Mit Hilfe der Aufwärmrunde soll möglichst präzise ermittelt werden, welche Inhalte bei den Lernenden noch verfügbar sind, wo auf fundiertes Wissen aufgebaut werden kann und was evtl. einer nochmaligen Grundlegung bedarf. Um eine gewisse Trennschärfe in dieser Lernstandserhebung zu erreichen, sind die Aufgaben differenziert gehalten: linke Spalte eher leichte Aufgaben, rechte Spalte dann schwierigere. Zudem wird für jede Aufgabennummer die angestrebte Kompetenz benannt. So kann diese Seite ein wichtiger Anhaltspunkt sein, um Lernende möglichst angemessen zu fördern.
Smileys sollen dazu anregen, eigene Fähigkeiten und Fertigkeiten allmählich selbst einzuschätzen. Eine aussagekräftige Analyse der Lernvoraussetzungen erhält die Lehrkraft, wenn sie die Ergebnisse mit dem Auswertungsbogen erfasst.
Diese Auswertung kann handschriftlich (K 10) bzw. bei click & teach auch in digitaler Form erfolgen.

L

1 Rechenregeln und Rechengesetze anwenden

a) Ⓐ $-3{,}6 + 9{,}3 - 6{,}4 + 20{,}7$
$= 20$

Ⓑ $1\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right) + 3\frac{5}{8} - 3\frac{7}{8}$
$= 1{,}5 + 0{,}75 + 3{,}625 - 3{,}875$
$= 2$

b) Ⓐ $5 \cdot (x + 3) - (2x - 5) \cdot \frac{1}{2}$
$= 5x + 15 - x + 2{,}5$
$= 4x + 17{,}5$

Ⓑ $6x - \frac{1}{3} \cdot (21x - 12) - 3\frac{1}{2}x$
$= 6x - 7x + 4 - 3{,}5x$
$= -4{,}5x + 4$

2 Gleichungen zu Alltagssituationen aufstellen und lösen

a) Ⓐ
$2y + 4 = 11 \quad | -4$
$2y = 7 \quad | :2$
$y = 3{,}5$

Ⓑ
$-0{,}5x - 2{,}1 = -0{,}5 \quad | +2{,}1$
$-0{,}5x = 1{,}6 \quad | :0{,}5$
$-x = 3{,}2 \quad | \cdot(-1)$
$x = -3{,}2$

b) Ⓐ
$2x + (4x + 10) \cdot 3 - 2 = 2 \cdot (-9 + 3x) - 6$
$2x + 12x + 30 - 2 = -18 + 6x - 6$
$14x + 28 = 6x - 24 \quad | -6x$
$8x + 28 = -24 \quad | -28$
$8x = -52 \quad | :8$
$x = -6{,}5$

Ⓑ
$\frac{1}{5} \cdot (120 - 4x) + 2 = \frac{1}{4} \cdot (3x - 20)$
$24 - 0{,}8x + 2 = 0{,}75x - 5$
$26 - 0{,}8x = 0{,}75x - 5 \quad | +0{,}8x$
$26 = 1{,}55x - 5 \quad | +5$
$31 = 1{,}55x \quad | :1{,}55$
$20 = x$

Ⓒ
$\frac{3}{4}x - 9\frac{1}{5} = -3 - \frac{4}{5}x$
$0{,}75x - 9{,}2 = -3 - 0{,}8x \quad | +0{,}8x$
$1{,}55x - 9{,}2 = -3 \quad | +9{,}2$
$1{,}55x = 6{,}2$
$x = 4$

3 Gleichungen wertgleich umformen

a)
$0{,}5x + 10 = 3x + 8 \quad | -0{,}5x$
$10 = 2{,}5x + 8 \quad | -8$
$2 = 2{,}5x \quad | :2{,}5$
$0{,}8 = x$

b)
$(5x - 6) \cdot 4 = 9(x + 1)$
$20x - 24 = 9x + 9 \quad | -9x$
$11x - 24 = 9 \quad | +24$
$11x = 33 \quad | :11$
$x = 3$

4 Lineare Zuordnungen darstellen

a) Ⓐ Beispiel:

	Cengiz	Simon	Luca
Betrag	4x	x	2x
insgesamt	98		

Ⓑ Gleichung: $4x + x + 2x = 98$

$\Rightarrow x = 14$

Betrag Cengiz: 56 €
Betrag Simon: 14 €
Betrag Luca: 28 €

b) Ⓐ Beispiel:

	1. Tag	2. Tag	3. Tag
Strecke	x	x – 4	x – 4 + 3
insgesamt	37		

Ⓑ Gleichung: $x + x - 4 + x - 4 + 3 = 37$

$\Rightarrow x = 14$

Strecke 1. Tag: 14 km
Strecke 2. Tag: 10 km
Strecke 3. Tag: 13 km

5 Geometrieaufgaben mit Gleichungen lösen

a) Ⓐ $k = 4 \cdot (a + b + c)$

$156 = 4 \cdot (3x + 2x + 1{,}5x)$

$156 = 4 \cdot 6{,}5x$

$\Rightarrow x = 6$

a = 18 cm; b = 12 cm; c = 9 cm

Ⓑ $V = a^2 \cdot h_K$

$350 = a^2 \cdot 14$

$\Rightarrow a = 5$

Kantenlänge Grundfläche: 5 cm

b) Ⓐ $V_{Qu} = a \cdot b \cdot c$

$3\,000 = 15 \cdot b \cdot 20$

$\Rightarrow b = 10$

Breite Quader: 10 cm

Ⓑ $V_P = \frac{g \cdot h}{2} \cdot h_K$

$3\,000 = \frac{30 \cdot h}{2} \cdot 20$

$\Rightarrow h = 10$

Höhe Dreieck: 10 cm

Z

Auswertungsbogen zur Aufwärmrunde „Gleichungen“

K 10

Einsatzhinweis:
Siehe Erläuterung Lösungsband Seite 5

4 Gleichungen

Jedes neue Kapitel beginnt mit einer Bildaufgabe. Bildliche Darstellungen sind eher offen und engen weniger als textliche Vorgaben ein. So bieten sie die Möglichkeit, verschiedene Aspekte zu sehen, herauszugreifen und zu durchdenken. Vorgegebene Fragen bzw. Aufgaben zeigen dazu einen Weg auf. Mögliche eigene Fragestellungen der Lernenden können Inhalte weiter durchdringen und lassen zudem erkennen, inwieweit Lernende mit solch offenen Situationen umzugehen vermögen.

Kompetenzerwartungen und Inhalte

Lernbereich 7: Gleichungen

Die Schülerinnen und Schüler …

- setzen aus Sachzusammenhängen und Zahlenrätseln komplexe Gleichungen mit ein und zwei Variablen an (z. B. Gleichungen mit Klammern, Brüchen, mehrmals auftretender Variablen, Produkte aus Summen und Differenzen), lösen diese Gleichungen bzw. Gleichungssysteme mithilfe von Äquivalenzumformungen und bewerten verschiedene Lösungsverfahren.
- lösen lineare Gleichungen mit Brüchen (Variable im Zähler oder im Nenner), auch zu Sachsituationen (z. B. Mischungsaufgaben). Sie wechseln situationsangemessen zwischen Bruch- sowie Dezimaldarstellung und begründen ihr Vorgehen. Sie legen dabei ggf. die Definitionsbereiche fest und geben Lösungsmengen an.
- bestimmen Lösungsmengen von reinquadratischen Gleichungen, auch zu Sachsituationen, und formulieren zu gegebenen Lösungsmengen passende reinquadratische Gleichungen.
- setzen Werte in mathematische Formeln ein (z. B. Formeln zur Prozent- oder Zinsrechnung, Formeln aus den Naturwissenschaften), finden fehlende Werte durch Äquivalenzumformungen, überprüfen ihre Ergebnisse in Sachzusammenhängen und begründen ihr Vorgehen.

Einstieg

- **Welcher Sachverhalt ist hier dargestellt?**
  Es sind individuelle Lösungen möglich.
  Beispiel:
  Das Bild zeigt ein ausverkauftes Fußballstadion in Erwartung auf den Spielbeginn. Die Grafik stellt die Zuschauerränge des Stadions in einer schematischen Draufsicht dar. Die verschiedenen Farben stehen für unterschiedliche Preiskategorien der Sitzplätze.

- **Erkläre die Abkürzungen BL und UCL und die unterschiedlichen Preise pro Ticket. Recherchiere gegebenenfalls im Internet.**
  BL steht für Bundesligaspiele, UCL für Spiele der UEFA-Champions-League. Bei besonders attraktiven Spielen werden die Eintrittspreise meist angehoben.

- **Ermittle mithilfe eines Terms die Gesamtkosten des SV Feldenwiesen für ein Bundesligaspiel.**

  Term: $15 \cdot 60 + 22 \cdot 15$

  $= 900 + 330$

  $= 1\,230$

  Gesamtkosten: 1 230 €
- **Formuliert weitere Aufgabenstellungen, tauscht diese aus und bearbeitet sie.**

  Beispiel:

  Wie groß ist der Preisunterschied, wenn der SV Feldenwiesen mit gleicher Personenzahl und gleichen Kategorien nicht zu einem Bundesligaspiel, sondern zu einem Spiel der UEFA Champions League fährt?

  Term: $15 \cdot 80 + 22 \cdot 30$

  $= 1\,200 + 660$

  $= 1\,860$

  Preisunterschied: 1 860 € – 1 230 € = 630 €

Ausblick

Hier werden kurz und kompetenzorientiert die Inhalte des nachfolgenden Kapitels aufgezeigt. Die Lernenden erhalten so bereits einen ersten Überblick über das, was sie auf den nächsten Seiten lernen.

Terme umformen

L

Wertgleiche Terme lassen sich durch Ordnen und Zusammenfassen der unterschiedlichen Termglieder (Glieder mit Variable und Glieder ohne Variable) auf die gleiche Form bringen. Termumformungen werden geübt. Besondere Fehlerquellen sind dabei das Auflösen von Klammern, vor denen ein Faktor und als Operationszeichen ein Minuszeichen steht.
Der sichere Weg ist das Auflösen dieser Klammern in zwei Schritten:
Zuerst wird der Faktor in die Klammer multipliziert, dann die Klammer unter Beachtung der Klammerregel aufgelöst.
Auch beim Zusammenfassen gleichartiger Glieder können durch unterschiedliches Markieren von Gliedern mit Variable und ohne Variable häufige Fehlerquellen ausgeschaltet werden.

1 a) $16 - (2x + 3) \cdot 4 = 4 - 8x$ $\quad$ $2x + 7 + x - 2 = 3x + 5$
$3 \cdot (2x + 6) - 2 = 6x + 16$ $\quad$ $7 + 4 \cdot 2x = 7 + 8x$
$45 - (x - 9) = 45 - x + 9$ $\quad$ $45 + (x - 9) = 45 + x - 9$

b)

x	$16 - (2x + 3) \cdot 4$ $4 - 8x$	$2x + 7 + x - 2$ $3x + 5$	$3 \cdot (2x + 6) - 2$ $6x + 16$	$45 - (x - 9)$ $45 - x + 9$	$45 + x - 9$ $45 + (x - 9)$	$7 + 4 \cdot 2x$ $7 + 8x$
1	– 4	8	22	53	37	15
2	– 12	11	28	52	38	23
3	– 20	14	34	51	39	31

2 Unter gleichartigen Gliedern versteht man Glieder mit Variable und Glieder ohne Variable.
2. Zeile: gleichartige Glieder werden geordnet.
3. Zeile: gleichartige Glieder werden zusammengefasst.

3 a) $7x - 12 - 24 - 9x + 16$
$= -2x - 20$

b) $-13 + 13y + 25 - 16y - 16y$
$= 12 - 19y$

c) $6x - 9 + 5 \cdot 3 - 2 \cdot 2x$
$= 6x - 9 + 15 - 4x$
$= 2x + 6$

d) $7 \cdot 2x + 14 - 3x - 3 \cdot 12$
$= 14x + 14 - 3x - 36$
$= 11x - 22$

e) $2 \cdot 6 - 4 \cdot 5x - 7 \cdot 3 + 3 \cdot 2x$
$= 12 - 20x - 21 + 6x$
$= -14x - 9$

f) $28 : 4 + 5x \cdot 2 - 19 : 2 - 10x \cdot 3$
$= 7 + 10x - 9{,}5 - 30x$
$= -20x - 2{,}5$

4
- Steht ein ⊕ vor der Klammer, kann man die Klammer weglassen.
- Steht ein ⊖ vor der Klammer, kehren sich die Vor- und Rechenzeichen um: aus ⊕ wird ⊖, aus ⊖ wird ⊕.
- Steht ein Faktor vor oder hinter der Klammer, wird er zuerst auf alle Glieder in der Klammer verteilt und anschließend die Klammer aufgelöst.
- Steht ein Divisor hinter der Klammer, wird er zuerst auf alle Glieder in der Klammer verteilt und anschließend die Klammer aufgelöst.

a) $24 + (13x + 19) - 44$
$= 24 + 13x + 19 - 44$
$= 13x - 1$

b) $8 - (4x - 2) - 6x$
$= 8 - 4x + 2 - 6x$
$= -10x + 10$

c) $8 + 17x - (5 + 4x)$
$= 8 + 17x - 5 - 4x$
$= 13x + 3$

d) $26x - 18 - (4x + 8) - 7$
$= 26x - 18 - 4x - 8 - 7$
$= 22x - 33$

e) $2{,}9 - (-4{,}5x - 2{,}1) + 3{,}1x$
$= 2{,}9 + 4{,}5x + 2{,}1 + 3{,}1x$
$= 7{,}6x + 5$

f) $8 \cdot (4 - 3y) - (12y + 36) : 4$
$= (32 - 24y) - (3y + 9)$
$= 32 - 24y - 3y - 9$
$= -27y + 23$

g) $5x + 2 \cdot (2 - 4x) - (10x + 20)$
$= 5x + (4 - 8x) - 10x - 20$
$= 5x + 4 - 8x - 10x - 20$
$= -13x - 16$

h) $17a - (-17 + 6a) - 6{,}4$
$= 17a + 17 - 6a - 6{,}4$
$= 11a + 10{,}6$

i) $4{,}1y - (3{,}6 - 5{,}9y) + 4{,}4$
$= 4{,}1y - 3{,}6 + 5{,}9y + 4{,}4$
$= 10y + 0{,}8$

j) $4 \cdot (6x - 1) - (2 + x) \cdot 2 - 33$
$= (24x - 4) - (4 + 2x) - 33$
$= 24x - 4 - 4 - 2x - 33$
$= 22x - 41$

k) $(5 - 6y) : 2 - (4y + 7) \cdot 2 - 3y + 18$
$= (2{,}5 - 3y) - (8y + 14) - 3y + 18$
$= 2{,}5 - 3y - 8y - 14 - 3y + 18$
$= -14y + 6{,}5$

l) $6{,}3x - (-12{,}6x + 10{,}5) - 11{,}3 - (-2{,}1)$
$= 6{,}3x + 12{,}6x - 10{,}5 - 11{,}3 + 2{,}1$
$= 18{,}9x - 19{,}7$

m) $7 \cdot (1{,}4b - 2{,}1) - (-3{,}9 + 5{,}2b) \cdot 2$
$= (9{,}8b - 14{,}7) - (-7{,}8 + 10{,}4b)$
$= 9{,}8b - 14{,}7 + 7{,}8 - 10{,}4b$
$= -0{,}6b - 6{,}9$

n) $(8{,}4 - 14{,}6x) : 2 - (5{,}5x - 8{,}2) + (-3x - 1{,}2)$
$= (4{,}2 - 7{,}3x) - 5{,}5x + 8{,}2 - 3x - 1{,}2$
$= 4{,}2 - 7{,}3x - 5{,}5x + 8{,}2 - 3x - 1{,}2$
$= -15{,}8x + 11{,}2$

5 a) $7 - (4 - 7x)$
$= 7 - 4 + 7x$
$= 7x + 3$

b) $3y - (-7 + 5y)$
$= 3y + 7 - 5y$
$= -2y + 7$

c) $-2{,}1 - (-2{,}9 - 3{,}6a)$
$= -2{,}1 + 2{,}9 + 3{,}6a$
$= 3{,}6a + 0{,}8$

6 a) $2 \cdot \left(2 + \frac{1}{2}x\right) - (5 - x) \cdot 3 \cdot \frac{1}{4}x$
$= 4 + x - 15 + 3x - 0{,}25x$
$= 3{,}75x - 11$

b) $5 \cdot \left(\frac{2}{5}x + 7\right) - 9 \cdot \left(\frac{1}{10}x - \frac{1}{3}\right)$
$= 2x + 35 - 0{,}9x + 3$
$= 1{,}1x + 38$

c) $4 \cdot \left(5\frac{1}{2} - 7x\right) - \left(9x - 6\frac{3}{10}\right) : 3$
$= 22 - 28x - 3x + 2{,}1$
$= -31x + 24{,}1$

d) $(6x - 9) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (12 - 24x)$
$= 2x - 3 - 2 + 4x$
$= 6x - 5$

