{4-m+m} = 4a^4$
f) $10x^{10m} \cdot 10x^{10m} = 10 \cdot 10x^{10m+10m} = 100x^{20m}$
g) $\frac{4a^{3m}}{2a^m} = (4:2) \cdot a^{3m-m} = 2a^{2m}$
h) $\frac{10x^m}{2x^2} = (10:2) \cdot x^{m-2} = 5x^{m-2}$

10 Es sind jeweils beide Möglichkeiten angegeben.
a) $2^5 \cdot 2^7 = 2^{12}$ b) $3^2 \cdot 3^6 = 3^8$
$2^5 \cdot 2^7 = 4^6$ $3^2 \cdot 3^6 = 81^2$
c) $2x^2 \cdot 2x^2 = 4x^4$ d) $(2x^2)^3 = 8x^6$
$2x^2 \cdot 2x^2 = 2^2 \cdot (x^2)^2$ $(2x^2)^3 = 8 \cdot (x^3)^2$
Übrig bleiben die Kärtchen:
4^8; 3^{12}; $4x^6$ und $8x^4$.
Zu diesen Kärtchen kann man keine Aufgaben mit doppelten Lösungen mehr finden, da die Rechenausdrücke in den Kärtchen alle unterschiedlich sind.
Beispielaufgaben:
$4^{12} : 4^4 = 4^8$; $3^{10} \cdot 3^2 = 3^{12}$; $(2x^3)^2 = 4x^6$;
$2x^5 \cdot 4x^{-1} = 8x^4$

11 a) $(2^4 \cdot 2^3)^2 = (2^{4+3})^2 = (2^7)^2 = 2^{7 \cdot 2} = 2^{14} = 16\,384$
b) $(2^4 \cdot 2^{-3})^2 = (2^1)^2 = 2^2 = 4$
c) $(2^{-4} \cdot 2^3)^2 = (2^{-1})^2 = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
d) $(2^{-4} \cdot 2^{-3})^2 = (2^{-7})^2 = 2^{-14} = \frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16\,384}$
Tipp: Man kann von innen nach außen arbeiten, wie in Teilaufgabe a) ausführlich gezeigt. Möglich ist aber auch, zu Beginn jede Potenz getrennt zu potenzieren und anschließend die beiden Potenzen miteinander zu multiplizieren, z. B. in a): $(2^4 \cdot 2^3)^2 = (2^4)^2 \cdot (2^3)^2 = 2^8 \cdot 2^6 = 2^{14}$

12 a) Die Basis der jeweiligen Potenz kann auch als Potenz zu einer kleineren Basis geschrieben werden. Der neue Exponent ergibt sich mithilfe den Potenzrechengesetzen als Produkt beider Exponenten.
(1) $4^6 = (2^2)^6 = 2^{12}$
(2) $100^6 = (10^2)^6 = 10^{12}$
(3) $49^3 = (7^2)^3 = 7^6$
(4) $27^5 = (3^3)^5 = 3^{15}$

b) Um die Potenz mit möglichst großer Basis und kleinem Exponenten zu schreiben, schreibt man als erstes den Exponenten als Produkt und nimmt man einen möglichst großen Faktor des Produkts zum Bilden der neuen Basis.
(1) $2^{10} = 2^{2 \cdot 5} = (2^5)^2 = 32^2$
(2) $5^6 = 5^{2 \cdot 3} = (5^3)^2 = 125^2$
(3) $3^9 = 3^{3 \cdot 3} = (3^3)^3 = 27^3$
(4) $4^{15} = 4^{3 \cdot 5} = (4^5)^3 = 1024^3$

14 Spiel; individuelle Lösungen

Seite 42, rechts

8 a) $a^m \cdot a^{1-m} = a^{m+(1-m)} = a^1 = a$
b) $y^{m-2} \cdot y^{2-m} = y^{m-2+2-m} = y^0 = 1$
c) $x^1 \cdot x = x^1 \cdot x^1 = x^2$
d) $\frac{b^m}{b} = \frac{b^m}{b^1} = b^{m-1}$
e) $\frac{a^{2(n+1)}}{a^{2n+2}} = a^{2(n+1)-(2n+2)} = a^{2n+2-2n-2} = a^0 = 1$
f) $\frac{a^{2n}}{a^{2n+1}} = a^{2n-(2n+1)} = a^{2n-2n-1} = a^{-1} = \frac{1}{a}$
g) $\frac{a^{m+1}}{a^{m-1}} = a^{m+1-(m-1)} = a^{m+1-m+1} = a^2$
h) $\frac{x^{2m}}{x^m} = x^{2m-m} = x^m$
i) $\frac{y^{2m+1}}{y^{3m}} = y^{2m+1-3m} = y^{1-m}$

9 a) $5a^m \cdot 4a^m = 5 \cdot 4a^{m+m} = 20a^{2m}$
b) $6x^{m+1} \cdot 3x^{m-1} = 6 \cdot 3x^{m+1+m-1} = 18x^{2m}$
c) $3a^{2m} \cdot 5a^{3m} = 3 \cdot 5a^{2m+3m} = 15a^{5m}$
d) $6x^{m-5} \cdot x^5 = 6x^{m-5+5} = 6x^m$
e) $2a^{4-m} \cdot 2a^m = 2 \cdot 2a^{4-m+m} = 4a^4$
f) $10x^{10m} \cdot 10x^{10m} = 10 \cdot 10x^{10m+10m} = 100x^{20m}$
g) $\frac{4a^{3m}}{2a^m} = (4:2) \cdot a^{3m-m} = 2a^{2m}$
h) $\frac{10x^m}{2x^2} = (10:2) \cdot x^{m-2} = 5x^{m-2}$

10 Es sind jeweils beide Möglichkeiten angegeben.
a) $2^5 \cdot 2^7 = 2^{12}$
$2^5 \cdot 2^7 = 4^6$
b) $3^2 \cdot 3^6 = 3^8$
$3^2 \cdot 3^6 = 8^{12}$
c) $2x^2 \cdot 2x^2 = 4x^4$
$2x^2 \cdot 2x^2 = 2^2 \cdot (x^2)^2$
d) $(2x^2)^3 = 8x^6$
$(2x^2)^3 = 8 \cdot (x^3)^2$
Übrig bleiben die Kärtchen:
4^8; 3^{12}; $4x^6$ und $8x^4$.
Zu diesen Kärtchen kann man keine Aufgaben mit doppelten Lösungen mehr finden, da die Rechenausdrücke in den Kärtchen alle unterschiedlich sind.
Beispielaufgaben:
$4^{12} : 4^4 = 4^8$; $3^{10} \cdot 3^2 = 3^{12}$; $(2x^3)^2 = 4x^6$;
$2x^5 \cdot 4x^{-1} = 8x^4$

11 a) $(24 \cdot 2^3)^2$
$= (24 + 3)^2 = (2^7)^2 = 2^{7 \cdot 2} = 2^{14} = 16\,384$
b) $(24 \cdot 2^{-3})^2 = (2^1)^2 = 2^2 = 4$
c) $(2^{-4} \cdot 2^3)^2 = (2^{-1})^2 = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
d) $(2^{-4} \cdot 2^{-3})^2 = (2^{-7})^2 = 2^{-14} = \frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16\,384}$
Tipp: Man kann von innen nach außen arbeiten, wie in Teilaufgabe a) ausführlich gezeigt. Möglich ist aber auch, zu Beginn jede Potenz getrennt zu potenzieren und anschließend die beiden Potenzen miteinander zu multiplizieren, z.B. in a): $(2^4 \cdot 2^3)^2 = (2^4)^2 \cdot (2^3)^2 = 2^8 \cdot 2^6 = 2^{14}$

12 a) Die Basis der jeweiligen Potenz kann auch als Potenz zu einer kleineren Basis geschrieben werden. Der neue Exponent ergibt sich mithilfe den Potenzrechengesetzen als Produkt beider Exponenten.
(1) $4^6 = (2^2)^6 = 2^{12}$
(2) $100^6 = (10^2)^6 = 10^{12}$
(3) $49^3 = (7^2)^3 = 7^6$
(4) $27^5 = (3^3)^5 = 3^{15}$
b) Um die Potenz mit möglichst großer Basis und kleinem Exponenten zu schreiben, schreibt man als erstes den Exponenten als Produkt und nimmt man einen möglichst großen Faktor des Produkts zum Bilden der neuen Basis.
(1) $210 = 22 \cdot 5 = (2^5)^2 = 32^2$
(2) $56 = 52 \cdot 3 = (5^3)^2 = 125^2$
(3) $39 = 33 \cdot 3 = (3^3)^3 = 27^3$
(4) $4^{15} = 4^{3 \cdot 5} = (4^5)^3 = 1024^3$

13 Spiel; individuelle Lösungen

3 Potenzen mit gleichen Exponenten Seite 43

Seite 43

Einstieg

→ $3^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144$ Quadrate
$(3 \cdot 4)^2 = 12^2 = 144$ Quadrate
→ Mögliche Formulierung:
Zwei Quadratzahlen können miteinander multipliziert werden, indem man zuerst die Basen miteinander multipliziert und anschließend das Quadrat des Produkts berechnet.
→ $2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000$ Würfel
$(2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$ Würfel
→ Mögliche Formulierung:
Zwei Kubikzahlen können miteinander multipliziert werden, indem man zuerst die Basen miteinander multipliziert und anschließend die dritte Potenz des Produkts berechnet.