7 a) B Teilrechtecke: $a \cdot (b + 2)$ $\quad 3 \cdot (b + 2)$
C Teilrechtecke: $a \cdot b$ $\quad 3 \cdot b$ $\quad a \cdot 2$ $\quad 3 \cdot 2$

b) B $a \cdot (b + 2) + 3 \cdot (b + 2)$
$= ab + 2a + 3b + 6$
C $ab + 3b + a \cdot 2 + 3 \cdot 2$
$= ab + 2a + 3b + 6$

Begründung:
Alle drei Rechtecke stimmen in ihren Flächeninhalten überein. Die Rechtecke B und C sind jeweils Unterteilungen des Rechtecks A.

c) $A_A = (4 + 3) \cdot (2 + 2)$
$= 28\ (\text{cm}^2)$

$A_B = 4 \cdot (2 + 2) + 3 \cdot (2 + 2)$
$= 28\ (\text{cm}^2)$

$A_C = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2$
$= 28\ (\text{cm}^2)$

8 Jedes Glied der ersten Summe bzw. Differenz wird mit jedem Glied der zweiten Summe bzw. Differenz multipliziert.

a) $(x + 2) \cdot (y + 3)$
$= xy + 3x + 2y + 6$

b) $(x + 8) \cdot (y - 4)$
$= xy - 4x + 8y - 32$

c) $(x - 6) \cdot (y + 2)$
$= xy + 2x - 6y - 12$

d) $(3{,}5 - a) \cdot (6 + b)$
$= 21 + 3{,}5b - 6a - ab$
$= -ab \cdot 6a + 3{,}5b + 21$

e) $(a - 4) \cdot (b - 5{,}5)$
$= ab - 5{,}5a - 4b + 22$

f) $(8 - x) \cdot (5{,}2 - y)$
$= 41{,}6 - 8y - 5{,}2x + xy$
$= xy - 5{,}2x - 8y + 41{,}5$

9 a) Term für die Fläche der Gesamtanlage:
$(x + 25) \cdot (x + 10)$

b) Term für die Wegfläche:
$(x + 1) \cdot (y + 1) - x \cdot y$

10 a) 1 Es werden alle Flächeninhalte der Teilrechtecke addiert.
2 Es wird die Breite der Figur mit der Länge der Figur multipliziert.

b) A $A = 12{,}5 \cdot 2 + 2{,}5 \cdot 2 + 12{,}5 \cdot 4{,}5 + 2{,}5 \cdot 4{,}5$
$= 25 + 5 + 56{,}25 + 11{,}25$
$= 97{,}5$

$A = (12{,}5 + 2{,}5) \cdot (2 + 4{,}5)$
$= 15 \cdot 6{,}5$
$= 97{,}5$

Ⓑ $A = 1{,}2 \cdot x + 3{,}5 \cdot x + 7{,}3 \cdot 1{,}2 + 7{,}3 \cdot 3{,}5$
$= 4{,}7x + 8{,}76 + 25{,}55$
$= 4{,}7x + 34{,}31$
$A = (x + 7{,}3) \cdot (1{,}2 + 3{,}5)$
$= 1{,}2x + 3{,}5x + 8{,}76 + 25{,}55$
$= 4{,}7x + 34{,}31$

Ⓒ $A = 2{,}9 \cdot a + b \cdot a + 2{,}9 \cdot 1{,}8 + b \cdot 1{,}8$
$= ab + 2{,}9a + 1{,}8b + 5{,}22$
$A = (a + 1{,}8) \cdot (b + 2{,}9)$
$= ab + 2{,}9a + 1{,}8b + 5{,}22$

11 Beispiel:
$(8 + 2) \cdot (12 - 7) = x$
$10 \cdot 5 = x$
$50 = x$
Individuelle Schülerformulierungen

Z

Gleichungen bilden

Einsatzhinweis: Als Arbeitsblatt vorgeben.
Individuelle Lösungen

Zahlenjongleur

Einsatzhinweis: Als Arbeitsblatt vorgeben.

a) $8 \cdot 2 - 7$ b) $(11 - 8) \cdot 3$ c) $10 : 2 + 3$ d) $(1 + 3) \cdot 3$
e) $6 \cdot 3 - 9 - 4$ f) $(14 : 2 - 2) \cdot 2$ g) $(15 - 6) \cdot 5 : 9$ h) $(2 \cdot 2 - 1) \cdot 2$
i) $(8 - 5 + 2) \cdot 3 \cdot 7$ j) $(17 - 3) \cdot 4 : 7 + 1$

Kopfrechenübungen

Einsatzhinweise:
Arbeitsauftrag und Aufgaben präsentieren und Ergebnisse notieren lassen. Zur Kontrolle Lösungen aufdecken.

1. Fasse zusammen.

a) $9x + 4 + x + 6$
$= 10x + 10$

b) $6x + 4 - 8x + 5$
$= -2x + 9$

c) $7 - 4x - 13 - 2x$
$= -6x - 6$

d) $-7x - 9 - 5x - 4$
$= -12x - 13$

e) $3x - 8 - 6 - 4x$
$= -x - 14$

f) $10 - x - 5x - 4x$
$= -10x - 10$

2. Notiere ohne Klammern und vereinfache dann.

a) $6 + (4x - 9)$
$= 6 + 4x - 9$
$= 4x - 3$

b) $8 - (2x + 3)$
$= 8 - 2x - 3$
$= -2x + 5$

c) $10x - (-7 - 5x)$
$= 10x + 7 + 5x$
$= 15x + 7$

d) $-3x + (30 - 6x)$
$= -3x + 30 - 6x$
$= -9x + 30$

e) $-8 - (5x - 9)$
$= -8 - 5x + 9$
$= -5x + 1$

f) $-2 - (-3 - 3x)$
$= -2 + 3 + 3x$
$= 3x + 1$

L

In unterschiedlichen Aufgabenstellungen werden die Lösungsschritte beim äquivalenten Umformen geübt.

1 $3x - 2(x - 4) = (x - 4) \cdot 5$

$3x - (2x - 8) = (5x - 20)$

$3x - 2x + 8 = 5x - 20$

$x + 8 = 5x - 20 \quad | - x$ Auf beide Seiten der Gleichung x subtrahieren.

$8 = 4x - 20 \quad | + 20$ Auf beiden Seiten der Gleichung 20 addieren.

$28 = 4x \quad | : 4$ Beide Seiten der Gleichung durch 4 dividieren.

$7 = x$

a) $8(x + 2) - 11x = 49 - 2x$

$8x + 16 - 11x = 49 - 2x$

$-3x + 16 = 49 - 2x \quad | + 3x$

$16 = 49 + x \quad | - 49$

$-33 = x$

b) $5(2x + 2) + 6 - 4x = 8x + 2$

$10x + 10 + 6 - 4x = 8x + 2$

$6x + 16 = 8x + 2 \quad | - 6x$

$16 = 2x + 2 \quad | - 2$

$14 = 2x \quad | : 2$

$7 = x$

c) $6(x - 2) = x + 8 + 3x$

$6x - 12 = 4x + 8 \quad | - 4x$

$2x - 12 = 8 \quad | + 12$

$2x = 20 \quad | : 2$

$x = 10$

d) $3(6 + 2x) = (x - 9) \cdot 8 - 6x + 54$

$18 + 6x = 8x - 72 - 6x + 54$

$18 + 6x = 2x - 18 \quad | - 2x$

$18 + 4x = -18 \quad | - 18$

$4x = -36 \quad | : 4$

$x = -9$

e) $18x - 5 - 5x = 4(3x + 1) + 2$

$13x - 5 = 12x + 4 + 2$

$13x - 5 = 12x + 6 \quad | - 12x$

$x - 5 = 6 \quad | + 5$

$x = 11$

f) $9 + 5x = 5(x + 4) - 2 + 3x$

$9 + 5x = 5x + 20 - 2 + 3x$

$9 + 5x = 8x + 18 \quad | - 5x$

$9 = 3x + 18 \quad | - 18$

$-9 = 3x \quad | : 3$

$-3 = x$

g) $5(4x - 5) = 23 - 4(3x - 4)$

$20x - 25 = 23 - 12x + 16$

$20x - 25 = 39 - 12x \quad | + 12x$

$32x - 25 = 39 \quad | + 25$

$32x = 64 \quad | : 32$

$x = 2$

h) $5(3x - 4) - 10 = 4(15 - 3x) - 36$

$15x - 20 - 10 = 60 - 12x - 36$

$15x - 30 = 24 - 12x \quad | + 12x$

$27x - 30 = 24 \quad | + 30$

$27x = 54 \quad | : 27$

$x = 2$

i) $16(x + 3) = 142 - (4x - 11) \cdot 6$

$16x + 48 = 142 - 24x + 66$

$16x + 48 = 208 - 24x \quad | + 24x$

$40x + 48 = 208 \quad | - 48$

$40x = 160 \quad | : 40$

$x = 4$

j) $3(7x - 4) - (x + 8) + 14 = 11x + 12$

$21x - 12 - x - 8 + 14 = 11x + 12$

$20x - 6 = 11x + 12 \quad | - 11x$

$9x - 6 = 12 \quad | + 6$

$9x = 18 \quad | : 9$

$x = 2$

2 a) $5 \cdot (2 - x) = 5 \cdot (2x - 10)$

$10 - 5x = 10x - 50 \quad | + 5x$

$10 = 15x - 50 \quad | + 50$

$60 = 15x \quad | : 15$

$x = 4$

b) $4 + (6 - 3x) : 1{,}5 = -10$

$4 + 4 - 2x = -10 \quad | -8$

$-2x = -18 \quad | : (-2)$

$x = 9$

c) $11x - 5 = 4x - (3x + 2)$

$1x - 5 = 4x - 3x - 2$

$11x - 5 = x - 2 \quad | - x$

$10x - 5 = -2 \quad | + 5$

$10x = 3 \quad | : 10$

$x = 0{,}3$

d) $8 \cdot (5x - 3) + 16 = 1{,}8 + 9 \cdot (4x - 1)$

$40x - 24 + 16 = 1{,}8 + 36x - 9$

$40x - 8 = 36x - 7{,}2 \quad | - 36x$

$4x - 8 = -7{,}2 \quad | + 8$

$4x = 0{,}8 \quad | : 4$

$x = 0{,}2$

e) $42 - (x + 3) \cdot 7 = (9 - 3x) : 3 + 24$

$$
\begin{aligned}
42 - 7x - 21 &= 3 - x + 24 \\
21 - 7x &= 27 - x && | + 7x \\
21 &= 27 + 6x && | - 27 \\
-6 &= 6x && | : 6 \\
-1 &= x
\end{aligned}
$$

f) $36\,(x + 2) = 312 + 8\,(4x - 11{,}5)$

$$
\begin{aligned}
36x + 72 &= 312 + 32x - 92 \\
36x + 72 &= 220 + 32x && | - 32x \\
4x + 72 &= 220 && | - 72 \\
4x &= 148 && | : 4 \\
x &= 37
\end{aligned}
$$

3 a) $28x - 60{,}5 - (11x - 182) = 6\,(5 - 0{,}25x) + 3\,(2x + 58)$

$$
\begin{aligned}
28x - 60{,}5 - 11x + 182 &= 30 - 1{,}5x + 6x + 174 \\
17x + 121{,}5 &= 204 + 4{,}5x && | - 4{,}5x \\
12{,}5x + 121{,}5 &= 204 && | - 121{,}5 \\
12{,}5x &= 82{,}5 && | : 12{,}5 \\
x &= 6{,}6
\end{aligned}
$$

b) $3\,(1{,}5x - 2{,}5) - (3x - 5) + (3{,}5x + 7) : 0{,}2 = 12{,}5x$

$$
\begin{aligned}
4{,}5x - 7{,}5 - 3x + 5 + 17{,}5x + 35 &= 12{,}5x \\
19x + 32{,}5 &= 12{,}5x && | - 12{,}5x \\
6{,}5x + 32{,}5 &= 0 && | - 32{,}5 \\
6{,}5x &= -32{,}5 && | : 6{,}5 \\
x &= -5
\end{aligned}
$$

c) $(1{,}2x + 1{,}5) \cdot 0{,}7 - (0{,}3 - 1{,}7x) \cdot 1{,}2 = 10{,}69 - 2{,}12x$

$$
\begin{aligned}
0{,}84x + 1{,}05 - 0{,}36 + 2{,}04x &= 10{,}69 - 2{,}12x \\
2{,}88x + 0{,}69 &= 10{,}69 - 2{,}12x && | + 2{,}12x \\
5x + 0{,}69 &= 10{,}69 && | - 0{,}69 \\
5x &= 10 && | : 5 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

d) $0{,}25\,(x + 4) + 2x - 4 = 2\,(5x - 16) - (6 - 3{,}5x) - 2{,}5x$

$$
\begin{aligned}
0{,}25x + 1 + 2x - 4 &= 10x - 32 - 6 + 3{,}5x - 2{,}5x \\
2{,}25x - 3 &= 11x - 38 && | - 2{,}25x \\
-3 &= 8{,}75x - 38 && | + 38 \\
35 &= 8{,}75x && | : 8{,}75 \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

e) $1{,}2\,(16x - 8) - 3{,}6\,(3x + 9) = 2{,}4\,(4x - 16) - 9{,}6$

$$
\begin{aligned}
19{,}2x - 9{,}6 - 10{,}8x - 32{,}4 &= 9{,}6x - 38{,}4 - 9{,}6 \\
8{,}4x - 42 &= 9{,}6x - 48 && | - 9{,}6x \\
-1{,}2x - 42 &= -48 && | + 42 \\
-1{,}2x &= -6 && | : (-1{,}2) \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

f) $20\,(0{,}5x + 1{,}5) + (0{,}25 - 5x) \cdot 2 = 50{,}5 - (1{,}25x + 5) \cdot 2$

$$
\begin{aligned}
10x + 30 + 0{,}5 - 10x &= 50{,}5 - 2{,}5x + 10 \\
30{,}5 &= 40{,}5 - 2{,}5x && | - 40{,}5 \\
-10 &= -2{,}5x && | : (-2{,}5) \\
4 &= x
\end{aligned}
$$

g) $2{,}8 \cdot (0{,}3x + 0{,}375) - (0{,}15 - 0{,}85x) \cdot 2{,}4 = (42{,}76 - 8{,}48x) \cdot 0{,}25$

$$
\begin{aligned}
0{,}84x + 1{,}05 - 0{,}36 + 2{,}04x &= 10{,}69 - 2{,}12x \\
2{,}88x + 0{,}69 &= 10{,}69 - 2{,}12x && | + 2{,}12x \\
5x + 0{,}69 &= 10{,}69 && | - 0{,}69 \\
5x &= 10 && | : 5 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

4 a) $5x - 14 = 16 \quad | + 14$

$5x = 30 \quad | : 5$

$x = 6$

$14x + 12 = 54 \quad | - 12$

$14x = 42 \quad | : 14$

$x = 3$

$-3x + 18 = 27 \quad | - 18$

$-3x = 9 \quad | : (-3)$

$x = -3$

b) Individuelle Schülerformulierungen

Z

Warming-up für Topleistungen

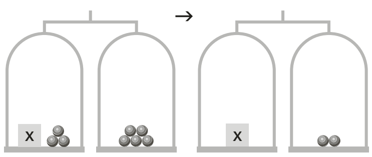
Einsatzhinweis: Als Arbeitsblatt vorgegeben.

1 33 – 7 = 26	26 73 – 39 = 34	51 378 : 6 = 63
2 9 · 5 = 45	27 8 · 5 = 40	52 638 – 389 = 249
3 18 – 13 = 5	28 82 : 2 = 41	53 565 + 337 = 902
4 3 · 12 = 36	29 64 + 27 = 91	54 456 + 766 = 1 222
5 22 – 9 = 13	30 85 – 36 = 49	55 432 : 54 = 8
6 6 · 9 = 54	31 92 : 46 = 2	56 32 · 19 = 608
7 7 + 21 = 34	32 17 · 4 = 68	57 747 : 9 = 83
8 8 · 9 = 72	33 64 : 16 = 4	58 521 + 867 = 1 388
9 13 · 6 = 78	34 15 · 13 = 195	59 74 · 6 = 444
10 52 – 33 = 19	35 138 : 6 = 23	60 967 – 662 = 305
11 31 – 19 = 12	36 93 – 35 = 58	61 63 · 18 = 1 134
12 26 · 2 = 52	37 8 · 14 = 112	62 869 · 2 = 1 738
13 41 – 16 = 25	38 84 + 79 = 163	63 2 376 : 9 = 264
14 7 + 57 = 64	39 12 · 25 = 300	64 1 608 + 934 = 2 542
15 39 – 15 = 54	40 104 – 49 = 55	65 34 · 9 = 306
16 55 – 38 = 17	41 167 – 88 = 79	66 216 · 7 = 1 512
17 11 · 11 = 121	42 53 + 67 = 120	67 735 · 15 = 11 025
18 65 : 13 = 5	43 18 + 73 = 91	68 84 · 42 = 3 528
19 60 : 4 = 15	44 156 : 26 = 6	69 2 534 – 1 749 = 785
20 29 + 42 = 71	45 33 · 5 = 165	70 847 · 6 = 5 082
21 64 – 36 = 28	46 6 · 56 = 336	71 1 520 · 25 = 38 000
22 53 · 3 = 159	47 78 · 7 = 546	72 6 032 · 3 = 18 096
23 92 : 4 = 23	48 231 – 178 = 53	73 2 683 · 5 = 13 415
24 31 · 7 = 217	49 224 – 56 = 168	74 3 228 · 9 = 29 052
25 51 : 3 = 17	50 44 · 4 = 176	75 8 089 · 11 = 88 976

Kopfrechenübungen

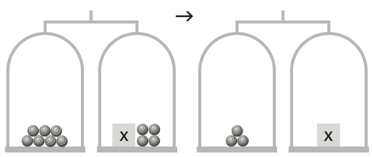
Einsatzhinweise:
Arbeitsauftrag und Aufgaben präsentieren und Ergebnisse notieren lassen. Zur Kontrolle Lösungen aufdecken.

1. a)



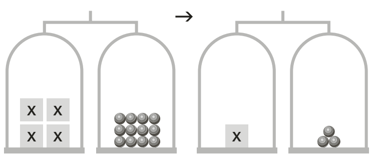
$x + 3 = 5 \quad | -3$ $\qquad$ $x = 2$

b)



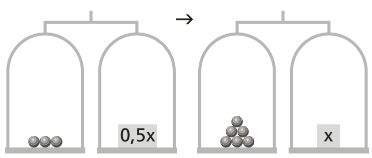
$7 = x + 4 \quad | -4$ $\qquad$ $3 = x$

c)



$4x = 12 \quad | : 4$ $\qquad$ $x = 3$

d)



$3 = 0{,}5x \quad | : 0{,}5$ $\qquad$ $6 = x$

2. Bestimme x.

a) $7 + x = 12$
$x = 5$

b) $x + 9 = 13$
$x = 4$

c) $x - 3 = 8$
$x = 11$

d) $6 = x - 2$
$8 = x$

e) $3x = 18$
$x = 6$

f) $x \cdot 6 = 30$
$x = 5$

g) $21 = 7x$
$3 = x$

h) $0{,}5x = 6$
$x = 12$

Gleichungen mit Brüchen lösen

Viele Lernende empfinden Brüche als „störend“. Durch die Multiplikation aller Glieder einer Gleichung mit dem Hauptnenner (HN) und anschließendem Kürzen können diese „störenden“ Brüche beseitigt werden.
Auf folgende häufige Fehlerquellen ist besonders hinzuweisen:
- Oftmals werden nicht alle Glieder der Gleichung mit dem HN multipliziert.
- Sehr häufig werden die Klammern vergessen, wenn Summen oder Differenzen multipliziert werden.

L

1 a) Ⓐ Es wird mit Brüchen gerechnet. Der gemeinsame Nenner ist notwendig, damit man die Brüche addieren bzw. subtrahieren und somit zusammenfassen kann.
Ⓑ Alle Glieder der Gleichung werden zuerst mit dem Hauptnenner 12 multipliziert. Wenn man dann kürzt, entsteht eine Gleichung mit dem Vorteil, dass nur noch ganze Zahlen vorkommen. Im Beispiel Ⓑ wurde mit 12 multipliziert, weil man dann sowohl Drittel als auch Sechstel und Zwölftel kürzen kann.
b) Lernende begründen individuell, welcher Lösungsweg für sie günstiger ist.

2 Hinweis:
Da die Lernenden überwiegend den Lösungsweg „Beide Seiten mit dem Hauptnenner multiplizieren“ bevorzugen, werden die Lösungen mit dieser Methode dargestellt.

a)
$$\begin{aligned}
\tfrac{5}{4}x - \tfrac{4}{3} &= \tfrac{7}{6}x - \tfrac{2}{3} && |\cdot 12\\
{}^3\tfrac{\cancel{12}\cdot 5}{\cancel{4}_1}x - {}^4\tfrac{\cancel{12}\cdot 4}{\cancel{3}_1} &= {}^2\tfrac{\cancel{12}\cdot 7}{\cancel{6}_1}x - {}^4\tfrac{\cancel{12}\cdot 2}{\cancel{3}_1}\\
15x - 16 &= 14x - 8 && |-14x\\
x - 16 &= -8 && |+16\\
x &= 8
\end{aligned}$$

P:
$$\begin{aligned}
\tfrac{5}{4}\cdot 8 - \tfrac{4}{3} &= \tfrac{7}{6}\cdot 8 - \tfrac{2}{3}\\
10 - \tfrac{4}{3} &= \tfrac{56}{6} - \tfrac{2}{3}\\
8\tfrac{2}{3} &= 8\tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{3}x - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{6}x - 2 &= 0 && |\cdot 12\\
{}^4\tfrac{\cancel{12}\cdot 2}{\cancel{3}_1}x - {}^3\tfrac{\cancel{12}\cdot 3}{\cancel{4}_1}x + {}^2\tfrac{\cancel{12}\cdot 1}{\cancel{6}_1}x - 12\cdot 2 &= 0\\
8x - 9x + 2x - 24 &= 0\\
x - 24 &= 0 && |+24\\
x &= 24
\end{aligned}$$

P:
$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{3}\cdot 24 - \tfrac{3}{4}\cdot 24 + \tfrac{1}{6}\cdot 24 - 2 &= 0\\
16 - 18 + 4 - 2 &= 0\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
\tfrac{x}{2} + \tfrac{4x}{5} - \tfrac{3x}{10} - \tfrac{5x}{6} &= 8 && |\cdot 30\\
{}^{15}\tfrac{\cancel{30}x}{\cancel{2}_1} + {}^6\tfrac{\cancel{30}\cdot 4x}{\cancel{5}_1} - {}^3\tfrac{\cancel{30}\cdot 3x}{\cancel{10}_1} - {}^5\tfrac{\cancel{30}\cdot 5x}{\cancel{6}_1} &= 30\cdot 8\\
15x + 24x - 9x - 25x &= 240\\
5x &= 240 && |:5\\
x &= 48
\end{aligned}$$

P:
$$\begin{aligned}
\tfrac{48}{2} + \tfrac{4\cdot 48}{5} - \tfrac{3\cdot 48}{10} - \tfrac{5\cdot 48}{6} &= 8\\
24 + 38{,}4 - 14{,}4 - 40 &= 8\\
8 &= 8
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{11}{12} &= x - 2 && |\cdot 12\\
{}^4\tfrac{\cancel{12}}{\cancel{3}_1}x + {}^3\tfrac{\cancel{12}\cdot 1}{\cancel{4}_1}x + {}^1\tfrac{\cancel{12}\cdot 11}{\cancel{12}_1} &= 12\,(x-2)\\
4x + 3x + 11 &= 12x - 24\\
7x + 11 &= 12x - 24 && |-12x\\
-5x + 11 &= -24 && |-11\\
-5x &= -35 && |:(-5)\\
x &= 7
\end{aligned}$$

P:
$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{3}\cdot 7 + \tfrac{1}{4}\cdot 7 + \tfrac{11}{12} &= 7 - 2\\
\tfrac{28}{12} + \tfrac{21}{12} + \tfrac{11}{12} &= 5\\
5 &= 5
\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}
\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{4} &= 14 - \tfrac{x}{8} && |\cdot 8\\
{}^4\tfrac{\cancel{8}x}{\cancel{2}_1} + {}^2\tfrac{\cancel{8}x}{\cancel{4}_1} &= 8\cdot 14 - {}^1\tfrac{\cancel{8}x}{\cancel{8}_1}\\
4x + 2x &= 112 - x\\
6x &= 112 - x && |+x\\
7x &= 112 && |:7\\
x &= 16
\end{aligned}$$

P:
$$\begin{aligned}
\tfrac{16}{2} + \tfrac{16}{4} &= 14 - \tfrac{16}{8}\\
8 + 4 &= 14 - 2\\
12 &= 12
\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}
\tfrac{x}{7} - \tfrac{9x}{14} - \tfrac{4}{7} &= -\tfrac{3x}{14} && |\cdot 14\\
{}^2\tfrac{\cancel{14}x}{\cancel{7}_1} - {}^1\tfrac{\cancel{14}\cdot 9x}{\cancel{14}_1} - {}^2\tfrac{\cancel{14}\cdot 4}{\cancel{7}_1} &= -{}^1\tfrac{\cancel{14}\cdot 3x}{\cancel{14}_1}\\
2x - 9x - 8 &= -3x\\
-7x - 8 &= -3x && |+3x\\
-4x - 8 &= 0 && |+8\\
-4x &= 8 && |:(-4)\\
x &= -2
\end{aligned}$$

P:
$$\begin{aligned}
-\tfrac{2}{7} - \tfrac{9\cdot(-2)}{14} - \tfrac{4}{7} &= -\tfrac{3\cdot(-2)}{14}\\
-\tfrac{2}{7} + \tfrac{9}{7} - \tfrac{4}{7} &= \tfrac{3}{7}\\
\tfrac{3}{7} &= \tfrac{3}{7}
\end{aligned}$$

3 a) Um die Zähler 18 – 2x bzw. 8x + 3 muss eine Klammer gesetzt werden, weil die Differenz bzw. die Summe mit dem Hauptnenner multipliziert werden muss, nicht nur das erste Glied.

b) $\frac{8x + 3}{3} = \frac{18 - 2x}{4} + 2x \quad | \cdot 12$

$\frac{^4\cancel{12} \cdot (8x + 3)}{\cancel{3}_1} = \frac{^3\cancel{12} \cdot (18 - 2x)}{\cancel{4}_1} + 12 \cdot 2x$

$4 \cdot (8x + 3) = 3 \cdot (18 - 2x) + 24x$

$(32x + 12) = (54 - 6x) + 24x$

$32x + 12 = 54 - 6x + 24x$

$32x + 12 = 54 + 18x \quad | - 18x$

$14x + 12 = 54 \quad | - 12$

$14x = 42 \quad | : 14$

$x = 3$

P.: $\frac{8 \cdot 3 + 3}{3} = \frac{18 - 2 \cdot 3}{4} + 2 \cdot 3$

$\frac{27}{3} = \frac{12}{4} + 6$

$9 = 9$

c) Lernende nennen individuelle Schwierigkeiten, z. B.

- dass bei der Multiplikation von Summen oder Differenzen Klammern gesetzt werden müssen.
- dass man bei der Multiplikation mit dem Hauptnenner alle Glieder der Gleichung multiplizieren muss.

4 a) $\frac{x + 3}{5} + 3 = 6$

$\frac{5 \cdot (x + 3)}{5} + 3 \cdot 5 = 5 \cdot 6$

b) $\frac{3x - 20}{8} - \frac{60 - 2x}{5} = 1$

$\frac{40 \cdot (3x - 20)}{8} - \frac{40 \cdot (60 - 2x)}{5} = 40 \cdot 1$

c) $3 - \frac{7y}{5} = 8 - \frac{39y}{10}$

$10 \cdot 3 - \frac{10 \cdot 7y}{5} = 10 \cdot 8 - \frac{10 \cdot 39y}{10}$

5 a) $\frac{4x - 5}{2} + 8 = 2 - 1{,}5x \quad | \cdot 2$

$\frac{^1\cancel{2} \cdot (4x - 5)}{\cancel{2}_1} + 2 \cdot 8 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1{,}5x$

$4x - 5 + 16 = 4 - 3x$

$4x + 11 = 4 - 3x \quad | + 3x$

$7x + 11 = 4 \quad | - 11$

$7x = -7 \quad | : 7$

$x = -1$

P: $\frac{4 \cdot (-1) - 5}{2} + 8 = 2 - 1{,}5 \cdot (-1)$

$-4{,}5 + 8 = 2 + 1{,}5$

$3{,}5 = 3{,}5$

b) $3 \cdot (4 + 4x) = \frac{9x - 18}{3} \quad | \cdot 3$

$9 \cdot (4 + 4x) = \frac{^1\cancel{3} \cdot (9x - 18)}{\cancel{3}_1}$

$36 + 36x = 9x - 18 \quad | - 9x$

$36 + 27x = -18 \quad | - 36$

$27x = -54 \quad | : 27$

$x = -2$

P: $3 \cdot (4 + 4 \cdot (-2)) = \frac{9 \cdot (-2) - 18}{3}$

$3 \cdot (-4) = \frac{-36}{3}$

$-12 = -12$

c) $\frac{2x - 1}{3} = \frac{6 + 2x}{2} \quad | \cdot 6$

$\frac{^2\cancel{6} \cdot (2x - 1)}{\cancel{3}_1} = \frac{^3\cancel{6} \cdot (6 + 2x)}{\cancel{2}_1}$

$2 \cdot (2x - 1) = 3 \cdot (6 + 2x)$

$4x - 2 = 18 + 6x \quad | - 6x$

$-2x - 2 = 18 \quad | + 2$

$-2x = 20 \quad | : (-2)$

$x = -10$

P: $\frac{2 \cdot (-10) - 1}{3} = \frac{6 + 2 \cdot (-10)}{2}$

$\frac{-21}{3} = -\frac{14}{2}$

$-7 = -7$

d) $\frac{6x + 10}{4} = \frac{5x + 4}{3} \quad | \cdot 12$

$\frac{^3\cancel{12} \cdot (6x + 10)}{\cancel{4}_1} = \frac{^4\cancel{12} \cdot (5x + 4)}{\cancel{3}_1}$

$3 \cdot (6x + 10) = 4 \cdot (5x + 4)$

$18x + 30 = 20x + 16 \quad | - 20x$

$-2x + 30 = 16 \quad | - 30$

$-2x = -14 \quad | : (-2)$

$x = 7$

P: $\frac{6 \cdot 7 + 10}{4} = \frac{5 \cdot 7 + 4}{3}$

$\frac{52}{4} = \frac{39}{3}$

$13 = 13$

e)
$$\frac{2x+8}{2} + \frac{x-4}{6} = 15 \qquad | \cdot 6$$
$$\frac{{}^{3}\cancel{6}\cdot(2x+8)}{\cancel{2}_{1}} + \frac{{}^{1}\cancel{6}\cdot(x-4)}{\cancel{6}_{1}} = 6\cdot 15$$
$$3\cdot(2x+8) + (x-4) = 6\cdot 15$$
$$6x + 24 + x - 4 = 90$$
$$7x + 20 = 90 \qquad | -20$$
$$7x = 70 \qquad | : 7$$
$$x = 10$$

P: $\frac{2\cdot 10+8}{2} + \frac{10-4}{6} = 15$
$$\frac{28}{2} + \frac{6}{6} = 15$$
$$14 + 1 = 15$$
$$15 = 15$$

f)
$$\frac{3x-8}{4} + 3 = \frac{5x+14}{7} \qquad | \cdot 28$$
$$\frac{{}^{7}\cancel{28}\cdot(3x-8)}{\cancel{4}_{1}} + 28\cdot 3 = \frac{{}^{4}\cancel{28}\cdot(5x+14)}{\cancel{7}_{1}}$$
$$7\cdot(3x-8) + 84 = 4\cdot(5x+14)$$
$$21x - 56 + 84 = 20x + 56$$
$$21x + 28 = 20x + 56 \qquad | -20x$$
$$x + 28 = 56 \qquad | -28$$
$$x = 28$$

P: $\frac{3\cdot 28-8}{4} + 3 = \frac{5\cdot 28+14}{7}$
$$\frac{76}{4} + 3 = \frac{154}{7}$$
$$19 + 3 = 22$$
$$22 = 22$$

g)
$$\frac{80+x}{4} = \frac{4x-5}{3} \qquad | \cdot 12$$
$$\frac{{}^{3}\cancel{12}\cdot(80+x)}{\cancel{4}_{1}} = \frac{{}^{4}\cancel{12}\cdot(4x-5)}{\cancel{3}_{1}}$$
$$3\cdot(80+x) = 4\cdot(4x-5)$$
$$240 + 3x = 16x - 20 \qquad | -16x$$
$$240 - 13x = -20 \qquad | -240$$
$$-13x = -260 \qquad | : (-13)$$
$$x = 20$$

P: $\frac{80+20}{4} = \frac{4\cdot 20-5}{3}$
$$\frac{100}{4} = \frac{75}{3}$$
$$25 = 25$$

h)
$$\frac{3\cdot(15-x)}{4} = \frac{6\cdot(2x-7)}{7} \qquad | \cdot 28$$
$$\frac{{}^{7}\cancel{28}\cdot 3\cdot(15-x)}{\cancel{4}_{1}} = \frac{{}^{4}\cancel{28}\cdot 6\cdot(2x-7)}{\cancel{7}_{1}}$$
$$21\cdot(15-x) = 24\cdot(2x-7)$$
$$315 - 21x = 48x - 168 \qquad | -48x$$
$$315 - 69x = -168 \qquad | -315$$
$$-69x = -483 \qquad | : (-69)$$
$$x = 7$$