1 a) $3^2 \cdot 4^2 = (3 \cdot 4)^2$
$= 12^2$
$= 144$

b) $0{,}5^2 \cdot 2^2 = (0{,}5 \cdot 2)^2$
$= 1^2$
$= 1$

c) $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4$
$= 10^4$
$= 10\,000$

d) $3^3 \cdot 2^3 = (3 \cdot 2)^3$
$= 6^3$
$= 216$

e) $0{,}01^2 \cdot 100^2 = (0{,}01 \cdot 100)^2 = 1^2 = 1$

f) $\frac{4^4}{2^4} = \left(\frac{4}{2}\right)^4$
$= 2^4$
$= 16$

g) $\frac{12^3}{4^3} = \left(\frac{12}{4}\right)^3$
$= 3^3$
$= 27$

h) $\frac{1{,}4^3}{0{,}7^3} = \left(\frac{1{,}4}{0{,}7}\right)^3$
$= 2^3$
$= 8$

i) $\frac{12^3}{24^3} = \left(\frac{12}{24}\right)^3$
$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3}$
$= \frac{1}{8} = 0{,}125$

j) $\frac{0{,}9^4}{0{,}45^4} = \left(\frac{0{,}9}{0{,}45}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1^4}{5^4} = \frac{1}{625} = 0{,}0016$

2 a) $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$
b) $x^5 \cdot y^5 = (x \cdot y)^5$
c) $\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$
d) $\frac{x^4}{y^4} = \left(\frac{x}{y}\right)^4$
e) $\frac{a^3}{2^3} = \left(\frac{a}{2}\right)^3$

3 Potenzen mit gleichen Exponenten Seite 44

Seite 44

A a) $5^2 \cdot 2^2 = (5 \cdot 2)^2 = 10^2 = 100$
b) $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$
c) $0{,}3^3 \cdot 10^3 = (0{,}3 \cdot 10)^3 = 3^3 = 27$
d) $0{,}4^5 \cdot 2{,}5^5 = (0{,}4 \cdot 2{,}5)^5 = 1^5 = 1$
e) $20^3 \cdot 5^3 = (20 \cdot 5)^3 = 100^3 = 1\,000\,000$

B a) $a^{10} \cdot b^{10} = (a \cdot b)^{10}$
b) $u^2 \cdot v^2 = (u \cdot v)^2$
c) $0{,}5^3 \cdot y^3 = (0{,}5 \cdot y)^3$
d) $\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$
e) $\frac{y^6}{2^6} = \left(\frac{y}{2}\right)^6$
f) $\frac{7^3}{a^3} = \left(\frac{7}{a}\right)^3$

Seite 44, links

3 a) $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$
b) $5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$
c) $2^3 \cdot 1{,}5^3 = (2 \cdot 1{,}5)^3 = 3^3 = 27$
d) $8^3 \cdot 1{,}25^3 = (8 \cdot 1{,}25)^3 = 10^3 = 1000$
e) $26^4 : 13^4 = (26 : 13)^4 = 2^4 = 16$
f) $15^2 : 30^2 = (15 : 30)^2 = 0{,}5^2 = 0{,}25$
g) $1000^2 : 200^2 = (1000 : 200)^2 = 5^2 = 25$
h) $25^3 : 50^3 = (25 : 50)^3 = 0{,}5^3 = 0{,}125$

4 a) $\frac{6^2}{3^2} = 2^2 = 4$
b) $\frac{12^3}{4^3} = 3^3 = 27$
c) $\frac{20^4}{10^4} = 2^4 = 16$
d) $\frac{25^4}{12{,}5^4} = 2^4 = 16$
e) $\frac{5{,}6^3}{1{,}4^3} = 4^3 = 64$
f) $\frac{27^5}{13{,}5^5} = 2^5 = 32$

5 a) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 = (2 \cdot 3 \cdot 4)^2 = 24^2 = 576$
b) $2^3 \cdot 5^3 \cdot 20^3 = (2 \cdot 5 \cdot 20)^3 = 200^3 = 8\,000\,000$
c) $0{,}5^5 \cdot 0{,}2^5 \cdot 10^5 = (0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 10)^5 = 1^5 = 1$
d) $7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^3$
$= (7 \cdot 11 \cdot 13)^3 = 1001^3 = 1\,003\,003\,001$

6 a) $5^3 \cdot 2^3 + 2{,}5^4 \cdot 4^4 = (5 \cdot 2)^3 + (2{,}5 \cdot 4)^4$
$= 10^3 + 10^4$
$= 1000 + 10\,000$
$= 11\,000$
b) $1{,}25^3 \cdot 4^3 + 4^2 \cdot 1{,}5^2$
$= (1{,}25 \cdot 4)^3 + (4 \cdot 1{,}5)^2 = 5^3 + 6^2 = 125 + 36 = 161$
c) $1{,}5^3 \cdot 4^3 : 6^3 = (1{,}5 \cdot 4)^3 : 6^3 = 6^3 : 6^3 = 1$
d) $5^3 \cdot 20^3 + 2{,}5^3 \cdot 40^3 = (5 \cdot 20)^3 + (2{,}5 \cdot 40)^3$
$= 100^3 + 100^3$
$= 2\,000\,000$

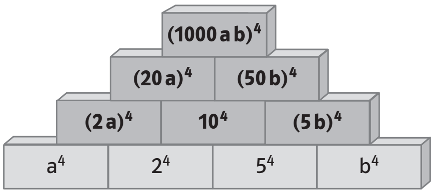
7

	falsch	richtig
$(2 \cdot 3)^3$	54	$6^3 = 216$
$(2 \cdot 4)^3$	128	$8^3 = 512$
$(4 \cdot 10)^{-3}$	0,004	$40^{-3} = 0{,}000\,015\,625$
$2 \cdot 3^4$	6^4	$2 \cdot 81 = 162$
$3 \cdot 2^2$	36	$3 \cdot 4 = 12$

Es wurden folgende Fehler gemacht:
1. Zeile: Statt $2^3 \cdot 3^3$ hat man $2 \cdot 3^3$ gerechnet.
2. Zeile: Statt $(2 \cdot 4)^3$ bzw. $2^3 \cdot 4^3$ hat man $2 \cdot 4^3$ gerechnet.
3. Zeile: Statt $(4 \cdot 10)^{-3}$ bzw. $4^{-3} \cdot 10^{-3}$ hat man $4 \cdot 10^{-3}$ gerechnet.
4. Zeile: Statt $2 \cdot 3^4$ hat man $(2 \cdot 3)^4$, also 6^4 gerechnet.
5. Zeile: Statt $3 \cdot 2^2$ hat man $(3 \cdot 2)^2$, also $6^2 = 36$ gerechnet.

8 a) $a^3 \cdot x^3 = (a \cdot x)^3$
b) $b^5 \cdot y^5 = (b \cdot y)^5$
c) $4^{-3} \cdot a^{-3} = (4a)^{-3}$
d) $0{,}2^6 \cdot x^6 = (0{,}2x)^6$
e) $5{,}4^2 \cdot y^2 = (5{,}4\,y)^2$
f) $(a + 1)^2 \cdot b^2 = ((a + 1)b)^2$
g) $\frac{x^5}{b^5} = \left(\frac{x}{b}\right)^5$
h) $\frac{6^4}{y^4} = \left(\frac{6}{y}\right)^4$
i) $\frac{1}{x^3} = \frac{1^3}{x^3} = \left(\frac{1}{x}\right)^3$

9



Seite 44, rechts

3 a) $\frac{2{,}4^3}{0{,}8^3} = \left(\frac{2{,}4}{0{,}8}\right)^3 = 3^3 = 27$
b) $\frac{14{,}4^4}{3{,}6^4} = \left(\frac{14{,}4}{3{,}6}\right)^4 = 4^4 = 256$
c) $\frac{13^2}{52^2} = \left(\frac{13}{52}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{16}$

4 a) $3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 = (3 \cdot 4 \cdot 5)^3 = 60^3 = 216\,000$
Überprüfen über das Produkt der Potenzen:
$3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 = 27 \cdot 64 \cdot 125 = 216\,000$
b) $5^4 \cdot 1{,}5^4 \cdot 6^4 = (5 \cdot 1{,}5 \cdot 6)^4 = 45^4 = 4\,100\,625$
Überprüfen über das Produkt der Potenzen:
$5^4 \cdot 1{,}5^4 \cdot 6^4 = 625 \cdot 5{,}0625 \cdot 1296 = 4\,100\,625$
c) $1{,}7^2 \cdot 20^2 \cdot 0{,}5^2 = (1{,}7 \cdot 20 \cdot 0{,}5)^2 = 17^2 = 289$
Überprüfen über das Produkt der Potenzen:
$1{,}7^2 \cdot 20^2 \cdot 0{,}5^2 = 2{,}89 \cdot 400 \cdot 0{,}25 = 289$
d) $400^6 \cdot 0{,}025^6 \cdot 0{,}1^6 = (400 \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}1)^6 = 1^6 = 1$
Überprüfen über das Produkt der Potenzen:
$400^6 \cdot 0{,}025^6 \cdot 0{,}1^6$
$= (4{,}096 \cdot 10^{15}) \cdot (2{,}441\,406\,25 \cdot 10^{-10}) \cdot 0{,}000\,001$
$= 1\,000\,000 \cdot 0{,}000\,001 = 1$

5 a) $2^2 \cdot 9^2 : 6^2 = 18^2 : 6^2 = 3^2 = 9$
b) $6^4 \cdot 4^4 : 12^4 = 24^4 : 6^4 = 4^4 = 256$
c) $\left(\frac{9}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1}\right)^2 = 6^2 = 36$
d) $\left(\frac{6}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{30}{12}\right)^2 = \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{30}{12}\right)^2 = 3^2 = 9$

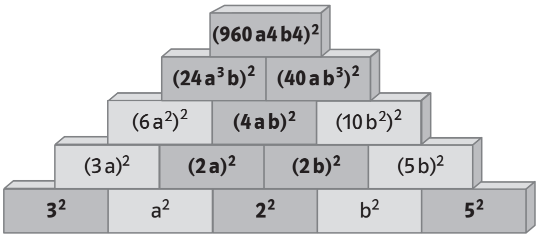
6 a) $\frac{8192^{30}}{4096^{30}} = \left(\frac{8192}{4096}\right)^{30} = \left(\frac{2}{1}\right)^{30} = 2^{30} = 1\,073\,741\,824$
b) $\frac{738\,738^{20}}{246\,246^{20}} = \left(\frac{738\,738}{246\,246}\right)^{20} = 3^{20} = 3\,486\,784\,401$
c) $\frac{617\,283\,945^{13}}{123\,456\,789^{13}} = \left(\frac{617\,283\,945}{123\,456\,789}\right)^{13} = 5^{13}$
$= 1\,220\,703\,125$
d) $\frac{123^4}{6150^4} = \left(\frac{123}{6150}\right)^4 = \left(\frac{1}{50}\right)^4 = \frac{1}{50^4} = \frac{1}{6\,250\,000}$

7 a) $3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 = 60^3$
b) $18^5 : (4{,}5^5 : 0{,}75^5) = 3^5$
Begründung: Es gilt:
$18^5 : (4{,}5^5 : 0{,}75^5) = 18^5 : 6^5 = 3^5$
c) $(18^{-3} : 9^{-3}) \cdot 0{,}5^{-3} = 1^{-3}$
Begründung: Es gilt:
$(18^{-3} : 9^{-3}) \cdot 0{,}5^{-3} = 2^{-3} \cdot 0{,}5^{-3} = 1^{-3}$
d) $(14^4 : 21^4) \cdot 45^4 = 30^4$
Begründung: Es gilt:
$(14^4 : 21^4) \cdot 45^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 45^4 = \left(\frac{2}{3} \cdot 45\right)^4 = 30^4$