P: $\frac{3\cdot(15-7)}{4} = \frac{6\cdot(2\cdot 7-7)}{7}$
$$\frac{24}{4} = \frac{42}{7}$$
$$6 = 6$$

i)
$$\frac{7x+6}{9} - x = 4 - \frac{5x-2}{6} \qquad | \cdot 18$$
$$\frac{{}^{2}\cancel{18}\cdot(7x+6)}{\cancel{9}_{1}} - 18\cdot x = 18\cdot 4 - \frac{{}^{3}\cancel{18}\cdot(5x-2)}{\cancel{6}_{1}}$$
$$2\cdot(7x+6) - 18x = 72 - 3\cdot(5x-2)$$
$$14x + 12 - 18x = 72 - 15x + 6$$
$$-4x + 12 = 78 - 15x \qquad | +15x$$
$$11x + 12 = 78 \qquad | -12$$
$$11x = 66 \qquad | : 11$$
$$x = 6$$

P: $\frac{7\cdot 6+6}{9} - 6 = 4 - \frac{5\cdot 6-2}{6}$
$$\frac{48}{9} - 6 = 4 - \frac{28}{6}$$
$$-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

6 a)
$$\frac{9x + 0{,}5\cdot(4-6x)}{2} = 7{,}5 - (x + 1{,}5) + 2x \qquad | \cdot 2$$
$$\frac{{}^{1}\cancel{2}\,(9x + 0.5\cdot(4-6x))}{\cancel{2}_{1}} = 2\cdot 7{,}5 - 2\cdot(x+1{,}5) + 2\cdot 2x$$
$$9x + 2 - 3x = 15 - 2x - 3 + 4x$$
$$6x + 2 = 12 + 2x \qquad | -2x$$
$$4x + 2 = 12 \qquad | -2$$
$$4x = 10 \qquad | : 4$$
$$x = 2{,}5$$

b) $\frac{4}{5} \cdot (30x - 75) - (x + 27) = \frac{11x - 29}{3} \qquad | \cdot 15$

$\frac{{}^{3}\cancel{15} \cdot 4}{\cancel{5}_{1}} \cdot (30x - 75) - 15\,(x + 27) = \frac{{}^{5}\cancel{15} \cdot (11x - 29)}{\cancel{3}_{1}}$

$12 \cdot (30x - 75) - 15x - 405 = 55x - 145$

$360x - 900 - 15x - 405 = 55x - 145$

$345x - 1\,305 = 55x - 145 \qquad | - 55x$

$290x - 1\,305 = -145 \qquad | + 1\,305$

$290x = 1\,160 \qquad | : 290$

$x = 4$

c) $\frac{2 - x}{3} - \frac{1}{2} \cdot (x + 12) = \frac{5x}{6} - 7 \qquad | \cdot 6$

$\frac{{}^{2}\cancel{6} \cdot (2 - x)}{\cancel{3}_{1}} - \frac{{}^{3}\cancel{6} \cdot 1}{\cancel{2}_{1}} \cdot (x + 12) = \frac{{}^{1}\cancel{6} \cdot 5x}{\cancel{6}_{1}} - 6 \cdot 7$

$2 \cdot (2 - x) - 3 \cdot (x + 12) = 5x - 42$

$4 - 2x - 3x - 36 = 5x - 42$

$-32 - 5x = 5x - 42 \qquad | - 5x$

$-32 - 10x = -42 \qquad | + 32$

$-10x = -\ 10 \qquad | : (-10)$

$x = 1$

d) $10 \cdot (x + 3) + \frac{2 - 40x}{4} = 50\frac{1}{2} - \frac{5x + 20}{2} \qquad | \cdot 4$

$4 \cdot 10 \cdot (x + 3) + \frac{{}^{1}\cancel{4} \cdot (2 - 40x)}{\cancel{4}_{1}} = 4 \cdot 50{,}5 - \frac{{}^{2}\cancel{4} \cdot (5x + 20)}{\cancel{2}_{1}}$

$40 \cdot (x\ + 3) + (2 - 40x) = 202 - 2 \cdot (5x + 20)$

$40x + 120 + 2 - 40x = 202 - 10x - 40$

$122 = 162 - 10x \qquad | + 10x$

$10x + 122 = 162 \qquad | - 122$

$10x = 40 \qquad | : 10$

$x = 4$

e) $\frac{3}{4} \cdot (12x - 32) + \frac{20 - 4x}{8} = 9 - (4x - 7) \qquad | \cdot 8$

$\frac{{}^{2}\cancel{8} \cdot 3}{\cancel{4}_{1}} \cdot (12x - 32) + \frac{{}^{1}\cancel{8} \cdot (20 - 4x)}{\cancel{8}_{1}} = 8 \cdot 9 - 8 \cdot (4x - 7)$

$6 \cdot (12x - 32) + (20 - 4x) = 72 - 32x + 56$

$72x - 192 + 20 - 4x = 128 - 32x$

$68x - 172 = 128 - 32x \qquad | + 32x$

$100x - 172 = 128 \qquad | + 172$

$100x = 300 \qquad | : 100$

$x = 3$

f) $\frac{x}{2} - 4 \cdot (7 - x) = \frac{1}{5} \cdot (75 - 3x) + 8 \qquad | \cdot 10$

$\frac{{}^{5}\cancel{10} \cdot x}{\cancel{2}_{1}} - 10 \cdot 4 \cdot (7 - x) = \frac{{}^{2}\cancel{10} \cdot 1}{\cancel{5}_{1}} \cdot (75 - 3x) + 10 \cdot 8$

$5x - 40 \cdot (7 - x) = 2 \cdot (75 - 3x) + 80$

$5x - 280 + 40x = 150 - 6x + 80$

$45x - 280 = 230 - 6x \qquad | + 6x$

$51x - 280 = 230 \qquad | + 280$

$51x = 510 \qquad | : 51$

$x = 10$

Gleichungen aufstellen und lösen

L

Die Lernenden stellen nach Textvorgaben Gleichungen auf. Skizzen (Streifenmodelle) werden zur Findung des Gleichungsansatzes eingesetzt. Eine gegliederte, übersichtliche Darstellung kann von Anfang an Probleme beim Aufstellen und Lösen der Gleichungen reduzieren.

1 a)

Berufsfeld	Körperpflege, Hauswirtschaft	Metall, Maschinenbau	Lebensmittel, Getränke	Landwirtschaft, Natur
Anzahl Schüler	x	x + 12	(x + 12) : 2	4
Gesamtzahl Schüler	67			

b) Gleichung: $x + x + 12 + (x + 12) : 2 + 4 = 67$

$x + x + 12 + 0{,}5x + 6 + 4 = 67$

$2{,}5x + 22 = 67$

$\Rightarrow x = 18$

Anzahl Schüler:
Körperpflege, Hauswirtschaft: 18
Metall, Maschinenbau: 30
Lebensmittel, Getränke: 15

2 a) Beispiel:
Anzahl Stimmen Bauer: x

Kandidaten	Bauer	Plail	Uhlig	Andere
Anzahl Stimmen	x	x – 24	$\frac{1}{4}x$ (0,25x)	22
Gesamtzahl Stimmen	196			

Gleichung: $x + x - 24 + 0{,}25x + 22 = 196$

$2{,}25x - 2 = 196$

$\Rightarrow x = 88$

Anzahl Stimmen:
Bauer: 88
Plail: 64
Uhlig: 22

b) Beispiel:
Anzahl Kinder: x

Personen	Kinder	Jugendliche	Erwachsene
Anzahl Personen	x	2x – 40	(2x – 40) : 2
Gesamtzahl Personen	1 260		

Gleichung: $x + 2x - 40 + (2x - 40) : 2 = 1\,260$

$x + 2x - 40 + x - 20 = 1\,260$

$4x - 60 = 1\,260$

$\Rightarrow x = 330$

Anzahl Personen:
Kinder: 330
Jugendliche: 620
Erwachsene: 310

3

Preisklasse	A	B
Anzahl	5	8
Preis pro Karte	x	x – 3
Gesamtbetrag	119	

Gleichung:

$5x + 8 \cdot (x - 3) = 119$

$5x + 8x - 24 = 119$

$13x - 24 = 119$

$\Rightarrow x = 11$

Preis pro Karte:
Preisklasse A: 11 € Preisklasse B: 8 €

4 a) Beispiel:

Preis pro Karte Kategorie B: x

Preisklasse	A	B	C	D
Preis pro Karte	x + 5	x	x – 5	x : 4 (0,25x)
Anzahl Karten	50	80	100	75
Gesamtbetrag	4 725			

Gleichung: $50 \cdot (x + 5) + 80x + 100 \cdot (x - 5) + 75 \cdot 0{,}25x = 4\,725$

$$50x + 250 + 80x + 100x - 500 + 18{,}75x = 4\,725$$

$$248{,}75x - 250 = 4\,725$$

$$\Rightarrow x = 20$$

Preis pro Karte:

Kategorie A: 25 € Kategorie B: 20 € Kategorie C: 15 € Kategorie D: 5 €

b) Beispiel:

Anzahl Frauen: x

Personen	Frauen	Männer	Jugendliche
Anzahl Personen	x	2x	(x + 2x) : 2
Preis pro Person	35	35	20
Gesamtbetrag	1 350		

Gleichung: $35x + 35 \cdot 2x + 20 \cdot 1{,}5x = 1\,350$

$$35x + 70x + 30x = 1\,350$$

$$135x = 1\,350$$

$$\Rightarrow x = 10$$

Anzahl Personen:

Frauen: 10 Männer: 20 Jugendliche: 15

5 a)

Geschwindigkeitsüberschreitung	bis zu 10 $\frac{km}{h}$	mehr als 10 $\frac{km}{h}$, aber höchstens 30 $\frac{km}{h}$	mehr als 30 $\frac{km}{h}$	ohne Geschwindigkeitsüberschreitung
Anzahl der Autos	$\frac{1}{4}x$	$\frac{1}{5}x$	8	322
Autos insgesamt	x			

b) Gleichung: $\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + 8 + 322 = x$

$$0{,}25x + 0{,}2x + 8 + 322 = x$$

$$0{,}45x + 330 = x$$

$$\Rightarrow x = 600$$

Anzahl der Fahrzeuge mit Geschwindigkeitsmessung: 600

6 a)/b)

	Anzahl Räder
fehlerhafte Bremsen	$\frac{1}{3}x$
funktionsuntüchtige Beleuchtung	$\frac{1}{6}x$
nicht verkehrstauglich	6
ohne Mängel	180
insgesamt	x

Gleichung:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x + 6 + 180 = x$$

$$\frac{1}{2}x + 186 = x$$

$$\Rightarrow x = 372$$

Anzahl Räder: insgesamt: 372
Mängel Bremsen: 124
Mängel Beleuchtung: 62

7 Folgende Gleichungen passen zum Text: $2x + 6 + 7 = 3x + 8$
$2x + 6 = 3x + 8 - 7$

Da man auf der linken Gleichungsseite 7 weniger erhält, wird bei der Gleichung $2x + 6 + 7 = 3x + 8$ auf der linken Gleichungsseite 7 addiert.
Bei der Gleichung $2x + 6 = 3x + 8 - 7$ wird von der rechten Gleichungsseite 7 subtrahiert, da hier das Ergebnis um 7 größer ist als links.

8 a) $6x : 4 + 12 = 2\,(9 - x : 4)$
$1{,}5x + 12 = 18 - 0{,}5x$
$\Rightarrow x = 3$

b) $5x - (x - 4) = 2\,(x + 16)$
$5x - x + 4 = 2x + 32$
$4x + 4 = 2x + 32$
$\Rightarrow x = 14$

c) $(6x - 7) : 5 = 4\,(x : 2 - 13{,}75)$
$1{,}2x - 1{,}4 = 2x - 55$
$\Rightarrow x = 67$

d) $(x + 6) \cdot 3 \cdot 2 = (31 - 4x) \cdot 4$
$6x + 36 = 124 - 16x$
$\Rightarrow x = 4$

oder

$(x + 6) \cdot 3 = (31 - 4x) \cdot 4 : 2$
$3x + 18 = 62 - 8x$
$\Rightarrow x = 4$

e) $(5x + 9) \cdot 4 - 20 = (93 - 10x) : 2$
$20x + 36 - 20 = 46{,}5 - 5x$
$20x + 16 = 46{,}5 - 5x$
$\Rightarrow x = 1{,}22$

oder

$((5x + 9) \cdot 4 - 20)) \cdot 2 = 93 - 10x$
$40x + 72 - 40 = 93 - 10x$
$40x + 32 = 93 - 10x$
$\Rightarrow x = 1{,}22$

f) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{8}x + 6 = 1{,}5x$
$\frac{11}{8}x + 6 = \frac{12}{8}x$
$\Rightarrow x = 48$

oder

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{8}x = 1{,}5x - 6$
$\frac{11}{8}x = \frac{12}{8}x - 6$
$\Rightarrow x = 48$

L

1 Brüche $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{5}$

Brüche mit Variable im Zähler: $\frac{5x}{2}$ $\frac{x-5}{6}$

Brüche mit Variable im Nenner: $\frac{9}{x}$ $\frac{5 \cdot 6}{x-1}$ $\frac{9}{3-x}$ $\frac{7+3}{2x}$ $\frac{7}{x+4}$ $\frac{17}{3x+4}$ $\frac{14}{2(x-1)}$

2 a)

x	0	1	2	3	4	5
$\frac{1}{x}$	-E-	1	0,5	0,33…	0,25	0,2
$\frac{3}{x-2}$	–1,5	–3	-E-	3	1,5	1
$\frac{6}{4 \cdot (x-3)}$	–0,5	–0,75	–1,5	-E-	1,5	0,625
$\frac{32}{2(2x-8)}$	–2	–2,66…	–4	–8	-E-	8

b) Eine Division durch null liefert kein Ergebnis, die Division durch 0 ist unzulässig.

3 Da eine Division durch 0 unzulässig ist, muss zuerst der Definitionsbereich festgelegt werden. Das bedeutet, dass die Zahlen zuerst bestimmt werden, für die der Nenner 0 wird.

a) x = 0 D: alle Zahlen außer 0
b) x = 2 D: D: alle Zahlen außer 2
c) x = 14 D: alle Zahlen außer 14
d) x = 2 D: alle Zahlen außer 2
e) x = 1 D: alle Zahlen außer 1
f) x = 2 D: alle Zahlen außer 2

4 a) $\frac{27}{54x} = \frac{1}{2x}$ b) $\frac{2}{5x} = \frac{4}{10x}$ c) $\frac{18}{6x} = \frac{3}{x}$ d) $\frac{7}{5x} = \frac{28}{20x}$

e) $\frac{16}{4 \cdot (x+3)} = \frac{4}{x+3}$ f) $\frac{1}{(x-1)} = \frac{8}{8 \cdot (x-1)}$ g) $\frac{100}{25 \cdot (2x+8)} = \frac{4}{2x+8}$ h) $\frac{3}{x-2} = \frac{24}{8 \cdot (x-2)}$

5 a) $\frac{3}{8x} + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3}{24x} + \frac{8x \cdot 1}{24x} = \frac{9+8x}{24x}$

b) $\frac{4}{9x} - \frac{2}{3} = \frac{4}{9x} - \frac{3x \cdot 2}{3} = \frac{4-6x}{9x}$

c) $\frac{3}{5x} - \frac{3}{2x} = \frac{2 \cdot 3}{10x} - \frac{5 \cdot 3}{10x} = \frac{-9}{10x}$

d) $\frac{3}{4x} - \frac{1}{6x} = \frac{3 \cdot 3}{12x} - \frac{2 \cdot 1}{12x} = \frac{9-2}{12x} = \frac{7}{12x}$

e) $\frac{7}{9x} - \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 7}{18x} - \frac{3x \cdot 1}{18x} = \frac{14-3x}{18x}$

f) $\frac{7}{10} + \frac{3}{5x} = \frac{7 \cdot x}{10x} + \frac{2 \cdot 6}{10x} = \frac{7x+6}{10x}$

g) $\frac{3}{x-2} + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot (x-2)} + \frac{x-2}{2 \cdot (x-2)} = \frac{4+x}{2 \cdot (x-2)}$

h) $\frac{3}{4} - \frac{6}{2x+3} = \frac{3 \cdot (2x+3)}{4 \cdot (2x+3)} - \frac{24}{4 \cdot (2x+3)} = \frac{6x+9-24}{4 \cdot (2x+3)} = \frac{6x-15}{4 \cdot (2x+3)}$

i) $\frac{1}{x} + \frac{7}{2x} = \frac{2 \cdot 1}{2x} + \frac{7}{2x} = \frac{9}{2x}$

j) $\frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{1}{4x} + \frac{4 \cdot 3}{2x} = \frac{13}{4x}$

k) $\frac{x-4}{x+4} - 1 = \frac{x-4}{x+4} - \frac{x+4}{x+4} = \frac{-8}{x+4}$

l) $\frac{2}{x} - \frac{4}{x-12} = \frac{2 \cdot (x-12)}{x \cdot (x-12)} - \frac{4 \cdot x}{x \cdot (x-12)} = \frac{2x-24-4x}{x \cdot (x-12)} = \frac{-2x-24}{x \cdot (x-12)}$

Bei Gleichungen mit einer Variable im Nenner muss zunächst der Definitionsbereich festgelegt werden. Anschließend kann wie bei Brüchen gekürzt und erweitert werden.