8 a) $2^{m+1} \cdot 3^{m+1} = 6^{m+1}$
b) $a^{2m} \cdot b^{2m} = (a \cdot b)^{2m}$
c) $a^3 \cdot (a+1)^3 = [a(a+1)]^3 = (a^2 + a)^3$
d) $(x+1)^2 \cdot (x-1)^2 = [(x+1)(x-1)]^2 = (x^2 - 1)^2$
(letzter Schritt mit der 3. binomischen Formel)

e) $\frac{(2x+6)^2}{(x+3)^2} = \left(\frac{2x+6}{x+3}\right)^2 = \left(\frac{2(x+3)}{x+3}\right)^2 = 2^2 = 4$
(Kürzen durch $x + 3$ wenn $x \neq -3$)
f) $\frac{(5x-10)^2}{(x-2)^2} = \left(\frac{5x-10}{x-2}\right)^2 = \left(\frac{5(x-2)}{x-2}\right)^2 = 5^2 = 25$
(Kürzen durch $x - 2$ wenn $x \neq 2$)

9



4 Wissenschaftliche Schreibweise Seite 45

Seite 45

Einstieg

→ Energie von der Sonne:
4 Quadrillionen Ws
= 4000 Trilliarden Ws
= 4 000 000 Trillionen Ws
= 4 000 000 000 000 000 000 000 000 Ws
Verbrauch Pflanzen:
3 Trilliarden Ws
= 3000 Trillionen Ws
= 3 000 000 000 000 000 000 000 Ws
Verbrauch Menschen:
500 Trillionen Ws
= 500 000 000 000 000 000 000 Ws
Energievergleiche:
$\frac{\text{Energie Sonne}}{\text{Verbrauch Pflanzen}} = \frac{4\,000\,000 \text{ Trillionen}}{3000 \text{ Trillionen}} \approx 1333{,}3$
$\frac{\text{Energie Sonne}}{\text{Verbrauch Menschen}} = \frac{4\,000\,000 \text{ Trillionen}}{500 \text{ Trillionen}} = 8000$
Die Sonne liefert ca. 1330-mal mehr Energie als die Pflanzen verbrauchen und 8000-mal mehr Energie als der Mensch verbraucht.
→ Die nicht verbrauchte Energie wird von der Erde wieder abgestrahlt und verteilt sich im All.

1 a) $123\,456 = 1{,}234\,56 \cdot 10^5$
b) $123{,}456 = 1{,}234\,56 \cdot 10^2$
c) $6783{,}126 = 6{,}783\,126 \cdot 10^3$
d) $975\,318\,642 = 9{,}753\,186\,42 \cdot 10^8$
e) $0{,}000\,123 = 1{,}23 \cdot 10^{-4}$
f) $0{,}001\,111 = 1{,}111 \cdot 10^{-3}$
g) $0{,}019\,05 = 1{,}905 \cdot 10^{-2}$
h) $0{,}000\,000\,001 = 10^{-9}$

2 a) $53\,084 = 5{,}308\,4 \cdot 10^4$; damit gilt:
$10^4 < 53\,084 < 10^5$
b) $1\,234\,567{,}8 = 1{,}234\,567\,8 \cdot 10^6$; damit erhält man: $10^6 < 1\,234\,567{,}8 < 10^7$
c) $0{,}005\,24 = 5{,}24 \cdot 10^{-3}$; damit gilt:
$10^{-3} < 0{,}005\,24 < 10^{-2}$
d) $0{,}000\,009 = 9 \cdot 10^{-6}$; damit gilt:
$10^{-6} < 0{,}000\,009 < 10^{-5}$

3 a) $456 \cdot 10^3 = 456\,000$
b) $65{,}4 \cdot 10^3 = 65\,400$
c) $4{,}567\,89 \cdot 10^4 = 45\,678{,}9$
d) $0{,}007\,531 \cdot 10^2$
$= 7{,}531 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2$
$= 7{,}531 \cdot 10^{-1}$
$= 0{,}7531$
e) $512 \cdot 10^{-3} = 0{,}512$
f) $128{,}5 \cdot 10^{-5}$
$= 1{,}285 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5}$
$= 1{,}285 \cdot 10^{-3}$
$= 0{,}001\,285$
g) $0{,}19 \cdot 10^{-2}$
$= 1{,}9 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2}$
$= 1{,}9 \cdot 10^{-3}$
$= 0{,}0019$
h) $0{,}0753 \cdot 10^{-3}$
$= 7{,}53 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3}$
$= 7{,}53 \cdot 10^{-5}$
$= 0{,}000\,0753$

4 Wissenschaftliche Schreibweise Seite 46

Seite 46

A a) $5679 = 5{,}679 \cdot 10^3$
b) $445{,}889 = 4{,}458\,89 \cdot 10^2$
c) $0{,}78 = 7{,}8 \cdot 10^{-1}$
d) $0{,}000\,51 = 5{,}1 \cdot 10^{-4}$

B a) $7{,}95 \cdot 10^3 = 7950$
b) $89{,}53 \cdot 10^{-3} = 0{,}089\,53$
c) $0{,}000\,67 \cdot 10^2 = 0{,}067$
d) $0{,}872 \cdot 10^{-3} = 0{,}000\,872$

Seite 46, links

4 $12{,}34 \cdot 10^1 = 123{,}4 = 1{,}234 \cdot 10^2$
$0{,}1234 \cdot 10^4 = 1234 = 1{,}234 \cdot 10^3$
$0{,}012\,34 \cdot 10^6 = 1{,}234 \cdot 10^{-2} \cdot 10^6 = 1{,}234 \cdot 10^4$
$0{,}001\,234 \cdot 10^8 = 1{,}234 \cdot 10^{-3} \cdot 10^8 = 1{,}234 \cdot 10^5$
Sortieren der Zahlen in der Kette:
$10^2 < 12{,}34 \cdot 10^1 < 10^3 < 0{,}1234 \cdot 10^4 < 10^4$
$< 0{,}012\,34 \cdot 10^6 < 10^5 < 0{,}001\,234 \cdot 10^8 < 10^6$

5 a) $0{,}025\,\text{m}$
$= 25 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$
$= 25\,\text{mm}$
b) $0{,}0006\,\text{g}$
$= 600 \cdot 10^{-6}\,\text{g}$
$= 600\,\mu\text{g}$
c) $0{,}000\,004\,\text{g}$
$= 4 \cdot 10^{-6}\,\text{g}$
$= 4\,\mu\text{g}$
d) $0{,}000\,000\,015\,\text{m}$
$= 15 \cdot 10^{-9}\,\text{m}$
$= 15\,\text{nm}$

6 a) $10\,\mu\text{m} = 10 \cdot 10^{-6}\,\text{m} = 10^{-5}\,\text{m}$
$0{,}1\,\mu\text{m} = 0{,}1 \cdot 10^{-6}\,\text{m} = 10^{-7}\,\text{m}$
b) Individuelle Lösungen
Andere Verursacher von Feinstaub sind z.B. Industrieanlagen, Kleinfeuerungsanlagen, landwirtschaftliche Anlagen und anderer Verkehr außer dem Straßenverkehr, also Schienen-, Flug- und Schiffsverkehr.
Feinstaub wirkt negativ auf die Atemwege (verstärkt Allergien und asthmatische Anfälle, erhöht das Risiko von Atemwegsbeschwerden und Lungenkrebs) und verstärkt bzw. verursacht Herz-Kreislauf-Erkrankungen.

7 a) Anzahl der Bakterien
nach 1 Stunde: $100^2 = 10^4$
nach 2 Stunden: $(10^4)^2 = 10^8$
nach 3 Stunden: $(10^8)^2 = 10^{16}$
nach 4 Stunden: $(10^{16})^2 = 10^{32}$
nach 5 Stunden: $(10^{32})^2 = 10^{64}$
nach 6 Stunden: $(10^{64})^2 = 10^{128}$
nach 7 Stunden: $(10^{128})^2 = 10^{256}$
nach 8 Stunden: $(10^{256})^2 = 10^{512}$
nach 9 Stunden: $(10^{512})^2 = 10^{1024}$
nach 10 Stunden: $(10^{1024})^2 = 10^{2048}$
nach 11 Stunden: $(10^{2048})^2 = 10^{4096}$
nach 12 Stunden: $(10^{4096})^2 = 10^{8192}$
b) Ein Bakterium hat im Bild einen Durchmesser von ca. 1 cm. In Wirklichkeit beträgt der Durchmesser also ca.
$(1\,\text{cm}) : 10\,000 = 1 \cdot 10^{-5}\,\text{cm} = 10\,\mu\text{m}$
c) Bakterien benötigen u.a. Nährstoffe, um sich zu vermehren. Mit zunehmender Bakterienzahl verändern die Bedingungen sich zum Negativen hin, d.h. die Nährstoffe werden knapp. Die Bakterien vermehren sich dann immer langsamer.

Seite 46, rechts

4 a) $(3^4)^5 = 3^{20} = 3\,486\,784\,401$
$(4^5)^3 = 4^{15} = 1\,073\,741\,824$
$(5^3)^4 = 5^{12} = 244\,140\,625$
Die Potenz $(3^4)^5 = 3^{20}$ ist am größten. Das kann man sich auch ohne den Taschenrechner klarmachen: 20 ist als Exponent um einiges höher als die beiden anderen; die Unterschiede zwischen 3, 4 bzw. 5 als jeweilige Basis fallen dagegen wenig ins Gewicht.

ACHTUNG: Sie arbeiten mit der Manuskriptfassung der Lösungen. Sie enthalten möglicherweise Fehler.
Gern können Sie Rückmeldungen an die folgende email-Adresse senden: SchnittpunktBW@klett.de
Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

b) Vermutung:
Es gelten: $(4^5)^6 > (5^6)^4 > (6^4)^5$ und
$(5^6)^7 > (6^7)^5 > (7^5)^6$
Die Vermutung kann mithilfe des Taschenrechners überprüft werden.

5 a) $1\,\text{nm} = 10^{-9}\,\text{m}$
$85\,\text{nm} = 85 \cdot 10^{-9}\,\text{m}$
(1) $85\,\text{nm} = 8{,}5 \cdot 10^{-8}\,\text{m}$
(2) $85\,\text{nm} = 0{,}000\,000\,085\,\text{m}$
b) Mögliche Schätzung:
Auf einem weißen Pfeil von 2 nm Länge liegen ca. 80 Moleküle.
Die Molekülmittelpunkte haben also einen durchschnittlichen Abstand von rund
$\frac{2}{80}\,\text{nm} = 0{,}025\,\text{nm} = 25\,\text{pm}$.

6 a) $97\,531\,\text{kg} = 97{,}531 \cdot 10^3\,\text{kg} = 97{,}531\,\text{t}$
b) $0{,}0033\,\text{g} = 3{,}3 \cdot 10^{-3}\,\text{g} = 3{,}3\,\text{mg}$
c) $250\,000\,\text{kWh} = 250 \cdot 10^3\,\text{kWh} = 250\,\text{MWh}$
d) $12\,500\,\text{Hz} = 12{,}5 \cdot 10^3\,\text{Hz} = 12{,}5\,\text{KHz}$

7 Windenergie:
$0{,}700\,\text{TWh} = 700 \cdot 10^{-3}\,\text{TWh} = 700\,\text{GWh}$
Solarenergie:
$0{,}030\,\text{TWh} = 30 \cdot 10^{-3}\,\text{TWh} = 30\,\text{GWh}$
Energie aus konventionellen Kraftwerken:
$0{,}490\,\text{TWh} = 0{,}490 \cdot 10^{-3}\,\text{TWh} = 490\,\text{GWh}$

5* Potenzen mit einer rationalen Zahl als Exponent Seite 47

Seite 47

Einstieg

→ In der oberen Reihe wird der Exponent der Potenz pro Schritt halbiert.
→ Die Operation für den Exponenten lautet jeweils: Division durch 2 (vgl. Skizze).

$$\begin{tikzcd}
2^8 \arrow[r, bend left, ":2"] & 2^4 \arrow[r, bend left, ":2"] & 2^2 \arrow[r, bend left, ":2"] & 2^1 \arrow[r, bend left, ":2"] & 2^{\frac{1}{2}} \\
256 \arrow[r, bend right, "\sqrt{\ }"'] & 16 \arrow[r, bend right, "\sqrt{\ }"'] & 4 \arrow[r, bend right, "\sqrt{\ }"'] & 2 \arrow[r, bend right, "\sqrt{\ }"'] & \sqrt{\ }
\end{tikzcd}$$

1 a) $\sqrt[2]{8} = 8^{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}$ c) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$
d) $\sqrt[2]{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$ e) $6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}$ f) $5^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{5^3}$
g) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$ h) $12^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{12^3}$

2 a) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$
b) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$
c) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3$
d) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{3^6} = 3^{\frac{6}{3}} = 3^2 = 9$
e) $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5^{\frac{3}{3}} = 5$
f) $125^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 2^5$
g) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2^{\frac{4}{4}} = 2$
h) $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8$

5* Potenzen mit einer rationalen Zahl als Exponent Seite 48

Seite 48

3 a) $3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$
b) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^2 = 4$
c) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^2 = 4$
d) $9^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = (3^2)^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$
e) $(9^4)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{4}{2}} = 9^2 = 81$
f) $(8^2)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = (4^3)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{3}{3}} = 4$

4 $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}59$;
$6^{\frac{3}{2}} = \sqrt{6^3} = \sqrt{216} \approx 14{,}70$;
$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$;
$6^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{6^4} = \sqrt[3]{1296} \approx 10{,}90$;
$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25} \approx 2{,}92$;
$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \approx 1{,}71$;
$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} \approx 2{,}52$;
$5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3} = \sqrt{125} \approx 11{,}18$

A a) $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ oder auch $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{10}$
b) $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$ c) $7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3}$
d) $\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$ e) $\sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$ f) $\sqrt[2]{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$

B a) $\sqrt[2]{121} = 11$ b) $64^{\frac{1}{3}} = 4$ c) $\sqrt[3]{8} = 2$
d) $100^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{100}\right)^3 = 10^3 = 1000$

C a) $10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 10^1 = 10$
b) $6^{\frac{4}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}} = 6^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} = 6^2 = 36$
c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5 \cdot 25} = \sqrt[3]{125} = 5$
d) $\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{32 \cdot 16} = \sqrt[3]{512} = 8$
alternativer Lösungsweg:
$\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{32 \cdot 16} = \sqrt[3]{64 \cdot 8} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{8}$
$= 4 \cdot 2 = 8$

Seite 48, links

5 a) $4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4$ b) $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5$
c) $10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{3}{2}} = 10^2 = 100$ d) $6^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{4}{3}} = 6^2 = 36$

e) $25^1 \cdot 25^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3}$

f) $8^{\frac{1}{6}} \cdot 8^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$ g) $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 3^2 = 9$

h) $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64}$ i) $(5^4)^{\frac{1}{2}} = 5^2 = 25$

6 a) $4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4^1$ b) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^2$

c) $5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^2$ d) $10^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{\frac{5}{3}} = 10^2$

e) $6^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{3}{2}} = 36\ (= 6^2)$ f) $9^{\frac{3}{2}} \cdot 9^{\frac{3}{2}} = 729\ (= 9^3)$

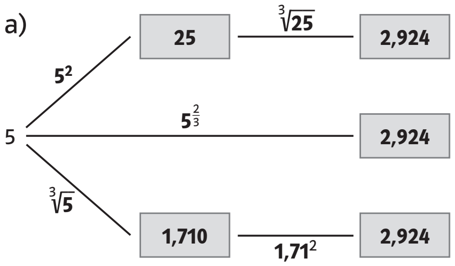
7 a) und b)

	Berlin	Stuttgart	Zypergras
Höhe h	250 m	167 m	500 cm
Basisdicke d	16,5 m	12,2 m	4,5 cm
h : d	15,15	13,7	111,1
$h^{\frac{2}{3}}$: d	2,4	2,5	14,0

Bei den beiden Fernsehtürmen liegen die Verhältnisse h : d nah bei einander; die Verhältnisse $h^{\frac{2}{3}}$: d sind sogar annähernd gleich. Beim Zyperngras ist das Verhältnis h : d in etwa 8-mal so groß wie bei den Fernsehtürmen; das Verhältnis $h^{\frac{2}{3}}$: d ist etwa 7-mal so groß und hat in etwa die gleiche Größenordnung wie das Verhältnis h : d bei den Fernsehtürmen.

Seite 48, rechts

5 a)



b) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 = 7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2} \approx 3{,}659$

c) $9^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{9^3} = \left(\sqrt[4]{9}\right)^3 \approx 5{,}196$

d) $\sqrt[10]{4^5} = \left(\sqrt[10]{4}\right)^5 = 4^{\frac{5}{10}} = 2$

e) $\left(\sqrt[8]{1296}\right)^2 = 1296^{\frac{2}{8}} = \sqrt[8]{1296^2} = 6$

f) $125^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{125^5} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^5 \approx 3125$

Die Ergebnisse in den Teilaufgaben d), e) und f) können genau angegeben werden.

6 a) $6^{\frac{3}{2}} \cdot 6^{-\frac{1}{2}} = 6^1$ b) $8^{\frac{7}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} = 8^2$

c) $(7^2)^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{2}{3}}$ d) $\left(9^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 1$

e) $3^{\frac{7}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} = 27\ (= 3^3)$ f) $(5^3)^{\frac{4}{3}} = 625\ (= 5^4)$

7 a) Individuelle Lösungen, z. B.

- für a = 5 cm:
  $V = 5^3 = 125;\ O = 6 \cdot 5^2 = 150$
  $\frac{O}{V} = \frac{150}{125} = 1{,}2;\ \frac{O^{\frac{3}{2}}}{V} = \frac{150^{\frac{3}{2}}}{125} \approx 14{,}70$
- für a = 2 cm:
  $V = 2^3 = 8;\ O = 6 \cdot 2^2 = 24$
  $\frac{O}{V} = \frac{24}{8} = 4;\ \frac{O^{\frac{3}{2}}}{V} = \frac{24^{\frac{3}{2}}}{8} \approx 14{,}70$

b) a: Seitenlänge des Würfels
Es gilt: $O = 6 \cdot a^2$ und $V = a^3$.
Man erhält: $\frac{O}{V} = \frac{6 \cdot a^2}{a^3} = \frac{6}{a}$ und

$$\frac{O^{\frac{3}{2}}}{V} = \frac{(6 \cdot a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3} = \frac{6^{\frac{3}{2}} \cdot (a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3} = \frac{\sqrt{6^3} \cdot a^3}{a^3} = \sqrt{6^3} \approx 14{,}70$$

c) Aus den allgemeinen Berechnungen in Teilaufgabe b) stellt man folgendes fest:

- Der Quotient $\frac{O}{V}$ ist abhängig von a; damit ändert er sich, wenn sich die Seitenlänge a des Würfels sich ändert.
- Der Quotient $\frac{O^{\frac{3}{2}}}{V}$ ist unabhängig von a; er ist immer gleich einer Konstante, der Zahl $\sqrt{6^3} \approx 14{,}70$ (vgl. dazu auch Teilaufgabe a)).

Basistraining Seite 50

Seite 50

1 a) $2^{-4} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$ b) $5^{-4} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$

c) $6^{-3} = \frac{1}{6 \cdot 6 \cdot 6}$ d) $2^{-6} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$

e) $0{,}5^{-3} = \frac{1}{0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}$ f) $3^{-5} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$

2 a) $2^5 \cdot 2^3 = 2^8$ b) $3^4 \cdot 3^{10} = 3^{14}$
c) $6^5 \cdot 6^{-3} = 6^2$ d) $5^{-4} \cdot 5^6 = 5^2$
e) $8^5 \cdot 8^{-7} = 8^{-2}$ f) $12^5 \cdot 12^{-5} = 12^0 = 1$
g) $10^8 \cdot 10^{-7} = 10^1 = 10$ h) $9^2 \cdot 9^{-1} = 9^1 = 9$

3 a) $\frac{5^6}{5^4} = 5^2$ b) $\frac{3^4}{3^9} = 3^{-5}$

c) $\frac{3^{12}}{3^{10}} = 3^2$ d) $\frac{7^5}{7^6} = 7^{-1}$

e) $\frac{8^6}{8^5} = 8^1 = 8$ f) $\frac{2^{20}}{2^{10}} = 2^{10}$

4 a) $(4^5)^3 = 4^{15}$ b) $(6^2)^{-3} = 6^{-6}$
c) $(3^2)^6 = 3^{12}$ d) $(2^{-3})^5 = 2^{-15}$
e) $(4^4)^4 = 4^{16}$ f) $(5^5)^5 = 5^{25}$
g) $(10^9)^{-8} = 10^{-72}$ h) $(4^{-3})^{-2} = 4^6$
i) $(1^4)^5 = 1^{20} = 1$