L

Gleichungen mit einer Variablen im Nenner stellen eine weitere Steigerung des Schwierigkeitsgrades beim Lösen von Gleichungen dar. Durch Multiplikation aller Gleichungsglieder mit dem Hauptnenner und anschließendem Kürzen wird die Variable aus dem Nenner „befreit“. Nun kann die Gleichung gemäß den schon bekannten Umformungsschritten gelöst werden.

1 Nach der Bestimmung des Definitionsbereichs ermittelt man den Hauptnenner, indem man für alle in der Gleichung vorkommenden Brüche einen gemeinsamen Nenner bildet.
Mit diesem wird die Gleichung multipliziert, anschließend wird gekürzt.
In der 2. und 3. Lösungszeile können am ehesten Fehler unterlaufen:
In der 2. Zeile müssen alle Glieder der Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert, in der 3. Zeile muss gekürzt werden. So erhält man eine Gleichung mit ganzen Zahlen, die dann umgeformt wird.

2 a)

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} - \frac{7}{5} &= \frac{8}{x} - 3\frac{9}{10} \\ \frac{10\cancel{x}^1 \cdot 3}{\cancel{x}_1} - \frac{{}^2\cancel{10}x \cdot 7}{\cancel{5}_1} &= \frac{10\cancel{x}^1 \cdot 8}{\cancel{x}_1} - \frac{{}^1\cancel{10}x \cdot 39}{\cancel{10}_1} \\ 30 - 14x &= 80 - 39x \\ 30 + 25x &= 80 \\ 25x &= 50 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} - \frac{1}{3x} + 3 &= \frac{6 + 5x}{2x} \\ \frac{6\cancel{x}^1 \cdot 3}{\cancel{x}_1} - \frac{{}^2\cancel{6x} \cdot 1}{\cancel{3x}_1} + 6x \cdot 3 &= \frac{{}^3\cancel{6x}\,(6 + 5x)}{\cancel{2x}_1} \\ 18 - 2 + 18x &= 18 + 15x \\ 16 + 18x &= 18 + 15x \\ 3x &= 2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3 a) Die rechte Seite der Gleichung wurde nicht mit dem Hauptnenner multipliziert.

$$\begin{aligned} \frac{12}{8} + \frac{5}{x} &= 4 && |\cdot 8x \\ \frac{{}^1\cancel{8}x \cdot 12}{\cancel{8}_1} + \frac{8\cancel{x}^1 \cdot 5}{\cancel{x}_1} &= 8x \cdot 4 \\ 12x + 40 &= 32x && |-12x \\ 40 &= 20x && |:20 \\ 2 &= x && L = \{2\} \end{aligned}$$

b) Es wurde nicht korrekt gekürzt.

$$\begin{aligned} \frac{4}{x} + \frac{2}{5x} &= \frac{9}{3x} - 7 && |\cdot 15x \\ \frac{15\cancel{x}^1 \cdot 4}{\cancel{x}_1} + \frac{{}^3\cancel{15x} \cdot 2}{\cancel{5x}_1} &= \frac{{}^5\cancel{15x} \cdot 9}{\cancel{3x}_1} - 15x \cdot 7 \\ 60 + 6 &= 45 - 105x \\ 66 &= 45 - 105x && |-45 \\ 21 &= -105x && |:(-105) \\ -0{,}2 &= x && L = \{-0{,}2\} \end{aligned}$$

c) Es wurde nicht korrekt gekürzt.

$$\begin{aligned} \frac{2}{8x} - \frac{8}{2} + \frac{4}{x} &= 6 + \frac{1}{x} && |\cdot 8x \\ \frac{{}^1\cancel{8x} \cdot 2}{\cancel{8x}_1} - \frac{{}^4\cancel{8}x \cdot 8}{\cancel{2}_1} + \frac{8\cancel{x}^1 \cdot 4}{\cancel{x}_1} &= 8x \cdot 6 + \frac{8\cancel{x}^1 \cdot 1}{\cancel{x}_1} \\ 2 - 32x + 32 &= 48x + 8 \\ 34 - 32x &= 48x + 8 && |+32x \\ 34 &= 80x + 8 && |-8 \\ 26 &= 80x && |:80 \\ 0{,}325 &= x && L = \{0{,}325 \end{aligned}$$

4 a)

$$\begin{aligned} \frac{40}{x} + \frac{3}{4} &= \frac{11}{12} && |\cdot 12x \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ \frac{12\cancel{x}^1 \cdot 40}{\cancel{x}_1} + \frac{{}^3\cancel{12}x \cdot 3}{\cancel{4}_1} &= \frac{{}^1\cancel{12}x \cdot 11}{\cancel{12}_1} \\ 480 + 9x &= 11x \\ \Rightarrow x &= 240 && L = \{240\} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{5}{2x} - \frac{5}{6} &= \frac{2}{x} && |\cdot 6x \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ \frac{6x \cdot 5}{2x} - \frac{6x \cdot 5}{6} &= \frac{6x \cdot 2}{x} \\ 15 - 5x &= 12 \\ \Rightarrow x &= 0{,}6 && L = \{0{,}6\} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{6}{x} + 4 &= \frac{4{,}5}{x} + 9 && |\cdot x \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ \frac{x \cdot 6}{x} + x \cdot 4 &= \frac{x \cdot 4{,}5}{x} + x \cdot 9 \\ 6 + 4x &= 4{,}5 + 9x \\ \Rightarrow x &= 0{,}3 && L = \{0{,}3\} \end{aligned}$$

d) $2 + \frac{8}{x} = \frac{1}{x} + 3{,}75 \quad | \cdot x \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$x \cdot 2 + \frac{x \cdot 8}{x} = \frac{x \cdot 1}{x} + x \cdot 3{,}75$

$2x + 8 = 1 + 3{,}75x$

$\Rightarrow x = 4 \qquad L = \{4\}$

e) $\frac{3}{5x} + \frac{9}{10x} = \frac{13}{8x} - \frac{1}{8} \quad | \cdot 40x \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{40x \cdot 3}{5x} + \frac{40x \cdot 9}{10x} = \frac{40x \cdot 13}{8x} - \frac{40x \cdot 1}{8}$

$24x + 36 = 65 - 5x$

$\Rightarrow x = 1 \qquad L = \{1\}$

f) $\frac{4}{3x} - \frac{5}{4x} = \frac{5}{6x} - \frac{3}{8} \quad | \cdot 24x \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{24x \cdot 4}{3x} - \frac{24x \cdot 5}{4x} = \frac{24x \cdot 5}{6x} - \frac{24x \cdot 3}{8}$

$32 - 30 = 20 - 9x$

$\Rightarrow x = 2 \qquad L = \{2\}$

g) $\frac{23}{x} + 25 = 5\left(\frac{4}{x} + 8\right) \quad | \cdot x \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{x \cdot 23}{x} + x \cdot 25 = x \cdot 5\left(\frac{4}{x} + 8\right)$

$23 + 25x = 20 + 40x$

$\Rightarrow x = 0{,}2 \qquad L = \{0{,}2\}$

h) $\frac{7{,}5}{9x} - \frac{2}{3x} - \frac{1}{6} = -\frac{5}{6x} - \frac{11}{12x} \quad | \cdot 36x \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{36x \cdot 7{,}5}{9x} - \frac{36x \cdot 2}{3x} - \frac{36x \cdot 1}{6} = -\frac{36x \cdot 5}{6x} - \frac{36x \cdot 11}{12x}$

$30 - 24 - 6x = 30 - 33$

$6 - 6x = -3$

$\Rightarrow x = 1{,}5 \qquad L = \{1{,}5\}$

i) $\frac{7}{x} + \frac{8}{x} - 1 = \frac{1}{2} - 6\left(\frac{2}{x} - 2\right) \quad | \cdot 2x \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{2\cancel{x}^{1} \cdot 7}{\cancel{x}_1} + \frac{2\cancel{x}^{1} \cdot 8}{\cancel{x}_1} - 2x \cdot 1 = \frac{{}^{1}\cancel{2}x \cdot 1}{\cancel{2}_1} - 2x \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{x} - 2\right)$

$14 + 16 - 2x = x - 24 + 24x$

$30 - 2x = 25x - 24$

$\Rightarrow x = 2 \qquad L = \{2\}$

5 a) $\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}\right) = 1 \quad | \cdot 12x \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{{}^{2}\cancel{12}x \cdot 1}{\cancel{6}_1} - \frac{12x \cdot 2}{3}\left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}\right) = 12x \cdot 1$

$2x - 2 + 4 + 2x = 12x$

$4x + 2 = 12x$

$\Rightarrow x = 0{,}25 \qquad L = \{0{,}25\}$

b) $\frac{49}{x} - 7\left(\frac{4}{x} - \frac{2}{3}\right) = \frac{63}{x} \cdot 2 - 10\frac{1}{3} \quad | \cdot 3x \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{3\cancel{x}^{1} \cdot 49}{\cancel{x}_1} - 3x \cdot 7\left(\frac{4}{x} - \frac{2}{3}\right) = \frac{3\cancel{x}^{1} \cdot 63}{\cancel{x}_1} \cdot 2 - {}^{1}\cancel{3}x \cdot \frac{31}{\cancel{3}_1} \quad | \cdot 3x$

$147 - 84 + 14x = 378 - 31x$

$63 + 14x = 378 - 31x$

$\Rightarrow x = 7 \qquad L = \{7\}$

c) $28 - 2\left(\frac{9}{x} + 4\right) = \frac{28 + 4}{2x} + \frac{94}{x} - 12 \quad | \cdot x \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$x \cdot 28 - x \cdot 2\left(\frac{9}{x} + 4\right) = \frac{{}^{16}\cancel{x \cdot 32}}{\cancel{2x}_1} + \frac{\cancel{x}^{1} \cdot 94}{\cancel{x}_1} - x \cdot 12$

$28x - 18 - 8x = 16 + 94 - 12x$

$20x - 18 = 110 - 12x$

$\Rightarrow x = 4 \qquad L = \{4\}$

d) $$\frac{9}{x} - 2\frac{2}{5} - \frac{3}{2}\left(\frac{9}{x} - 3\right) = \frac{6}{x} \qquad | \cdot 10x \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$\frac{10\cancel{x}^{1} \cdot 9}{\cancel{x}_1} - \cancel{10}^{2}x \cdot \frac{12}{\cancel{5}_1} - \frac{\cancel{10}^{5}x \cdot 3}{\cancel{2}_1}\left(\frac{9}{x} - 3\right) = \frac{10\cancel{x}^{1} \cdot 6}{\cancel{x}_1}$$

$$90 - 24x - 135 + 45x = 60$$

$$-45 + 21x = 60$$

$$\Rightarrow x = 5 \qquad L = \{5\}$$

L

Lösungen der beiden Beispielaufgaben:

$\frac{44}{x-1} = 4 \quad | \cdot (x-1)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$

$\frac{44 \cdot \cancel{(x-1)}^1}{\cancel{x-1}_1} = (x-1) \cdot 4$

$44 = (x-1) \cdot 4$

$44 = 4x - 4$

$\Rightarrow x = 12 \qquad L = \{12\}$

$\frac{1}{4 \cdot (x-5)} = \frac{1}{4} \quad | \, 4 \cdot (x-5)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{5\}$

$\frac{4 \cdot (x-5)}{4 \cdot (x-5)} = \frac{4 \cdot (x-5)}{4}$

$1 = x - 5$

$\Rightarrow x = 6 \qquad L = \{6\}$

1 a) $\frac{36}{x+2} = 9 \quad | \cdot (x+2)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$

$\frac{{}^1\cancel{(x+2)} \cdot 36}{\cancel{x+2}_1} = (x+2) \cdot 9$

$36 = 9x + 18$

$\Rightarrow 2 = x \qquad L = \{2\}$

b) $7 = \frac{91}{2x-1} \quad | \cdot (2x-1)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0{,}5\}$

$(2x-1) \cdot 7 = \frac{{}^1\cancel{(2x-1)} \cdot 91}{\cancel{2x-1}_1}$

$14x - 7 = 91$

$\Rightarrow x = 7 \qquad L = \{7\}$

c) $\frac{12}{x-1} = 8 \quad | \cdot (x-1)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$

$\frac{(x-1) \cdot 12}{x-1} = 8$

$12 = (x-1) \cdot 8$

$12 = 8x - 8$

$\Rightarrow 2{,}5 = x \qquad L = \{2{,}5\}$

d) $\frac{-70}{x-5} = 7 \quad | \cdot (x-5)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{5\}$

$\frac{(x-5) \cdot (-70)}{x-5} = (x-5) \cdot 7$

$-70 = 7x - 35$

$\Rightarrow -5 = x \qquad L = \{-5\}$

e) $24 = \frac{12}{x-1} \quad | \cdot (x-1)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$

$(x-1) \cdot 24 = \frac{{}^1\cancel{(x-1)} \cdot 12}{\cancel{x-1}_1}$

$24x - 24 = 12$

$\Rightarrow x = 1{,}5 \qquad L = \{1{,}5\}$

f) $\frac{1}{4-3x} = \frac{1}{13} \quad | \cdot (4-3x) \cdot 13$

$D = \mathbb{Q} \setminus \left\{1\frac{1}{3}\right\}$

$\frac{(4-3x) \cdot 13 \cdot 1}{4-3x} = \frac{(4-3x) \cdot 13 \cdot 1}{13}$

$3 = 4 - 3x$

$\Rightarrow x = -3 \qquad L = \{-3\}$

g) $\frac{1}{4x-20} = \frac{1}{4} \quad | \cdot 4 \cdot (4x-20)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{5\}$

$\frac{4 \cdot \cancel{(4x-20)}^1 \cdot 1}{\cancel{4x-20}_1} = \frac{{}^1\cancel{4} \cdot (4x-20) \cdot 1}{\cancel{4}_1}$

$4 = 4x - 20$

$\Rightarrow 6 = x \qquad L = \{6\}$

h) $\frac{2}{3} = \frac{7}{3x-1{,}5} \quad | \cdot 3 \cdot (3x-1{,}5)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$\frac{{}^1\cancel{3} \cdot (3x-1{,}5) \cdot 2}{\cancel{3}_1} = \frac{3 \cdot \cancel{(3x-1{,}5)}^1 \cdot 7}{\cancel{3x-1{,}5}_1}$

$6x - 3 = 21$

$\Rightarrow x = 4 \qquad L = \{4\}$

2 Lösungsweg 1: ...

$2x - 2 = x + 1$

$\Rightarrow x = 3$

Lösungsweg 1: Es wird mit dem Hauptnenner multipliziert, anschließend gekürzt.
Lösungsweg 2: Es wird über Kreuz multipliziert. Er ist kürzer und weniger zeitaufwendig.
Die 3. Zeile des Lösungswegs 1 stimmt mit der 2. Zeile des Lösungswegs 2 überein.

Gleichungen mit einer Variablen im Nenner stellen eine weitere Steigerung des Schwierigkeitsgrades beim Lösen von Gleichungen dar. Durch Multiplikation aller Gleichungsglieder mit dem Hauptnenner und anschließendem Kürzen wird die Variable aus dem Nenner „befreit“. Nun kann die Gleichung gemäß den schon bekannten Umformungsschritten gelöst werden.