5 a) $2^4 \cdot 3^4 = 6^4$ b) $3^2 \cdot 7^2 = 21^2$
c) $5^5 \cdot 6^5 = 30^5$ d) $2^5 \cdot 4^5 = 8^5$
e) $10^6 \cdot 5^6 = 50^6$ f) $5^{10} \cdot 20^{10} = 100^{10}$
g) $2^{-3} \cdot 4^{-3} = 8^{-3}$ h) $5^{-3} \cdot 4^{-3} = 20^{-3}$
i) $5^{-4} \cdot 8^{-4} = 40^{-4}$

6 a) $5^6 \cdot 5^3 \cdot 5^2 = 5^{6+3+2} = 5^{11}$
b) $10^4 \cdot 10^7 \cdot 10^9 = 10^{4+7+9} = 10^{20}$
c) $2^8 \cdot 2^4 \cdot 2^{-5} = 2^{8+4+(-5)} = 2^7$

d) $6^3 \cdot 6^3 \cdot 6^{-8} = 6^{3+3+(-8)} = 6^{-2}$
e) $4^{-3} \cdot 4^2 \cdot 4^8 = 4^{-3+2+8} = 4^7$
f) $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^{-11} = 3^{3+4+5-11} = 3^1 = 3$
g) $7^{-4} \cdot 7^5 \cdot 7^1 = 7^{-4+5+1} = 7^2$
h) $8^4 \cdot 8^{-9} \cdot 8^5 = 8^{4+(-9)+5} = 8^0 = 1$

7 a) $(3^2 \cdot 3^8):3^7 = 3^{2+8}:3^7$
$= 3^{10}:3^7$
$= 3^{10-7} = 3^3 = 9$
b) $(10^4 \cdot 10^{-2}):5^2 = 10^{4-2}:5^2$
$= 10^2:5^2 = (10:5)^2 = 2^2 = 4$
c) $(10^5 \cdot 10^2):2^7 = 10^{5+2}:2^7$
$= 10^7:2^7$
$= (10:2)^7$
$= 5^7 = 78\,125$
d) $9^2 \cdot (3^6:3^2)$
$= 9^2 \cdot 3^{6-2} = (3^2)^2 \cdot 3^4$
$= 3^4 \cdot 3^4$
$= 3^{4+4} = 3^8$
e) $5^2 \cdot 2^4 + 5^2 \cdot 2^2 = 5^2 \cdot (2^2)^2 + 5^2 \cdot 2^2$
$= 5^2 \cdot 4^2 + 5^2 \cdot 2^2$
$= (5 \cdot 4)^2 + (5 \cdot 2)^2$
$= 20^2 + 10^2$
$= 400 + 100 = 500$
f) $5^4 \cdot 5^8 - 25^6 = 5^{4+8} - (5^2)^6$
$= 5^{12} - 5^{12} = 0$
g) $(10^3 \cdot 0{,}1):5^2 = (10^3 \cdot 10^{-1}):5^2$
$= 10^{3-1}:5^2$
$= 10^2:5^2$
$= (10:5)^2 = 2^2 = 4$
h) $0{,}2^2 \cdot 5^2 = (0{,}2 \cdot 5)^2 = 1^2 = 1$

8 Zusammen gehören die Kärtchen:
$10^{-3} = 0{,}001 \ \left(\text{da } 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}\right)$
$5^{-3} = 0{,}008 \ \left(\text{da } 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}\right)$
$20^{-3} = 0{,}000\,125 \ \left(\text{da } 20^{-3} = \frac{1}{20^3} = \frac{1}{8000}\right)$
$50^{-2} = 0{,}0004 \ \left(\text{da } 50^{-2} = \frac{1}{50^2} = \frac{1}{2500}\right)$
$25^{-2} = 0{,}0016 \ \left(\text{da } 25^{-2} = \frac{1}{25^2} = \frac{1}{625}\right)$

9 a) $7^{-3} \approx 0{,}0029$ b) $8^{-2} \approx 0{,}0156$
c) $1{,}5^{-4} \approx 0{,}1975$ d) $3{,}5^{-3} \approx 0{,}0233$
e) $2{,}2^{-4} \approx 0{,}0427$ f) $1{,}23^{-4} \approx 0{,}4369$

10 a) $4^8 \cdot 5^{-3} \approx 4{,}1943$
b) $7^{-5} \cdot 6^8 \approx 99{,}9356$
c) $1{,}5^4 \cdot 2{,}4^{-3} \approx 0{,}3662$
d) $(5{,}1^{-3} + 7{,}4^{-3}):5^{-4} \approx 6{,}2540$
e) $6^{-2} - 5^{-2} \cdot 4^{-2}$
$= 6^{-2} - (5 \cdot 4)^{-2} = 6^{-2} - 20^{-2} \approx 0{,}0253$
f) $3{,}2^4 \cdot 8{,}5^{-1} + 4{,}6^{-3} \approx 12{,}3465$

Tipp: Hier muss man überall mit dem Taschenrechner arbeiten, da man die Potenzrechengesetzte nicht anwenden kann; denn man hat weder Potenzen mit gleicher Basis noch welche mit gleichem Exponenten. In Teilaufgabe e) gibt eine einzige Stelle, an der ein Potenzrechengesetz angewendet werden kann (vgl. oben) – der Taschenrechner wird aber weiterhin benötigt.

11 Mögliche Lösung:
a) $10^8 = 10^2 \cdot 10^6$; $10^8 = 10^4 \cdot 10^4$
b) $6^4 = 6^2 \cdot 6^2$; $6^4 = 6^3 \cdot 6^1$
c) $15^2 = 15^1 \cdot 15^1$; $15^2 = 5^2 \cdot 3^2$
d) $14^2 = 14^1 \cdot 14^1$; $14^2 = 7^2 \cdot 2^2$
e) $22^5 = 22^3 \cdot 22^2$; $22^5 = 11^5 \cdot 2^5$
f) $25^5 = 25^4 \cdot 25^1$; $25^5 = 5^5 \cdot 5^5$
g) $21^{-3} = 21^{-1} \cdot 21^{-2}$; $21^{-3} = 3^{-3} \cdot 7^{-3}$
h) $26^{-2} = 26^{-1} \cdot 26^{-1}$; $26^{-2} = 2^{-2} \cdot 13^{-2}$
i) $27^{-4} = 27^{-2} \cdot 27^{-2}$; $27^{-4} = 3^{-4} \cdot 9^{-4}$

12 a) $3^{12} = 531\,441$; $3^{-12} = \frac{1}{531\,441} \approx 1{,}88 \cdot 10^{-6}$
$3^{12} + 3^{-12} = 531\,441$
b) $5^8 = 390\ 625$; $5^{-8} = \frac{1}{390625} = 2{,}56 \cdot 10^{-6}$
$5^8 - 5^{-8} = 390\,625$
c) $100^5 = 10^{10} = 10\,000\,000\,000$;
$100^{-5} = 10^{-10} = \frac{1}{10\,000\,000\,000}$
$100^5 + 100^{-5} = 10^{10} = 10\,000\,000\,000$
Es fällt auf, dass die Ergebnisse der Addition bzw. der Subtraktion genau gleich dem ersten Summanden sind.
Erklärung: Die Berechnungen werden mit dem Taschenrechner durchgeführt. Der zweite Summand ist jeweils im Vergleich zum ersten so klein, dass er bei der Addition (bzw. Subtraktion) überhaupt nicht mehr berücksichtigt wird. Die Rundungsgenauigkeit des Taschenrechners wird überschritten.

13 a) $(2^2)^3 = 2^6$ b) $(3^2)^2 = 81$
c) $(4^2)^2 = 4 \cdot 4^3$
d) $2^8 \cdot 2^{-3} = 32$ (da $32 = 2^5$)
e) $5^7 \cdot 5^{-9} = 5^{-2}$ f) $6^{-4} \cdot 6^4 = 1$ ($6^0 = 1$)
g) $3^8:3^6 = 3^2$ h) $7^5:7^9 = 7^{-4}$
i) $\frac{4^7}{4^2} = 4^5$ j) $\frac{9^8}{9^5} = 9^3$

14 a) $5^4 = \mathbf{25}^2$ $\left(\text{denn } 5^4 = (5^2)^2 = 25^2\right)$
b) $4^5 = \mathbf{2}^{10}$ $\left(\text{denn } 4^5 = (2^2)^5 = 2^{2 \cdot 5}\right)$
c) $\mathbf{8}^3 = 2^9$ $\left(\text{denn } 2^9 = 2^{3 \cdot 3} = (2^3)^3 = 8^3\right)$
d) $125^2 = \mathbf{5}^6$ $\left(\text{denn } 125^2 = (5^3)^2 = 5^6\right)$
e) $10^{12} = \mathbf{1000}^4$ $\left(\text{denn } 10^{12} = 10^{3 \cdot 4} = (10^3)^4\right)$
f) $\mathbf{7}^8 = 49^4$ $\left(\text{denn } 49^4 = (7^2)^4 = 7^8\right)$
g) $\mathbf{32}^1 = 2^5$ (denn $2^5 = 32 = 32^1$)
h) $2^{12} = \mathbf{64}^2$ $\left(\text{denn } 2^{12} = 2^{6 \cdot 2} = (2^6)^2 = 64^2\right)$

15 a) $574\,836 = 5{,}748\,36 \cdot 10^5$
b) $0{,}000\,333 = 3{,}33 \cdot 10^{-4}$
c) $1\,000\,000 = 10^6$
d) $0{,}000\,000\,1 = 10^{-7}$

16 a) $58 \cdot 10^3 = 5{,}8 \cdot 10 \cdot 10^3 = 5{,}8 \cdot 10^4$
b) $0{,}067 \cdot 10^4 = 6{,}7 \cdot 10^{-2} = 6{,}7 \cdot 10^2$
c) $123 \cdot 10^{-6} = 1{,}23 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} = 1{,}23 \cdot 10^{-4}$
d) $0{,}012 \cdot 10^{-4} = 1{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$

Anwenden. Nachdenken Seite 51

Seite 51

17 a) $2^3 \cdot 5^3 + 2^2 \cdot 5^2$
$= (2 \cdot 5)^3 + (2 \cdot 5)^2$
$= 10^3 + 10^2 = 1100$
b) $5^3 \cdot 4^3 \cdot 3^3 \cdot 2^3 \cdot 30^{-3}$
$= (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)^3 \cdot 30^{-3}$
$= 120^3 \cdot 30^{-3}$
$= \frac{120^3}{30^3} = \left(\frac{120}{30}\right)^3 = 4^3 = 64$
c) $\frac{4^4}{2^4} + \frac{9^2 \cdot 2^2}{6^2}$
$= \left(\frac{4}{2}\right)^4 + \left(\frac{9 \cdot 2}{6}\right)^2$
$= 2^4 + \left(\frac{18}{6}\right)^2$
$= 2^4 + 3^2 = 16 + 9 = 25$
d) $\frac{8^4 \cdot 3^4}{6^4} - (2^2)^4$
$= \left(\frac{8 \cdot 3}{6}\right)^4 - 2^8$
$= 4^4 - 2^8 = (2^2)^4 - 2^8 = 2^8 - 2^8 = 0$
e) $(2^2)^3 - 4^5 \cdot 2^{-8}$
$= 2^6 - (2^2)^5 \cdot 2^{-8}$
$= 2^6 - 2^{10} \cdot 2^{-8}$
$= 2^6 - 2^2 = 64 - 4 = 60$
f) $9^2 \cdot 3^{-4} + 3^6 \cdot 9^{-2}$
$= (3^2)^2 \cdot 3^{-4} + 3^6 \cdot (3^2)^{-2}$
$= 3^4 \cdot 3^{-4} + 3^6 \cdot 3^{-4}$
$= 3^0 + 3^2 = 1 + 9 = 10$
g) $\frac{(2^6)^2}{2^6} \cdot \frac{5^4}{25}$
$= \frac{2^{12}}{2^6} \cdot \frac{5^4}{5^2} = 2^6 \cdot 5^2 = 64 \cdot 25 = 1600$
h) $\frac{4^4 \cdot 7^4}{14^4} + \frac{(3^8)^2}{9^7}$
$= \left(\frac{4 \cdot 7}{14}\right)^4 + \frac{3^{16}}{(3^2)^7}$
$= \left(\frac{28}{14}\right)^4 + \frac{3^{16}}{3^{14}} = 2^4 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

18 Spiel; individuelle Lösungen

19 a) $10^6 \cdot 0{,}001 : 2^3$
$= 10^6 \cdot 10^{-3} : 2^3$
$= 10^3 : 2^3$
$= (10 : 2)^3 = 5^3 = 125$

b) $20^2 \cdot 0{,}05^2 : 5^2$
$= (20 \cdot 0{,}05)^2 : 5^2$
$= 1^2 : 5^2$
$= 1 : 25 = 0{,}04$

c) $(0{,}6 \cdot 0{,}5)^3 \cdot 1000$
$= 0{,}3^3 \cdot 10^3$
$= (0{,}3 \cdot 10)^3 = 3^3 = 9$

d) $0{,}5^3 \cdot 20^3 \cdot 5^{-3}$
$= (0{,}5 \cdot 20)^3 \cdot 5^{-3}$
$= \frac{10^3}{5^3} = \left(\frac{10}{5}\right)^3$
$= 2^3 = 8$

20 a) $a^n \cdot a^{2n} = a^{3n}$
b) $a^n \cdot a^{n+2} = a^{2n+2}$
c) $x^m \cdot x^{1-m} = x^1 = x$
d) $x^{m+1} \cdot x^{m-1} = x^{2m}$
e) $b \cdot b^n = b^{n+1}$
f) $a^{2n-2} \cdot a^{3n-3} = a^{5n-5}$
g) $y^n : y^5 = y^{n-5}$
h) $y^3 : y^{3-m} = y^{3-(3-m)} = y^m$
i) $\frac{c^{2n}}{c^n} = c^n$
j) $\frac{c^{m+3}}{c^{2m+3}} = c^{-m} = \frac{1}{c^m}$
k) $(a^2)^m \cdot (a^m)^2 = a^{2m} \cdot a^{2m} = a^{4m}$
l) $(x^2)^6 \cdot (x^3)^4 = x^{12} \cdot x^{12} = x^{24}$

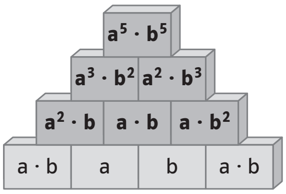
21 a) $a^{-3} \cdot a^{-4} \cdot a^{-5} = a^{-12}$
b) $x^{-4} \cdot x^6 : x^6 = x^{-4}$
c) $a^5 \cdot a^6 \cdot a^{-10} = a^1 = a$
d) $x^4 : x^3 : x^2 = x^1 : x^2 = x^{-1}$
e) $(3a)^4 \cdot (3a)^2 = (3a)^6 = 729\,a^6$
f) $2^5 \cdot x^3 \cdot (2x)^4 = 2^5 \cdot x^3 \cdot 2^4 \cdot x^4 = 2^9 \cdot x^7 = 512\,x^7$
g) $(5b)^4 : (5b)^3 = (5b)^1 = 5b$
h) $4^3 \cdot (4x)^2 : (4x) = 4^5 \cdot x^2 : (4x) = 4^4 \cdot x = 64\,x$
i) $(5^2 \cdot a^2)^3 = (5^2)^3 \cdot (a^2)^3 = 5^6 \cdot a^6 = 15\,625\,a^6$
j) $(2a^4)^2 = 2^2 \cdot a^{4 \cdot 2} = 4\,a^8$

22 a) $a^4 \cdot x^3 \cdot a^2 \cdot x^5 = a^6 \cdot x^8$
b) $b^3 \cdot y^2 \cdot b^{-2} \cdot y^1 = b \cdot y^3$
c) $c^6 \cdot x^4 \cdot c^{-2} : x = c^4 \cdot x^3$
d) $x^2 \cdot y \cdot x^{-2} \cdot y^{-1} = x^0 \cdot y^0 = 1$
e) $y^4 \cdot x : y^5 : x^2 = y^{-1} \cdot x : x^2 = y^{-1} \cdot x^{-1}$
f) $a^6 \cdot b^3 \cdot a^{-8} \cdot b^{-5} = a^{-2} \cdot b^{-2}$
g) $\frac{x^4 \cdot y^2}{x \cdot y} = x^3 \cdot y$
h) $\frac{c^2 \cdot d^5}{c^5 \cdot d^2} = c^{-3} \cdot d^3$

23 a) $2^2 = 4;\ (-2)^2 = 4;\ -2^2 = -4;\ 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4};$
$(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4};\ -2^{-2} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$
b) $2^3 = 8;\ (-2)^3 = -8;\ -2^3 = -8;\ 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8};$
$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8};\ -(2^{-3}) = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}$
c) $10^2 = 100;\ (-10)^2 = 100;\ -10^2 = -100;$
$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100};\ (-10)^{-2} = \frac{1}{(-10)^2} = \frac{1}{100};$
$-10^{-2} = -\frac{1}{10^2} = -\frac{1}{100}$
d) $10^3 = 1000;\ (-10)^3 = -1000;\ -10^3 = -1000;$
$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000};\ (-10)^{-3} = \frac{1}{(-10)^3} = -\frac{1}{1000};$
$-10^{-3} = -\frac{1}{10^3} = -\frac{1}{1000}$
Kontrolle: Das Produkt der 6 Zahlen ergibt immer 1.

ACHTUNG: Sie arbeiten mit der Manuskriptfassung der Lösungen. Sie enthalten möglicherweise Fehler.
Gern können Sie Rückmeldungen an die folgende email-Adresse senden: SchnittpunktBW@klett.de
Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

24 a) (1)



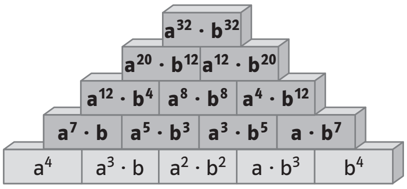
$a^5 \cdot b^5$

$a^3 \cdot b^2$ $a^2 \cdot b^3$

$a^2 \cdot b$ $a \cdot b$ $a \cdot b^2$

$a \cdot b$ a b $a \cdot b$

(2)



$a^{32} \cdot b^{32}$

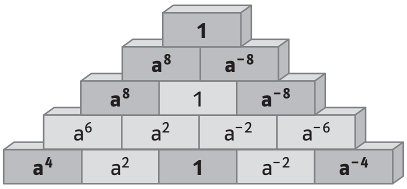
$a^{20} \cdot b^{12}$ $a^{12} \cdot b^{20}$

$a^{12} \cdot b^4$ $a^8 \cdot b^8$ $a^4 \cdot b^{12}$

$a^7 \cdot b$ $a^5 \cdot b^3$ $a^3 \cdot b^5$ $a \cdot b^7$

a^4 $a^3 \cdot b$ $a^2 \cdot b^2$ $a \cdot b^3$ b^4

(3)



1

a^8 a^{-8}

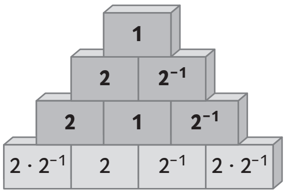
a^8 1 a^{-8}

a^6 a^2 a^{-2} a^{-6}

a^4 a^2 1 a^{-2} a^{-4}

b) Setzt man $a = 2$ und $b = 2 - 1$ dann erhält man folgende Mauern:

(1)



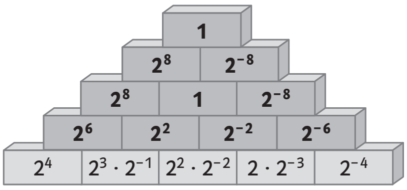
1

2 2^{-1}

2 1 2^{-1}

$2 \cdot 2^{-1}$ 2 2^{-1} $2 \cdot 2^{-1}$

(2)



1

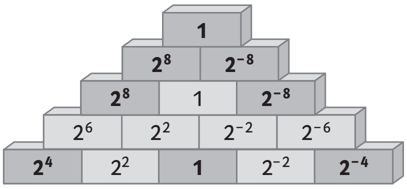
2^8 2^{-8}

2^8 1 2^{-8}

2^6 2^2 2^{-2} 2^{-6}

2^4 $2^3 \cdot 2^{-1}$ $2^2 \cdot 2^{-2}$ $2 \cdot 2^{-3}$ 2^{-4}

(3)



1

2^8 2^{-8}

2^8 1 2^{-8}

2^6 2^2 2^{-2} 2^{-6}

2^4 2^2 1 2^{-2} 2^{-4}

Man stellt als Erstes fest, dass die Mauern (2) und (3) genau gleich aussehen. Vergleicht man alle drei Mauern mit der Mauer (3) aus Teilaufgabe a), dann stellt man fest, dass das Ergebnis im obersten Stein immer 1 beträgt.