3 a) $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x+2} \quad | \cdot (x+1)\cdot(x+2)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; -2\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{(x+1)}\cdot(x+2)\cdot 2}{\cancel{x+1}_{1}} = \frac{(x+1)\cdot\cancel{(x+2)}^{1}\cdot 3}{\cancel{x+2}_{1}}$

$(x+2)\cdot 2 = (x+1)\cdot 3$

$2x + 4 = 3x + 3$

$\Rightarrow x = 1$

$L = \{1\}$

oder $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x+2}$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; -2\}$

$(x+2)\cdot 2 = (x+1)\cdot 3$

$2x + 4 = 3x + 3$

$\Rightarrow x = 1$

$L = \{1\}$

b) $\frac{16}{3x-4} = \frac{22}{2x+3} \quad | \cdot (3x-4)\cdot(2x+3)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{4}{3}; -\frac{3}{2}\right\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{(3x-4)}\cdot(2x+3)\cdot 16}{\cancel{3x-4}_{1}} = \frac{(3x-4)\cdot\cancel{(2x+3)}^{1}\cdot 22}{\cancel{2x+3}_{1}}$

$32x + 48 = 66x - 88$

$\Rightarrow x = 4$

$L = \{4\}$

oder $\frac{16}{3x-4} = \frac{22}{2x+3}$

$D = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{4}{3}; -\frac{3}{2}\right\}$

$32x + 48 = 66x - 88$

$\Rightarrow x = 4$

$L = \{1\}$

c) $\frac{4}{x+1} = \frac{10}{x+4} \quad | \cdot (x+1)\cdot(x+4)$

$\frac{{}^{1}\cancel{(x+1)}\cdot(x+4)\cdot 4}{\cancel{x+1}_{1}} = \frac{(x+1)\cdot\cancel{(x+4)}^{1}\cdot 10}{\cancel{x+4}_{1}}$

$4x + 16 = 10x + 10$

$\Rightarrow x = 1$

$L = \{1\}$

oder Wie die beiden ersten Beispiele zeigen, stimmt die 3. Zeile des Lösungswegs 1 mit der 2. Zeile des Lösungswegs 2 überein. Deshalb wird weiterhin nur der 1. Lösungsweg ausführlich dargestellt.

d) $\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{x} \quad | \cdot (2x+1)\cdot x$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-0{,}5; 0\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{(2x+1)}\cdot x\cdot 1}{\cancel{2x+1}_{1}} = \frac{(2x+1)\cdot\cancel{x}^{1}\cdot 1}{\cancel{x}_{1}}$

$x = 2x + 1$

$\Rightarrow x = -1$

$L = \{-1\}$

e) $\frac{x+3}{2x-7} = \frac{3}{2} \quad | \cdot (2x-7)\cdot 2$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{3{,}5\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{(2x-7)}\cdot 2\cdot(x+3)}{\cancel{2x-7}_{1}} = \frac{(2x-7)\cdot\cancel{2}^{1}\cdot 3}{\cancel{2}_{1}}$

$2x + 6 = 6x - 21$

$\Rightarrow x = 6{,}75$

$L = \{6{,}75\}$

f) $\frac{30}{5x-11} = \frac{5}{3x-17} \quad | \cdot (5x-11)\cdot(3x-17)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \left\{2{,}2; \frac{52}{3}\right\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{(5x-11)}\cdot(3x-17)\cdot 30}{\cancel{5x-11}_{1}} = \frac{(5x-11)\cdot\cancel{(3x-17)}^{1}\cdot 5}{\cancel{3x-17}_{1}}$

$90x - 510 = 25x - 55$

$\Rightarrow x = 7$

$L = \{7\}$

g) $\frac{2}{2-3x} = \frac{-4}{1-2x} \quad | \cdot (2-3x)\cdot(1-2x)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{2}{3}; 0{,}5\right\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{(2-3x)}\cdot(1-2x)\cdot 2}{\cancel{2-3x}_{1}} = \frac{(2-3x)\cdot\cancel{(1-2x)}^{1}\cdot(-4)}{\cancel{1-2x}_{1}}$

$2 - 4x = -8 + 12x$

$\Rightarrow x = 0{,}625$

$L = \{0{,}625\}$

h) $\frac{4}{x+1} = \frac{1}{2x-5} \quad | \cdot (x+1)\cdot(2x-5)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 2{,}5\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{(x+1)}\cdot(2x-5)\cdot 4}{\cancel{x+1}_{1}} = \frac{(x+1)\cdot\cancel{(2x-5)}^{1}\cdot 1}{\cancel{2x-5}_{1}}$

$8x - 20 = x + 1$

$\Rightarrow x = 3 \qquad L = \{3\}$

i) $\frac{10}{x-2} = \frac{7}{x-5} \quad | \cdot (x-2)\cdot(x-5)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{2; 5\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{(x-2)}\cdot(x-5)\cdot 10}{\cancel{x-2}_{1}} = \frac{(x-2)\cdot\cancel{(x-5)}^{1}\cdot 7}{\cancel{x-5}_{1}}$

$10x - 50 = 7x - 14$

$\Rightarrow x = 12$

$L = \{12\}$

j) $\frac{11}{x+1} + \frac{3}{7-x} = 0 \quad | \cdot (x+1)\cdot(7-x)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 7\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{(x+1)}\cdot(7-x)\cdot 11}{\cancel{(x+1)}_{1}} + \frac{(x+1)\cdot\cancel{(7-x)}^{1}\cdot 3}{\cancel{7-x}_{1}} = 0$

$77 - 11x + 3x + 3 = 0$

$80 - 8x = 0$

$\Rightarrow x = 10$

$L = \{10\}$

k) $\frac{1}{x+5} - \frac{1}{3x-5} = 0 \quad | \cdot (x+5)\cdot(3x-5)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \left\{-5; 1\frac{2}{3}\right\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{(x+5)}\cdot(3x-5)\cdot 1}{\cancel{x+5}_{1}} - \frac{(x+5)\cdot\cancel{(3x-5)}^{1}\cdot 1}{\cancel{3x-5}_{1}} = 0$

$3x - 5 - x - 5 = 0$

$2x - 10 = 0$

$\Rightarrow x = 5$

$L = \{5\}$

l) $\frac{10}{x+3} - \frac{1}{x-6} = 0 \quad | \cdot (x+3) \cdot (x-6)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 6\}$

$$\frac{{}^{1}\cancel{(x+3)} \cdot (x-6) \cdot 10}{\cancel{x+3}_{1}} - \frac{(x+3) \cdot \cancel{(x-6)}^{1} \cdot 1}{\cancel{x-6}_{1}} = 0$$

$$10x - 60 - x - 3 = 0$$

$$9x - 63 = 0$$

$$\Rightarrow x = 7$$

$$L = \{7\}$$

4 a) $\frac{2}{x} = 1 \quad | \cdot x$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{x} \cdot 2}{\cancel{x}_{1}} = x \cdot 1$

$\Rightarrow x = 2$

$L = \{2\}$

b) $0 = \frac{1}{x-3} \quad | \cdot (x-3)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$

$(x-3) \cdot 0 = \frac{{}^{1}\cancel{(x-3)} \cdot 1}{\cancel{x-3}_{1}}$

$\Rightarrow 0 = 1$

$\Rightarrow$ keine Lösung

c) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x} = 0 \quad | \cdot x$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{x} \cdot 1}{\cancel{x}_{1}} - \frac{{}^{1}\cancel{x} \cdot 2}{\cancel{x}_{1}} = x \cdot 0$

$1 - 2 = 0$

$\Rightarrow$ keine Lösung

d) $\frac{7}{x} + \frac{-6}{x} = 0 \quad | \cdot x$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{x} \cdot 7}{\cancel{x}_{1}} + \frac{{}^{1}\cancel{x} \cdot (-6)}{\cancel{x}_{1}} = x \cdot 0$

$7 - 6 = 0$

$\Rightarrow$ keine Lösung

e) $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = 0 \quad | \cdot 2x$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{2\cancel{x}^{1} \cdot 1}{\cancel{x}_{1}} - \frac{{}^{1}\cancel{2x} \cdot 1}{\cancel{2x}_{1}} = 2x \cdot 0$

$2 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ keine Lösung

f) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{18} = \frac{3}{6x} \quad | \cdot 18x$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{{}^{9}\cancel{18x} \cdot 1}{\cancel{2x}_{1}} - \frac{{}^{1}\cancel{18}x \cdot 1}{\cancel{18}_{1}} = \frac{{}^{3}\cancel{18x} \cdot 3}{\cancel{6x}_{1}}$

$9 - x = 9$

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ keine Lösung, da im Definitionsbereich 0 als Lösung ausgeschlossen ist.

5 Beispiele

a) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$:	$\frac{7}{x} + \frac{14}{x} = 21$	$\frac{6}{2x} - \frac{1}{x} = 1$	$\frac{12}{3x} - \frac{4}{2x} = 1$
b) $\mathbb{Q} \setminus \{-9\}$:	$\frac{2}{x-9} = 1$	$\frac{2}{x-9} = 18$	$\frac{10}{x-9} = -1$
c) $\mathbb{Q} \setminus \{0; 3\}$:	$\frac{2}{x} + \frac{1}{x-3} = 1{,}5$	$\frac{4}{x-3} + \frac{1}{x} = -3$	$\frac{8}{x} - \frac{4}{x-3} = -2$
d) $\mathbb{Q} \setminus \{-5; 5\}$:	$\frac{12}{x+5} = \frac{-8}{x-5}$	$\frac{9}{x+5} = \frac{-4}{x-5}$	$\frac{20}{x-5} = \frac{60}{x+5}$
e) $\mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$:	$\frac{7}{x+1} + \frac{5}{x-1} = 2$	$\frac{6}{x+1} + \frac{2}{x-1} = 1{,}4$	$\frac{8}{x-1} = \frac{14}{x+1}$
f) $\mathbb{Q} \setminus \{1; 8\}$:	$\frac{7}{x-1} + \frac{-42}{x-8} = 14$	$\frac{7}{x-1} - \frac{-42}{x-8} = 0$	$\frac{2}{x-1} + \frac{-12}{x-8} = 4$
g) $\mathbb{Q} \setminus \{0; 1\}$:	$\frac{7}{x} + \frac{12}{x-1} = 3$	$\frac{20}{x} = \frac{18}{x-1}$	$\frac{25}{x} - \frac{12}{x-1} = 2$
h) $\mathbb{Q} \setminus \{-3; -1\}$:	$\frac{7}{x+3} + \frac{15}{x+1} = 4$	$\frac{-24}{x+3} = \frac{-20}{x+1}$	$\frac{27}{x+3} - \frac{21}{x+1} = 0$

Auf dieser Seite geht es nun darum, Gleichungen mit einer Variablen im Nenner zunächst aufzustellen und dann zu lösen.

L

1 a) Ⓐ → ② Ⓑ → ③ Ⓒ → ④ Ⓓ → ①

b) ① $\frac{8}{x+9} = 3 \quad | \cdot (x+9)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-9\}$

$\frac{{}^1\cancel{(x+9)} \cdot 8}{\cancel{x+9}_1} = (x+9) \cdot 3$

$8 = 3x + 27$

$\Rightarrow x = -6\frac{1}{3} \quad L = \left\{-6\frac{1}{3}\right\}$

② $\frac{8}{x} - 3 = 9 \quad | \cdot x$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{{}^1\cancel{x} \cdot 8}{\cancel{x}_1} - x \cdot 3 = x \cdot 9$

$8 - 3x = 9x$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \quad L = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

③ $\frac{9}{8-x} = 3 \quad | \cdot (8-x)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{8\}$

$\frac{{}^1\cancel{(8-x)} \cdot 9}{\cancel{8-x}_1} = (8-x) \cdot 3$

$9 = 24 - 3x$

$\Rightarrow 5 = x \quad L = \{5\}$

④ $\frac{9}{x} + 3 = 8 \quad | \cdot x$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{{}^1\cancel{x} \cdot 9}{\cancel{x}_1} + x \cdot 3 = x \cdot 8$

$9 + 3x = 8x$

$\Rightarrow 1{,}8 = x \quad L = \{1{,}8\}$

2 a) Gleichung Ⓓ $\frac{x-9}{3x-2} = -8$ passt zum Text.

b) $D = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$

$\frac{{}^1\cancel{(3x-2)} \cdot (x-9)}{\cancel{3x-2}_1} = (3x-2) \cdot (-8) \quad | \cdot (3x-2)$

$x - 9 = -24x + 16$

$\Rightarrow x = 1 \quad L = \{1\}$

c) Ⓐ $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$

$\frac{2x-9}{3+x} = -8$

$2x - 9 = -8 \cdot (3 + x)$

$2x - 9 = -24 - 8x$

$\Rightarrow x = -1{,}5 \quad L = \{-1{,}5\}$

b) Ⓑ $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$

$\frac{2}{x+3} - 9 = -8 \quad | \cdot (x+3)$

$\frac{{}^1\cancel{(x+3)} \cdot 2}{\cancel{x+3}_1} - x + 3 \cdot 9 = (x+3) \cdot (-8)$

$2 - 9x - 27 = -8x - 24$

$-25 - 9x = -8x - 24$

$\Rightarrow x = -1 \quad L = \{-1\}$

Ⓒ $D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$

$\frac{9+3x}{2-x} = -8$

$(9 + 3x) \cdot 1 = (-8) \cdot (2 - x)$

$9 + 3x = -16 + 8x$

$\Rightarrow x = 5 \quad L = \{5\}$

d) Textbeispiele:

Ⓐ Bilde die Differenz aus dem Doppelten einer Zahl und 9 und teile sie durch die Summe aus 3 und der gesuchten Zahl. Man erhält als Ergebnis –8.

Ⓑ Dividiere 2 durch die Summe aus einer Zahl und 3 und ziehe davon 9 ab. Das Ergebnis ist –8.

Ⓒ Die Summe aus 9 und dem Dreifachen einer Zahl wird durch die Differenz aus 2 und der gesuchten Zahl geteilt. Man erhält als Ergebnis –8.

3 Ⓐ $\frac{20}{x} - 2 = 6 + \frac{4}{x}$ $\quad | \cdot x$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{x} \cdot 20}{\cancel{x}_1} - x \cdot 2 = x \cdot 6 + \frac{{}^{1}\cancel{x} \cdot 4}{\cancel{x}_1}$

$20 - 2x = 6x + 4$

$\Rightarrow x = 2$ $\quad L = \{2\}$

Ⓑ $\frac{18}{x} - 6 = \frac{12}{x}$ $\quad | \cdot x$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{x} \cdot 18}{\cancel{x}_1} - x \cdot 6 = \frac{{}^{1}\cancel{x} \cdot 12}{\cancel{x}_1}$

$18 - 6x = 12$

$\Rightarrow x = 1$ $\quad L = \{1\}$

Ⓒ $\frac{5}{x} + \frac{6}{x} + \frac{17}{x} + \frac{21}{x} = 98$ $\quad | \cdot x$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{{}^{1}\cancel{x} \cdot 5}{\cancel{x}_1} + \frac{{}^{1}\cancel{x} \cdot 6}{\cancel{x}_1} + \frac{{}^{1}\cancel{x} \cdot 17}{\cancel{x}_1} + \frac{{}^{1}\cancel{x} \cdot 21}{\cancel{x}_1} = 98$

$5 + 6 + 17 + 21 = 98x$

$49 = 98x$

$\Rightarrow 0{,}5 = x$ $\quad L = \{0{,}5\}$

4 a) $\frac{24}{x} = \frac{28}{x + 1}$ $\quad D = \mathbb{Q} \setminus \{0; -1\}$

$24 \cdot (x + 1) = 28 \cdot x$

$24x + 24 = 28x$

$\Rightarrow x = 6$ $\quad L = \{6\}$

b) $\frac{-0{,}8 + 4}{4x} = -4$ $\quad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$(-0{,}8 + 4) \cdot 1 = -4 \cdot 4x$

$3{,}2 = -16x$

$\Rightarrow -0{,}2 = x$ $\quad L = \{0{,}2\}$

c) $\frac{6}{9 - x} = \frac{12}{3 - x}$ $\quad D = \mathbb{Q} \setminus \{9; 3\}$

$6 \cdot (3 - x) = 12 \cdot (9 - x)$

$18 - 6x = 108 - 12x$

$\Rightarrow x = 15$ $\quad L = \{15\}$

d) $\frac{17 - x}{18 + x} = \frac{2}{3}$ $\quad D = \mathbb{Q} \setminus \{18\}$

$(17 - x) \cdot 3 = 2 \cdot (18 + x)$

$51 - 3x = 36 + 2x$

$\Rightarrow x = 3$ $\quad L = \{15\}$

e) $\frac{x + 12}{x + 2 + 6} = \frac{x}{x + 2}$ $\quad D = \mathbb{Q} \setminus \{-8; -2\}$

$(x + 12) \cdot (x + 2) = x \cdot (x + 8)$

$x^2 + 2x + 12x + 24 = x^2 + 8x$ $\quad | - x^2$

$14x + 24 = 8x$

$\Rightarrow x = -4$ $\quad L = \{-4\}$

Mit Formeln aus der Geometrie rechnen

Formeln und der Umgang damit sind Schwerpunkte der folgenden Seiten. Formeln (allgemeingültige Gleichungen) werden nach den Regeln des Gleichungslösens bearbeitet. Sinnvoll ist es, in den Formeln ohne Maßeinheiten zu rechnen. Erst die ermittelten Zahlenwerte sind mit den richtigen Einheiten zu versehen und dann in den Sachzusammenhang einzuordnen.