Anwenden. Nachdenken **Seiten 52, 53**

Seite 52

25 a) $a^3 \cdot b^{-1} \cdot a^5 \cdot c = a^8 \cdot b^{-1} \cdot c^1$

b) $a^7 \cdot c^2 \cdot b^1 \cdot a^{-1} = a^6 \cdot b^1 \cdot c^2$

c) $\frac{a^9 \cdot b^4 \cdot c^2}{a^7 \cdot c \cdot b^3} = a^2 \cdot b^1 \cdot c^1$

d) $\frac{c \cdot a \cdot b}{a^4 \cdot b^4 \cdot c^4} = a^{-3} \cdot b^{-3} \cdot c^{-3}$

e) $\frac{a^{-2} \cdot b^7}{a^3 \cdot c^4 \cdot b^2} = a^{-5} \cdot b^5 \cdot c^{-4}$

f) $\frac{a^2 \cdot b^{-1} \cdot c^3}{a^{10} \cdot b^2} = a^{-8} \cdot b^{-3} \cdot c^3$

Kontrolle der Ergebnisse mithilfe des Gesamtprodukts:

$(a^8 \cdot b^{-1} \cdot c^1) \cdot (a^6 \cdot b^1 \cdot c^2) \cdot (a^2 \cdot b^1 \cdot c^1)$

$\cdot (a^{-3} \cdot b^{-3} \cdot c^{-3}) \cdot (a^{-5} \cdot b^5 \cdot c^{-4}) \cdot (a^{-8} \cdot b^{-3} \cdot c^3)$

$= a^0 \cdot b^0 \cdot c^0 = 1$

26 a) $(x^2 + x^3)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot x^3 + (x^3)^2$

$= x^4 + 2x^5 + x^6$

b) $(x^3 + x^{-2})^2 = (x^3)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot x^{-2} + (x^{-2})^2$

$= x^6 + 2x + x^{-4}$

c) $(y^3 + y^{-3})^2 = (y^3)^2 + 2 \cdot y^3 \cdot y^{-3} + (y^{-3})^2$

$= y^6 + 2 + y^{-6}$

d) $(2y^2 + 3y)^2 = (2y^2)^2 + 2 \cdot 2y^2 \cdot 3y + (3y)^2$

$= 4y^4 + 12y^3 + 9y^2$

e) $(5a^4 + a^{-4})^2 = (5a^4)^2 + 2 \cdot 5a^4 \cdot a^{-4} + (a^{-4})^2$

$= 25a^8 + 10 + a^{-8}$

f) $(b + b^{-1})^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot b^{-1} + (b^{-1})^2$

$= b^2 + 2 + b^{-2}$

27 a) $2 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^2 = 6 \cdot 10^6$

b) $3 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^2 = 9 \cdot 10^7$

c) $4 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^2$

d) $4 \cdot 10^2 \cdot 6 \cdot 10^3 = 24 \cdot 10^5 = 2{,}4 \cdot 10^6$

e) $9 \cdot 10^4 \cdot 9 \cdot 10^{-2} = 81 \cdot 10^2 = 8{,}1 \cdot 10^3$

f) $5 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 10 \cdot 10^{-1} = 1$

28 a) $(7^4)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{4}{2}} = 7^2 = 49$

b) $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^4 = 8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 = 16$

c) $\left(25^{\frac{1}{5}}\right)^{10} = 25^{\frac{10}{5}} = 25^2 = 625$

d) $(9^3)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$

e) $216^{\frac{2}{3}} = (6^3)^{\frac{2}{3}} = 6^2 = 36$

f) $27^{\frac{5}{3}} = (3^3)^{\frac{5}{3}} = 3^5 = 243$

29 a) $(a^4)^{\frac{1}{2}} = a^2$

b) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4 = x^2$

c) $(a^6)^{\frac{1}{2}} = a^3$

d) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$

e) $(x^4)^{\frac{1}{4}} = x^1 = x$

f) $\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{x}$

ACHTUNG: Sie arbeiten mit der Manuskriptfassung der Lösungen. Sie enthalten möglicherweise Fehler.
Gern können Sie Rückmeldungen an die folgende email-Adresse senden: SchnittpunktBW@klett.de
Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

30 a) Je nach Taschenrechnermodell erhält man ein anderes n, ab dem nicht weiter sinnvoll gerechnet werden kann; ab diesem Wert für n erhält man als Ergebnis 0.

Zum Beispiel:

$n = 5$: $(1 + 10^{-5}) - 1 = 10^{-5}$
$n = 6$: $(1 + 10^{-6}) - 1 = 10^{-6}$
$n = 7$: $(1 + 10^{-7}) - 1 = 10^{-7}$
$n = 8$: $(1 + 10^{-8}) - 1 = 10^{-8}$
$n = 9$: $(1 + 10^{-9}) - 1 = 10^{-9}$
$n = 10$: $(1 + 10^{-10}) - 1 = 10^{-10}$
$n = 11$: $(1 + 10^{-11}) - 1 = 0$

b) Erklärung:

Jeder Taschenrechner hat eine bestimmte Anzahl von Positionen, um Zahlen darzustellen. Die Taschenrechneranzeige im Schulbuch hat zum Beispiel 13 Positionen. Zwei von diesen werden für die Stelle vor dem Komma (hier ebenfalls eine Null) und für das Komma selbst benötigt. Es bleiben also 11 Positionen für die Nachkommastellen. Damit können nur diejenigen sehr kleinen Zahlen dargestellt werden, die bis zur der 11. Nachkommastelle eine Ziffer ungleich null haben. Die Zahl $10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,001$ kann dementsprechend nicht dargestellt werden, denn sie hat an allen Positionen, die anzeigt werden können, eine null; aus Sicht des Taschenrechners gilt für diese Zahl: $10^{-12} = 0$. Damit erhält man: $(1 + 10^{-12}) - 1 = (1 + 0) - 1 = 0$.

Im Beispiel in Teilaufgabe a) hat die Taschenrechneranzeige eine Stelle weniger. Daher gilt für den entsprechenden Taschenrechner $10^{-11} = 0$. Dies bedeutet, dass nur mit den Zahlen bis $n = -10$ richtig gerechnet werden kann.

31 Die Potenzen werden nach der Regel gebildet: Basis – Exponent = 20.

Man erhält:

$3^{-17} \approx 7{,}74 \cdot 10^{-9}$
$4^{-16} \approx 2{,}33 \cdot 10^{-10}$
$5^{-15} \approx 3{,}28 \cdot 10^{-11}$
$6^{-14} \approx 1{,}28 \cdot 10^{-11}$
$7^{-13} \approx 1{,}46 \cdot 10^{-11}$
$8^{-12} \approx 7{,}74 \cdot 10^{-11}$
$9^{-11} \approx 3{,}19 \cdot 10^{-11}$
$10^{-10} = 1 \cdot 10^{-10}$
$11^{-9} \approx 4{,}24 \cdot 10^{-10}$
$12^{-8} \approx 2{,}33 \cdot 10^{-9}$
$13^{-7} \approx 1{,}59 \cdot 10^{-8}$
$14^{-6} \approx 1{,}33 \cdot 10^{-7}$
$15^{-5} \approx 1{,}32 \cdot 10^{-6}$
$16^{-4} \approx 1{,}53 \cdot 10^{-5}$
$17^{-3} \approx 2{,}04 \cdot 10^{-4}$

Die kleinste Zahl lautet: $7^{-13} \approx 1{,}46 \cdot 10^{-11}$.
Die größte Zahl ist: $17^{-3} \approx 2{,}04 \cdot 10^{-4}$.

32 a) Die Zahl genau in der Mitte wird als der Mittelwert der beiden Zahlen berechnet.

(1) $\frac{1}{2} \cdot (0 + 10^3) = 500 = 5 \cdot 10^2$
(2) $\frac{1}{2} \cdot (0 + 10^{-3}) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}001 = 0{,}0005 = 5 \cdot 10^{-4}$
(3) $\frac{1}{2} \cdot (10^1 + 10^3) = \frac{1}{2} \cdot 1010 = 505 = 5{,}05 \cdot 10^2$

b) Länge des Abschnitts:

(1) $10^3 - 10^{-3} = 1000 - 0{,}001 = 999{,}999$
$10^3 - 10^{-9} = 1000 - 0{,}000\,000\,001$
$= 999{,}999\,999\,999$

Der Abschnitt von 10^3 bis 10^{-9} ist etwas länger, und zwar um $0{,}000\,999\,999$ (bzw. $9{,}999\,99 \cdot 10^{-4}$). Das kann man sich auch ohne Rechnung klarmachen; da $10^3 > 10^{-3} > 10^{-9}$ gilt, ist der Abschnitt von 10^3 bis 10^{-3} im Abschnitt von 10^3 bis 10^{-9} enthalten.

(2) $10^5 - 10^1 = 100\,000 - 10 = 99\,990$
$10^{-1} - 10^{-5} = 0{,}1 - 0{,}000\,01 = 0{,}099\,99$

Der Abschnitt von 10^5 bis 10^1 ist deutlich größer.

33 a) Man rechnet die Schritte:

1. Schritt: $0{,}5^2 = 0{,}25$;
2. Schritt: $0{,}25^2 = 0{,}0625$;
3. Schritt: $0{,}0625^2 \approx 0{,}003\,906\,25$;
4. Schritt: $0{,}003\,906\,25^2 \approx 1{,}53 \cdot 10^{-5}$;
5. Schritt: $(1{,}53 \cdot 10^{-5})^2 \approx 2{,}33 \cdot 10^{-10}$;
6. Schritt: $(2{,}33 \cdot 10^{-10})^2 \approx 5{,}42 \cdot 10^{-20}$

Damit erhält man:

(1) Nach 4 Schritten ist der Wert kleiner als $\frac{1}{1000}$, also als 0,001.
Denn nach 3 Schritten hat man den Wert $0{,}003\,906\,25 > 0{,}001$; und nach 4 Schritten erhält man: $1{,}53 \cdot 10^{-5} < 10^{-3} = 0{,}001$.

(2) Nach 5 Schritten ist der Wert kleiner als $\frac{1}{1\,000\,000}$, also als 10^{-6}. Denn es gilt:
$2{,}33 \cdot 10^{-10} < 10^{-6} < 1{,}53 \cdot 10^{-5}$.

(3) Der Wert ist nach 5 Schritten auch kleiner als 10^{-9}. Denn für das Ergebnis nach 5 Schritten gilt ebenfalls:
$2{,}33 \cdot 10^{-10} < 10^{-9}$.