L

1 a/b) Umfang eines Rechtecks: $u = 2 \cdot (a + b)$
u (Umfang); a (Länge); b (Breite)

Umfang eines Quadrats: $u = 4 \cdot a$
u (Umfang); a (Quadratseite)

Volumen eines Prismas: $V = G \cdot h_K$
V (Volumen); G (Grundfläche); h_K (Körperhöhe)

Dreiecksfläche: $A = \frac{g \cdot h}{2}$
A (Flächeninhalt); g (Grundseite); h (Höhe)

Quadratfläche: $A = a \cdot a$
A (Flächeninhalt); a (Quadratseite)

Volumen eines Quaders: $V = a \cdot b \cdot c$
V (Volumen); a (Länge); b (Breite); c (Höhe)

Volumen eines Würfels: $V = a \cdot a \cdot a$
V (Volumen); a (Kantenlänge)

Rechtecksfläche: $A = a \cdot b$
A (Flächeninhalt); a (Länge); b (Breite)

Winkelsumme im Dreieck: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
α, β, γ (Winkel im Dreieck)

Fläche eines Parallelogramms: $A = a \cdot h$
A (Flächeninhalt); a (Grundseite); h (Höhe)

Trapezfläche: $A = \frac{a \cdot c}{2} \cdot h$
A (Flächeninhalt); a und c (paralleles Seitenpaar); h (Höhe)

Fläche eines Drachen: $A = \frac{e \cdot f}{2}$
A (Flächeninhalt); e und f (Diagonale)

2 a)
$$A = a \cdot h$$
$$50{,}7 = a \cdot 6{,}5 \quad | : 6{,}5$$
$$7{,}8 = a$$

Die Länge der Grundseite des Parallelogramms beträgt 7,8 cm.

b) Ⓐ Kreisradius: r

$$A_K = r \cdot r \cdot 3{,}14$$
$$1\,256 = r \cdot r \cdot 3{,}14$$
$$\Rightarrow 20 = r$$

Kreisradius: 20 cm

Ⓑ Grundseite Dreieck: g

$$A_D = \frac{g \cdot h}{2}$$
$$1\,256 = \frac{g \cdot 32}{2}$$
$$\Rightarrow 78{,}5 = g$$

Grundseite Dreieck: 78,5 cm

Ⓒ Höhe Trapez: h

$$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$$
$$1\,256 = \frac{50 + 30}{2} \cdot h$$
$$\Rightarrow 31{,}4 = h$$

Höhe Trapez: 31,4 cm

Ⓓ Diagonale Drachen: f

$$A = \frac{e \cdot f}{2}$$
$$1\,256 = \frac{64 \cdot f}{2}$$
$$\Rightarrow 39{,}25 = f$$

Länge Diagonale f: 39,25 cm

3 a) Parallele Seite: c

$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$

$24 = \frac{6 + c}{2} \cdot 6$

$\Rightarrow 2 = c$

Länge parallele Seite c: 2 cm

b) $A = \frac{e \cdot f}{2}$

$128 = \frac{32 \cdot f}{2}$

$\Rightarrow 8 = f$

Länge Diagonale f: 8cm

c) $u_D = 3 \cdot s$ $\quad A_D = \frac{g \cdot h}{2}$

$36 = 3 \cdot s$ $\quad A_D = \frac{12 \cdot 10{,}4}{2}$

$\Rightarrow 12 = s$ $\quad A_D = 62{,}4$

Flächeninhalt Dreieck: 62,4 cm^2

d) $u_R = 2 \cdot (a + b)$ $\quad A_R = a \cdot b$

$40 = 2 \cdot (a + 6)$ $\quad A_R = 14 \cdot 6$

$\Rightarrow 14 = a$ $\quad A_R = 84$

Flächeninhalt Rechteck: 84 cm^2

4 Beispiel:

$A = A_{Qu} - A_K$

$A = a \cdot a - r \cdot r \cdot 3{,}14$

$A = 12 \cdot 12 - 6 \cdot 6 \cdot 3{,}14$

$A = 144 - 113{,}04$

$A = 30{,}96$

Flächeninhalt farbige Fläche: 30,96 cm^2

a) $A = A_{Qu} - A_K$

$A = a \cdot a - r \cdot r \cdot 3{,}14$

$A = 6 \cdot 6 - 3 \cdot 3 \cdot 3{,}14$

$A = 36 - 28{,}26$

$A = 7{,}74$

Flächeninhalt farbige Fläche: 7,74 cm^2

b) $A = A_{Qu} - 4 \cdot A_D$

$A = a \cdot a - 4 \cdot \frac{g \cdot h}{2}$

$A = 18 \cdot 18 - 4 \cdot \frac{9 \cdot 9}{2}$

$A = 324 - 162$

$A = 162$

Flächeninhalt farbige Fläche: 162 cm^2

c) $A = A_{Qu} - A_K : 2 - A_D$

$A = a \cdot a - r \cdot r \cdot 3{,}14 : 2 - \frac{g \cdot h}{2}$

$A = 9 \cdot 9 - 4{,}5 \cdot 4{,}5 \cdot 3{,}14 : 2 - \frac{9 \cdot 4{,}5}{2}$

$A = 81 - 31{,}7925 - 20{,}25$

$A = 28{,}9575$

Flächeninhalt farbige Fläche: 28,9575 cm^2

5 Der Lösungsablauf entspricht dem Ablaufschema auf der vorherigen Seite. In die Formel werden die bekannten Größen eingesetzt, wobei auf die Notation der Maßeinheiten verzichtet wird. Durch Zusammenfassen und äquivalentes Umformen kommt man zur Lösung.
Der ermittelte Zahlenwert wird in der Antwort mit der richtigen Einheit versehen und so in den Sachzusammenhang eingeordnet.

$V_Z = r^2 \cdot 3{,}14 \cdot h_K$

$14{,}13 = 1{,}5^2 \cdot 3{,}14 \cdot h_K$

$14{,}13 = 7{,}065 \cdot h_K \quad | : 7{,}065$

$2 = h_K$

Höhe des Körpers: 2 dm

a) $r = 9{,}8 : 2 = 4{,}9$ (cm)

$V_Z = r^2 \cdot \pi \cdot h_K$

$850 = 4{,}9^2 \cdot 3{,}14 \cdot h_K$

$850 = 75{,}3914 \cdot h_K$

$\Rightarrow 11{,}27 \approx h_K$

Höhe Dose: 11,27 cm

b) 243 l = 243 dm

$V_Q = a \cdot b \cdot c$

$243 = 9 \cdot 4{,}5 \cdot c$

$243 = 40{,}5 \cdot c$

$6 = c$

Höhe Wasser: 6 dm

c) Kantenlänge: 30 cm = 0,3 m

$V_Q = a \cdot a \cdot c$

$1{,}08 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot c$

$1{,}08 = 0{,}09 \cdot c$

$\Rightarrow 12 = c$

Höhe Pfeiler: 12 m

d) $V = \frac{g \cdot h}{2} \cdot h_K$

$677{,}25 = \frac{12{,}9 \cdot h}{2} \cdot 15$

$677{,}25 = 96{,}75 \cdot h$

$\Rightarrow 7 = h$

Höhe Giebel: 7 m

6 Erklärung: Der Lösungsweg folgt analog dem bekannten Ablaufplan.

Beispiel:

$m = V \cdot \rho$

$m = a \cdot b \cdot c \cdot \rho$

$m = 12 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2{,}8$

$m = 470{,}4$

Masse Briefbeschwerer: 470,4 g

a) $m = V \cdot \rho$

$m = r^2 \cdot \pi \cdot h_K \cdot \rho$

$m = 2^2 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}8 \cdot 8{,}9$

$m = 536{,}6$

Masse Zylinder: 536,6 g

b) $m = a \cdot a \cdot a \cdot \rho$

$m = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 0{,}25$

$m = 31{,}25$

Masse Würfel: 31,25 kg

c) $m = a \cdot b \cdot c \cdot \rho$

$m = 140 \cdot 110 \cdot 6 \cdot 0{,}8$

$m = 73\,920$

Masse Tisch: 73 920 g = 73,92 kg

7 Beispiel:

$V = V_{QU} + V_Z$

$V = a \cdot b \cdot c + r \cdot r \cdot \pi \cdot h_K$

$V = 12 \cdot 4 \cdot 12 + 4 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 16$

$V = 576 + 803{,}84$

$V = 1\,379{,}84\ (cm^3)$

a) Beispiel:

$V = V_{Qu} + V_{Qu}$

$V = a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot c$

$V = 12 \cdot 4 \cdot 6 + 6 \cdot 4 \cdot 10$

$V = 288 + 240$

$V = 528\ (cm^3)$

b) $V = V_W - V_Z$

$V = a \cdot a \cdot a - r \cdot r \cdot \pi \cdot h_K$

$V = 10 \cdot 10 \cdot 10 - 3 \cdot 3 \cdot 3{,}14 \cdot 6$

$V = 1\,000 - 169{,}56$

$V = 830{,}44\ (cm^3)$

c) $V = V_{Qu} - V_Z : 2$

$V = a \cdot b \cdot c - r \cdot r \cdot 3{,}14 \cdot h_K : 2$

$V = 12 \cdot 12 \cdot 6 - 3 \cdot 3 \cdot 3{,}14 \cdot 12 : 2$

$V = 864 - 169{,}56$

$V = 694{,}44\ (cm^3)$

d) $V = V_Z - V_{Qu}$

$V = r \cdot r \cdot 3{,}14 \cdot h_K - a \cdot b \cdot c$

$V = 4 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \cdot 5$

$V = 251{,}2 - 45$

$V = 206{,}2\ (cm^3)$

Z

Kopfrechenübungen

Einsatzhinweise:

Arbeitsauftrag und Aufgaben präsentieren und Ergebnisse notieren lassen; zur Kontrolle Lösungen aufdecken.

1. Berechne die fehlenden Werte für Rechtecke.

	a)	b)	c)	d)	e)
Länge a	3 cm	7 cm	4 cm	8,4 dm	12 m
Breite b	6 cm	8 cm	6,5 cm	2 m	120 cm
Fläche A	18 cm^2	56 cm^2	26 cm^2	1,68 m^2	144 dm^2

2. Berechne die fehlenden Winkel im Dreieck.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
α	90°	60°	69°	25°	87°	72°
β	45°	75°	73°	119°	66°	49°
γ	45°	45°	38°	36°	27°	59°

L

1 a) Formel für die Prozentrechnung: $P = G \cdot p$
Prozentwert: P
Grundwert: G
Prozentsatz: p
Formeln für die Zinsrechnung: $Z = K \cdot p$; $Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{360}$; $Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{12}$
Zinsen: Z
Kapital: K
Zinssatz: p
Zeit: t (Tage bzw. Monate)

b) Folgende Lösungsschritte können übernommen werden:
Text genau durchlesen
Gegebene und gesuchte Größen notieren
Formel wählen (Formelsammlung)
Größen einsetzen, Gleichung lösen
Rechenfrage beantworten

Ⓐ gegeben: P; G
gesucht: p
$P = G \cdot p$
$13{,}99 = 14{,}99 \cdot p$
$\Rightarrow 93{,}3\,\% \approx p$
Man muss 93,3 % des ursprünglichen Preises bezahlen.

Ⓑ $Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{12}$
$120 = \frac{10\,000 \cdot p \cdot 1}{12}$
$\Rightarrow 14{,}4\,\% = p$
Der Zinssatz beträgt 14,4 %

2 Prozentformel: $P = G \cdot p$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Grundwert G	51,60 €	29,80 €	500 t	50 kg	70 l	200 m
Prozentsatz p	2,5 %	5 %	32,5 %	3,2 %	8 %	17,5 %
Prozentwert P	1,29 €	1,49 €	162,5 t	1,6 kg	5,6 l	35 m

3 a) gegeben: G = 2 300 €; p = 94 %
gesucht: P
$P = G \cdot p$
$P = 2\,300 \cdot 0{,}94$
$P = 2\,162$
Bei einem Treuerabatt von 6 % muss er 2 162 € bezahlen.

b) gegeben: G = 87,50 €; P = 70 €
gesucht: p
$P = G \cdot p$
$87{,}5 - 70 = 87{,}5 \cdot p$
$0{,}2 = p$
Der Preisnachlass beträgt 20 %

Mithilfe der entsprechenden Formeln sollen die Grundaufgaben der Prozent- und Zinsrechnung gelöst werden.
Der Lösungsalgorithmus für das Lösen von Gleichungen wird auf die Prozent- und Zinsformel übertragen.
Für die Berechnung der jeweiligen Variablen ist es sinnvoll, in die Grundformel bekannte Größen einzusetzen und dann die gesuchte Größe zu berechnen.

c) gegeben: $P = 8\,450{,}55$ €; $p = 105{,}5\,\%$
gesucht: G

$$P = G \cdot p$$
$$8\,450{,}55 = G : 1{,}055$$
$$8\,010 = G$$

Vor der Verteuerung hätte er 8 010 € bezahlen müssen.

4 Zinsformel: $Z = K \cdot p$ für a) und b)
Zinsformel: $Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{12}$ für c) und d)
Zinsformel: $Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{360}$ für e) und f)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Kapital K	3 600 €	12 500 €	5 500 €	15 000 €	4 800	72 000 €
Zinssatz p	0,85 %	1,2 %	1,2 %	1,5 %	0,75 %	1,5 %
Zeit t	1 Jahr	1 Jahr	10 Monate	7 Monate	200 Tage	100 Tage
Zinsen Z	30,60 €	150 €	55 €	131,25 €	20 €	300 €

5 a) gegeben: $K = 13\,200$ €; $Z = 137{,}50$ €; $t = 5$ Monate
gesucht: Zinssatz p

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{12}$$
$$137{,}50 = \frac{13\,200 \cdot p \cdot 5}{12}$$

$\Rightarrow 2{,}5\,\% = p$
Der Kredit wurde zu einem Zinssatz von 2,5 % gewährt.

b) gegeben: $K = 120\,000$ €; $p = 3{,}85\,\%$; $t = 3$ Monate
gesucht: Z; Höhe der Rückzahlung

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{12}$$
$$Z = \frac{120\,000 \cdot 0{,}0385 \cdot 3}{12}$$

$Z = 1\,155$ (€)

Höhe Rückzahlung:
120 000 € + 1 155 € = 121 155 €

c) gegeben: $p = 1{,}5\,\%$; $t = 9$ Monate + 10 Tage; $Z = 262{,}50$ €
gesucht: Kapital K; Höhe des verfügbaren Betrags

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{360}$$
$$262{,}50 = \frac{K \cdot 0{,}015 \cdot 280}{360}$$

$\Rightarrow 22\,500$ (€) $= K$

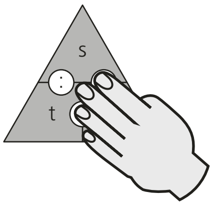
Höhe des verfügbaren Betrags:
22 500 € + 262,50 € = 22 762,50 €

L

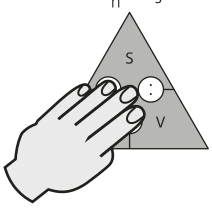
In Absprache mit den Lehrkräften aus den naturwissenschaftlichen Fächern sollen die Formeln zum Zusammenhang „Weg, Zeit, Geschwindigkeit" behandelt und so die Möglichkeit der inhaltlichen Wiederholung genutzt werden.

1 a) s: Weg (mögliche Einheiten: m; km)
t: Zeit (mögliche Einheiten: h; s)
v: Geschwindigkeit (mögliche Einheiten: $\frac{km}{h}$; $\frac{m}{s}$)

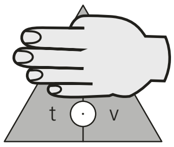
b)



Ich decke v ab und sehe s : t; also: $v = \frac{s}{t}$.



Ich decke t ab und sehe s : v; also $t = \frac{s}{v}$.



Ich decke s ab und sehe t · v; also s = t · v

2

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Geschwindigkeit $\left(\frac{km}{h}\right)$	6	100	50	100	25	130
Weg (km)	24	450	150	525	75	325
Zeit (h)	4	$4\frac{1}{2}$	3	$5\frac{1}{4}$	3	$2\frac{1}{2}$

3 a) 45 min = 0,75 h
$s = t \cdot v$
$= 0{,}75 \cdot 25$
$= 18{,}75$
Weg: 18,75 km

b) 2 h 15 min = 2,25 h
$v = \frac{s}{t}$
$= \frac{315}{2{,}25}$
$= 140$
Geschwindigkeit: 140 $\frac{km}{h}$

c) $t = \frac{s}{v}$
$= \frac{15}{12}$
$= 1\frac{1}{4}$
Zeit: $1\frac{1}{4}$ h

4 a) $s = t \cdot v$
$= 6{,}25 \cdot 11{,}52$
$= 72$
Länge: 72 km

b) 3 h 14 min 15 s = 11 655 s   42,2 km = 42 200 m
$v = \frac{s}{t}$
$= \frac{42\,200}{11\,655}$
$= 3{,}62$
$3{,}62 \cdot 3{,}6 = 13{,}03$
Durchschnittsgeschwindigkeit: 3,62 $\frac{m}{s}$ oder 13,03 $\frac{km}{h}$

c) 200 $\frac{km}{h}$: 3,6 = 55,55... $\frac{m}{s}$
$t = \frac{s}{v}$
$= \frac{10\,650 + 461}{55{,}55...}$
≈ 200 (s)
Zeit für die Durchfahrt: 200 s

oder $t = \frac{s}{v}$
$= \frac{10{,}650 + 0{,}461}{200}$
$\approx 0{,}0555...$ (h) $0{,}0555... \cdot 3\,600 \approx 200$ (s)
Zeit für die Durchfahrt: 200 s

5 a) 1 224 : 3,6 = 340   Weg des Schalls pro Sekunde: 340 m

b) $t = \frac{s}{v}$
$= \frac{1\,000}{340}$
≈ 3
Zeit des Schalls für 1 000 m: 3 s

c) $s = t \cdot v$
$= 12 \cdot 340$
$= 4\,080$
Entfernung: ≈ 4 km

d) $s = t \cdot v$
$= 5 \cdot 340$
$= 1\,700$
Julia hat recht: 1 700 m ≈ 1,7 km

e) $s = t \cdot v$
$= 2 \cdot 340$
$= 680$
Entfernung der Felswand: 680 m

6 Beispiel Rechenfrage:
Welches Tier erreicht die höchste Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ bzw. $\frac{km}{h}$?