(4) Der Wert ist kleiner als 10^{-12} nach 6 Schritten. Denn es gilt:
$5{,}42 \cdot 10^{-20} < 10^{-12} < 2{,}33 \cdot 10^{-10}$.

b) Die Potenzen lauten:

$0{,}5^2$; $(0{,}5^2)^2 = 0{,}5^4$; $(0{,}5^4)^2 = 0{,}5^8$; $(0{,}5^8)^2 = 0{,}5^{16}$; $(0{,}5^{16})^2 = 0{,}5^{32}$; $(0{,}5^{32})^2 = 0{,}5^{64}$; $(0{,}5^{64})^2 = 0{,}5^{128}$; …

Die Exponenten lauten also:
2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; … (bzw. 2^1; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; 2^6; 2^7; …). Sie haben die Form 2^n, sind also Zweierpotenzen.

c) Der Taschenrechner dürfte ab der Potenz $0{,}5^{512}$ ein falsches Ergebnis zeigen (nämlich gleich 0). Da $512 = 2^9$ gilt, ist dies das Ergebnis beim 9. Schritt.
Die Taschenrechneranzeige lautet also
- beim 8. Schritt: $0{,}5^{256} \approx 8{,}636 \cdot 10^{-78}$
- beim 9. Schritt: $0{,}5^{512} = 0$

(Anmerkung: Das hängt damit zusammen, dass normale Taschenrechner keine Rechnungen mit Zahlen, die kleiner oder gleich als 10^{-100} bzw. größer oder gleich als 10^{100} sind, durchführen können.)
d) Von einem Schritt auf den nächsten verdoppeln sich in etwa die Exponenten. Die 10er-Potenzen der Ergebnisse lauten jeweils:
- beim 4. Schritt (also $0{,}5^{16}$): 10^{-5};
- beim 5. Schritt (also bei $0{,}5^{32}$): 10^{-10};
- beim 6. Schritt (also bei $0{,}5^{64}$): 10^{-20};
- beim 7. Schritt (also bei $0{,}5^{128}$): 10^{-39};
- beim 8. Schritt (also bei $0{,}5^{256}$): 10^{-78}.

34 Einsetzen von $a = 1 + 10^{-n}$ und $b = 1$ in die Formel (2) ergibt:

$$\frac{(1 + 10^{-n})^2 - 1}{(1 + 10^{-n}) - 1} = 1 + 10^{-n} + 1$$

Überprüfen der Ergebnisse in beiden Seiten für die unterschiedlichen Werte von n
Zum Beispiel
für $n = 5$: $2{,}000\,01 = 2{,}000\,01$;
für $n = 6$: $2 = 2{,}000\,001$
für $n = 7$: $2 = 2{,}000\,000\,1$
Man stellt fest, dass schon ab $n = 6$ die Gleichung nicht gültig ist. (Diese Zahl könnte aber bei einem stärkeren Taschenrechner auch 7 statt 6 betragen.)
Erklärung:
Der Zähler des Bruches aus der linken Seite der Gleichung ergibt nach der binomischen Formel:
$1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 10^{-n} + (10^{-n})^2 = 1 + 2 \cdot 10^{-n} + 10^{-2n}$.
Für $n = 6$ lautet daher der dritte Term $10^{-2 \cdot 6} = 10^{-12}$ bzw. $0{,}000\,000\,000\,001$. Dieser Term braucht (zusammen mit der Null vor dem Komma und dem Komma selbst) 14 Positionen auf der Taschenrechneranzeige, damit er dargestellt werden kann. So viele Positionen stehen allerdings bei den meisten handelsüblichen Taschenrechnern nicht zu Verfügung; meistens beträgt die Anzahl der Positionen 12 oder 13. Die Zahl 10^{-12} wird also aus Taschenrechnersicht wie 0 behandelt; damit ergibt die Rechnung in der linken Seite der Gleichung:

$$\frac{(1 + 10^{-6})^2 - 1}{(1 + 10^{-6}) - 1} = \frac{1 + 2 \cdot 10^{-6} + 10^{-12} - 1}{(1 + 10^{-6}) - 1}$$
$$= \frac{1 + 2 \cdot 10^{-6} + 0 - 1}{1 + 10^{-6} - 1} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{10^{-6}} = 2$$

Tipp: Etwas ausführlichere Erklärungen zu den Taschenrechneranzeigen findest du in der Lösung der Aufgabe 30 auf Seite xxx.

Seite 53

35 Abstand Erde – Mond:

$$\begin{aligned} 386\,000\,\text{km} &= 386\,000 \cdot 10^6\,\text{mm} \\ &= 3{,}86 \cdot 10^5 \cdot 10^6\,\text{mm} \\ &= 3{,}86 \cdot 10^{11}\,\text{mm} \end{aligned}$$

Dicke des Papiers: $0{,}1\,\text{mm} = 10^{-1}\,\text{mm}$
$3{,}86 \cdot 10^{11} : 10^{-1} = 3{,}86 \cdot 10^{11-(-1)} = 3{,}86 \cdot 10^{12}$
Die Zahl der Papierschichten verdoppelt sich mit jedem Falten:
1. Faltung: $2^1 = 2$ Schichten
2. Faltung: $2^2 = 4$ Schichten
3. Faltung: $2^3 = 8$ Schichten
…
10. Faltung: $2^{10} = 1024$ Schichten
20. Faltung: $2^{20} \approx 1{,}05 \cdot 10^6$ Schichten
30. Faltung: $2^{30} \approx 1{,}07 \cdot 10^9$ Schichten
40. Faltung: $2^{40} \approx 1{,}10 \cdot 10^{12}$ Schichten
41. Faltung: $2^{41} \approx 2{,}20 \cdot 10^{12}$ Schichten
42. Faltung: $2^{42} \approx 4{,}40 \cdot 10^{12}$ Schichten
Um $3{,}86 \cdot 10^{12}$ Papierschichten zu erhalten, müsste man das Blatt nur 42-mal falten.

36 a) Flächeninhalt der Oberseite eines Blutkörperchens (in m^2):
$A = (8 \cdot 10^{-6})^2 = 64 \cdot 10^{-12} = 6{,}4 \cdot 10^{-11}$
Dieser Flächeninhalt muss verdoppelt und mit der Gesamtzahl der Blutkörperchen multipliziert werden, um den Gesamtflächeninhalt zu berechnen.

$$\begin{aligned} A_{\text{gesamt}} &= 2 \cdot 6{,}4\ 10^{-11} \cdot 25 \cdot 10^{12} \\ &= 2 \cdot 6{,}4 \cdot 25 \cdot 10^{12-11} \\ &= 320 \cdot 10 = 3200 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt der Blutkörperchen insgesamt beträgt $3200\,\text{m}^2$.
b) Die Größe der Vorderseite des menschlichen Körpers wird in etwa mit $1\,\text{m}^2$ geschätzt (vgl. Angabe in der Zeichnung im Schulbuch). Damit steht diese in einem Verhältnis von 1 : 3200 zum Gesamtflächeninhalt der roten Blutkörperchen. Wenn das rote Quadrat der gesamten Oberfläche der Blutkörperchen entspricht, dann entsprechen 100 Kästchen $3200\,\text{m}^2$, also 1 Kästchen $32\,\text{m}^2$.
Bei der kleinsten Figur C gilt: diese ist ca. $\frac{1}{8}$ Kästchen, also ca. $4\,\text{m}^2$ groß. Diese Größe ist immer noch um den Faktor 4 zu groß; eine passende Figur müsste etwa $\frac{1}{30}$ eines Kästchens belegen. Man könnte sie gar nicht mehr richtig sehen.

37 a) Anzahl der Sekunden in einem normalen Jahr mit 365 Tagen:
$365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31\,536\,000$
Anzahl der Sekunden in einem Schaltjahr:
$366 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31\,622\,400$
Durchschnittliche Anzahl Sekunden im Jahr (ein Schaltjahr alle 4 Jahre):
$\frac{3 \cdot 31\,536\,000 + 316\,224\,000}{4} = 31\,557\,600 = 3{,}155\,76 \cdot 10^7$
Ein Jahr hat also etwa $3{,}2 \cdot 10^7$ Sekunden.
b) Aus der Angabe zur Lichtgeschwindigkeit weiß man: In einer Sekunde legt das Licht $300 \cdot 10^6$ m zurück.
Gesucht ist nun die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Da ein Jahr etwa $3{,}2 \cdot 10^7$ Sekunden hat (vgl. Teilaufgabe a)), rechnet man:
$$\begin{aligned} 300 \cdot 10^6 \cdot 3{,}2 \cdot 10^7 &= 960 \cdot 10^{13} \\ &= 9{,}6 \cdot 10^2 \cdot 10^{13} \\ &= 9{,}6 \cdot 10^{15} \end{aligned}$$
In einem Jahr legt also das Licht $9{,}6 \cdot 10^{15}$ m zurück. Das entspricht einem Lichtjahr.

38 a) Es ist hilfreich, wenn man zuerst die Anzahl der Nullen beim Tipp in der Marginalie ergänzt:
1 Quadrillion: 1 mit 24 Nullen
1 Quintillion: 1 mit 30 Nullen
Damit erhält man:
170 Quintillionen = $170 \cdot 10^{30}$

- in technischer Schreibweise:
  $170 \cdot 10^{30}$ Möglichkeiten
- in wissenschaftlicher Schreibweise:
  $1{,}7 \cdot 10^{32}$ Möglichkeiten

b) Gesamtweglänge einer Schachfigur bei 10 Zügen: 10 m
Gesamtlänge bei allen Möglichkeiten:
$1{,}7 \cdot 10^{32} \cdot 10\,\text{m} = 1{,}7 \cdot 10^{33}\,\text{m} = 1{,}7 \cdot 10^{30}\,\text{km}$
Eine Schachfigur würde bei allen möglichen 10-zügigen Spielanfängen eine Gesamtstrecke von $1{,}7 \cdot 10^{33}$ m (bzw. 1,7 Quintillionen km) zurücklegen.
c) Größte Entfernung im All:
$78 \cdot 10^9 \cdot 9{,}6 \cdot 10^{15}\,\text{m}$
$= 78 \cdot 9{,}6 \cdot 10^{9+15}\,\text{m}$
$= 748{,}8 \cdot 10^{24}\,\text{m}$
$= 7{,}488 \cdot 10^2 \cdot 10^{24}\,\text{m}$
$= 7{,}488 \cdot 10^{26}\,\text{m}$
Vergleich dieser Strecke mit dem Weg der Schachfigur aus Teilaufgabe b)
$$\frac{\text{Weg Schachfigur}}{\text{Entfernung All}} = \frac{1{,}7 \cdot 10^{33}}{7{,}488 \cdot 10^{26}}$$
$$= \frac{1{,}7}{7{,}488} \cdot 10^7 \approx 0{,}227 \cdot 10^7$$
$$= 2{,}27 \cdot 10^6$$
Der Weg der Schachfigur wäre also um ca. 2 Millionen Mal länger als die größte Entfernung zwischen zwei Objekten im All!

ACHTUNG: Sie arbeiten mit der Manuskriptfassung der Lösungen. Sie enthalten möglicherweise Fehler.
Gern können Sie Rückmeldungen an die folgende email-Adresse senden: SchnittpunktBW@klett.de
Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.