Tiere	Strauß	Känguru	Kaninchen	Windhund
Weg (m)	1 000	100	1 200	10
Zeit (s)	45	12,5	60	s
Geschwindigkeit $\left(\frac{m}{s}\right)$	≈ 22,2	8	20	10
Geschwindigkeit $\left(\frac{km}{h}\right)$	≈ 80	28,8	72	36

oder

Beispiel Rechenfrage:
Welches Tier würde einen 100-m-Lauf gewinnen?

Tiere	Strauß	Känguru	Kaninchen	Windhund
Weg (m)	1 000	100	1 200	10
Zeit (s)	45	12,5	60	1
Zeit für 100 m (s)	4,5	12,5	5	10

Einen 100-m-Lauf würde der Strauß gewinnen.

Z

Weitere Aufgaben

1 a) Ein Sportwagen legt in 46 Sekunden eine Strecke von 1150 Metern zurück. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit des Sportwagens in $\frac{m}{s}$ und $\frac{km}{h}$. (v = 25 $\frac{m}{s}$ = 90 $\frac{km}{h}$)
b) Eine Skifahrerin fährt mit einer Geschwindigkeit von 10 $\frac{m}{s}$ eine Piste hinunter. Für das Abfahren der gesamten Piste benötigt sie 189 s. Wie lang ist die Piste? (s = 1 890 m)
c) Ein Lastwagen fährt eine Strecke von 246 km mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 82 $\frac{km}{h}$. Wie lange ist er unterwegs? (t = 3 h)

2 a) Wie weit kommt eine Rakete in 8 min 52 s, die sich mit einer Geschwindigkeit von 11,06 $\frac{km}{s}$ von der Erde entfernt? (s = 5 883,92 km)
b) Wie schnell rast ein Rennauto, das eine 61 184,695 m lange Rennstrecke in 9 min 27,05 s zurücklegt? (v = 107,9 $\frac{m}{s}$)
c) Wie lange braucht eine Schwimmerin für 100 m, wenn sie durchschnittlich 3,1 $\frac{km}{h}$ schnell ist? (t = 116,13 s)

3 Der Schall breitet sich im Wasser mit einer Geschwindigkeit von 5 400 $\frac{km}{h}$ aus.
Die Wassertiefe an einer Meeresstelle soll mithilfe eines Echolots gemessen werden.
Vom Boden eines Schiffes werden Schallwellen Richtung Meeresboden geschickt.
Die vom Meeresboden reflektierten Schallwellen kommen nach sechs Sekunden wieder zurück. Wie tief ist der Meeresboden an dieser Stelle? (s = 4 500 m)

L

1 a) Erklärung für beste Bedingungen (Beispiele):
Fahrerunabhängige Faktoren: trockene Straße, gute Bremsen, ausreichende Profiltiefe
Fahrerabhängige Faktoren: fitter Fahrer (keine Ablenkung, keine Müdigkeit keine Alkoholisierung, keine Medikamente , die die Fahrtüchtigkeit beeinflussen, genügend Sicherheitsabstand)

b) Für die Faustformel ist die Geschwindigkeit (v) entscheidend.

c) Gleichung für die Faustformel: $\text{Anhalteweg} = \frac{v}{10} \cdot 3 + \frac{v}{10} \cdot \frac{v}{10}$

2

Geschwindigkeit	Anhalteweg
30 $\frac{km}{h}$	18 m
80 $\frac{km}{h}$	88 m
100 $\frac{km}{h}$	130 m
130 $\frac{km}{h}$	208 m
150 $\frac{km}{h}$	270 m

3 a) Durch Fahrbahnglätte oder andere ungünstige Bedingungen (z. B. Eis, Schnee, nasses Laub, Nässe) verringert sich die Reibung zwischen Reifen und Fahrbahn, sodass sich die Bremswirkung verzögert. Bei sehr nassen Fahrbahnen kann es zu Aquaplaning kommen. Bei einer zu starken Bremsung besteht dann die Gefahr des Kontrollverlustes über das Fahrzeug.

b) Der Anhalteweg kann sich sowohl durch technische als auch menschliche Defizite maßgeblich verlängern:

– **abgefahrene Reifen:** Ist die Mindestprofiltiefe unterschritten oder weisen die Reifen sonstige Mängel auf, können diese ebenfalls nicht mehr genügend Reibung erzeugen, sodass die Bremsung nicht optimal wirkt.
– **verschlissene Bremsscheiben:** Auch andere Einrichtungen am Fahrzeug können die Bremswirkung beeinflussen, allen voran die Bremsscheiben. Sind diese abgenutzt oder funktionieren aus einem anderen Grund nicht ausreichend, können sie nicht genug Kraft erzeugen, um die Reifen abzubremsen. Diese übertragen entsprechend weniger Bremsenergie auf den Asphalt.
– **zu geringer Bremsflüssigkeitsfüllstand:** Die meisten Fahrzeugbremssysteme arbeiten über Hydrauliköl. Ist zu wenig Flüssigkeit in den Bremsleitungen, kann das Signal durch Betätigen der Bremsen nicht optimal an die Bremsscheiben weitergeleitet werden, die Bremsung verzögert sich.
– **Handy am Steuer, Essen, Trinken o. ä.:** Jede Tätigkeit, ob nun das Telefonieren am Steuer, das Trinken oder das Anzünden einer Zigarette, lenkt den Fahrer – mal mehr, mal weniger – ab. Dadurch können plötzlich auftretende Hindernisse erst später wahrgenommen werden, sodass sich der Reaktionsweg verlängert.
– **Müdigkeit:** Je müder eine Person ist, desto mehr Zeit benötigt ihr Gehirn für das Verarbeiten von Informationen. Nicht erst der Sekundenschlaf ist gefährlich, sondern bereits eine generelle Übermüdung.
– **Alkohol und Betäubungsmittel:** Auch Rauschmittel beeinflussen die Hirnaktivitäten. Bereits ab einer Blutalkoholkonzentration von 0,8 Promille kann sich die Reaktionszeit um etwa 50 % erhöhen.

Für Lernende der 9. Jahrgangsstufe ist das Thema Anhalteweg eines Kfz hochinteressant. In ein oder zwei Jahren werden sie den Pkw-Führerschein machen. In der theoretischen und praktischen Vorbereitung auf die Prüfung ist der Anhalteweg mit Berechnungen durch die Faustformel bei besten Bedingungen sowie bei Gefahrbremsung Inhalt der Ausbildung. Dazu gehören auch fahrerabhängige und fahrerunabhängige Faktoren, die den Bremsweg beeinflussen können.

4 a) Grundsätzlich ist dieses Manöver nur zu empfehlen, wenn der Fahrer eine Gefahr wahrnimmt, die ein schnelles Abbremsen des Fahrzeugs erforderlich macht. Dies kann beispielsweise der Fall sein, wenn ein Ball auf die Fahrbahn rollt und ein Kind diesem hinterherrennt oder um einen Zusammenstoß zu vermeiden.

b) Bei Gefahrbremsung spielt der Reaktionsweg keine Rolle mehr. Der Anhalteweg stimmt mit dem Bremsweg überein.

c)

Geschwindigkeit	Anhalteweg bei Gefahrbremsung
30 $\frac{km}{h}$	9 m
80 $\frac{km}{h}$	64 m
100 $\frac{km}{h}$	100 m
130 $\frac{km}{h}$	169 m
150 $\frac{km}{h}$	225 m

Z

Tabelle der Reaktions- und Bremswege

Mithilfe der Tabelle kann man die Bremswege bei unterschiedlicher Bodenbeschaffenheit berechnen.

Geschwindigkeit	Reaktionsweg		Unterschiedlich lange Bremswege je nach Fahrbahnbeschaffenheit (Verzögerungswerte):					Anhalteweg
in km/h	in m/1 s		trocken 9 m/s^2	naxx 7 m/s^2	Schnee 2 m/s^2	Eis 1 m/s^2		in m
30	8,33		3,86	4,96	17,36	34,72		
40	11,11		6,86	8,82	30,86	61,73		
50	13,89		10,72	13,78	48,23	96,45		
60	16,66		15,43	19,84	69,44	138,89		
70	19,44		21,00	27,01	94,52	189,04		
80	22,22		27,43	35,27	123,64	246,91		
90	25,00		34,72	44,64	156,25	312,50		
100	27,77	+	42,87	55,11	192,90	385,80	=	
110	30,55		51,87	66,69	233,41	466,82		
120	33,33		61,73	79,37	277,78	555,56		
130	36,11		72,45	93,14	326,00	652,01		
140	38,88		84,02	108,02	378,09	759,17		
150	41,66		96,45	124,01	434,03	868,06		
160	44,44		109,74	141,09	493,83	987,65		
170	47,22		123,89	159,28	557,48	1 114,97		
180	50,00		138,89	178,57	625,00	1 250,00		
190	52,77		154,75	198,96	696,37	1 392,75		
200	55,55		171,47	220,46	771,60	1 543,21		

L

1 a) Lösungen der Gleichung Ⓐ: (4|5) (2|6) (8|3) (10|2) (6|4)
Lösungen der Gleichung Ⓑ: (3|6) (6|4) (0|8) (12|0) (9|2)
b) Beide Gleichungen haben das Zahlenpaar (6|4) als Lösung gemeinsam.

2 a) x + y = 12 (5|7), (14|–2)
b) 2x + y = 20 (6|8), (7|6)
c) x – 2y = 8 (24|8), (10|1)
d) x – y = 13 (5|–8), (10|–3)
e) 2x + 3y = 48 (12|8), (9|10)
f) 3y – 2x = 6 (3|1,5), (6|6)
g) 4x – 3y = 0 (3|4), (6|8)
h) 2 (x + y) = 12 (3|3), (–1|7)

3 Das Zahlenpaar (4|2) ist für beide Gleichungen eine Lösung.

4 a)

Gleichung 1: y = 2x + 6							
x	0	1	2	3	4	5	6
y	6	9	10	12	14	16	18

Gleichung II: y = 4x – 4							
x	0	1	2	3	4	5	6
y	–4	0	4	8	12	16	20

Das Zahlenpaar (5|16) ist die Lösung des Gleichungssystems.

b) Ⓐ

Gleichung I: y = 2x							
x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	2	4	6	8	10	12

Gleichung II: y = 3 – x							
x	0	1	2	3	4	5	6
y	3	2	1	0	–1	–2	–3

Das Zahlenpaar (1|2) ist die Lösung des Gleichungssystems.

Ⓑ

Gleichung I: y = 3x + 1							
x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	4	7	10	13	16	19

Gleichung II: y = 5x – 5							
x	0	1	2	3	4	5	6
y	–5	0	5	10	15	20	25

Das Zahlenpaar (3|10) ist die Lösung des Gleichungssystems.

Ⓒ

Gleichung I: y = –4x – 4				
x	0	1	2	3
y	–4	–8	–12	–16

Gleichung II: y = 2x – 10				
x	0	1	2	3
y	–10	–8	–6	–4

Das Zahlenpaar (1|–8) ist die Lösung des Gleichungssystems.

Ⓓ

Gleichung I: 3x + 2y = 16				
x	0	1	2	3
y	8	6	5	3,5

Gleichung II: 2x + 3y = 19				
x	0	1	2	3
y	$6\frac{1}{3}$	$5\frac{2}{3}$	5	$4\frac{1}{3}$

Das Zahlenpaar (2|5) ist die Lösung des Gleichungssystems.

Ⓔ

Gleichung I: x = 6 – y							
x	0	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1	0

Gleichung II: x – y = 2							
x	0	1	2	3	4	5	6
y	–2	–1	0	1	2	3	4

Das Zahlenpaar (4|2) ist die Lösung des Gleichungssystems.

Ⓕ

Gleichung I: y – 2x + 1 = 0							
x	0	1	2	3	4	5	6
y	–1	1	3	5	7	9	11

Gleichung II: y + x – 5 = 0							
x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	4	3	2	1	0	–1

Das Zahlenpaar (2|3) ist die

Anhand des anschaulichen Vorgehens an Spielautomaten sollen die Schüler Zahlenpaare finden, welche beide Gleichungen als Lösung gemeinsam haben. Durch dieses probierende Verfahren wird das Verständnis für lineare Gleichungssysteme und deren Lösung angebahnt und gefördert. Deshalb sollte auf diese Übungen nicht verzichtet werden, sondern vielmehr bei Verständnisproblemen darauf zurückgegriffen werden. Ein weitergehendes Üben und Vertiefen dieser probierenden und damit sehr zeitaufwändigen Lösungsverfahren erscheint freilich nicht sinnvoll.

Lineare Gleichungssysteme zeichnerisch lösen

Lineare Gleichungssysteme werden zeichnerisch gelöst und so die ermittelten Werte durch Einsetzen überprüft.
Dabei wird auf die Notwendigkeit der Umstellung der Funktionsgleichungen in die Normalform verwiesen. Auch die Grenzen der graphischen Lösung werden verdeutlicht.
Schließlich werden auch die Sonderfälle parallele und identische Geraden erläutert.

L

1 a) Ⓐ → I   Ⓑ → II

b) S(4 | 2)
S in I: $2 = -4 + 6$; $2 = 2$
S in II: $2 = 4 - 2$; $2 = 2$

2 Ⓐ → 1   S(–2|2)
S in I: $2 = -0{,}5 \cdot (-2) + 1$; $2 = 2$
S in II: $2 = -2 + 4$; $2 = 2$

Ⓑ → 3   S(–2|–1)
S in I: $-1 = 2 \cdot (-2) + 3$; $-1 = -1$
S in II: $-1 = -0{,}5 \cdot (-2) - 2$

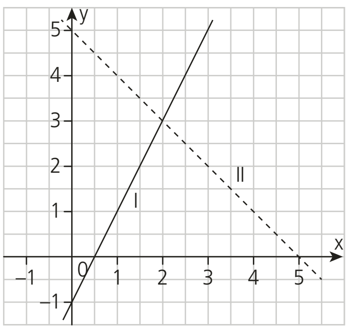
Ⓒ → 2   S(1|–2)
S in 1: $-2 = -2 \cdot 1$; $-2 = -2$
S in II: $-2 = 2 \cdot 1 - 4$; $-2 = -2$

3 a) I $y = -\frac{2}{3}x + 4$
II $y = x - 1$
S(3|2)
S in I: $2 = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 4$; $2 = 2$
S in II: $2 = 3 - 1$; $2 = 2$

b) I $y = -x + 4$
II $y = x - 2$
S(3|1)
S in I: $1 = -3 + 4$; $1 = 1$
S in II: $3 = 1 + 2$; $3 = 3$

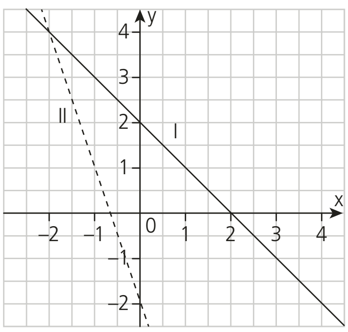
c) I $y = -x + 6$
II $y = -0{,}5x + 4$
S(4|2)
S in I: $2 = -4 + 6$; $2 = 2$
S in II: $2 = -0{,}5 \cdot 4 + 4$; $2 = 2$

4 a)



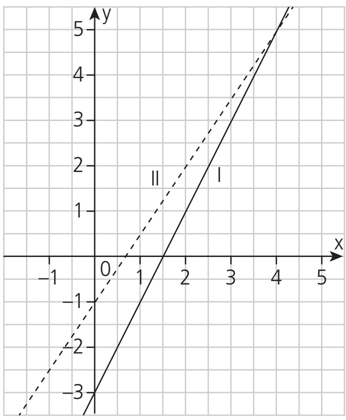
Koordinaten des Schnittpunktes: S(2|3)
S in I: $3 = 2 \cdot 2 - 1$; $3 = 3$
S in II: $3 = -2 + 5$; $3 = 3$

b)



Koordinaten des Schnittpunktes: S(–2|4)
S in I: $4 = -(-2) + 2$; $4 = 4$
S in II: $4 = -3 \cdot (-2) - 2$; $4 = 4$

c)



Koordinaten des Schnittpunktes: S(4|5)

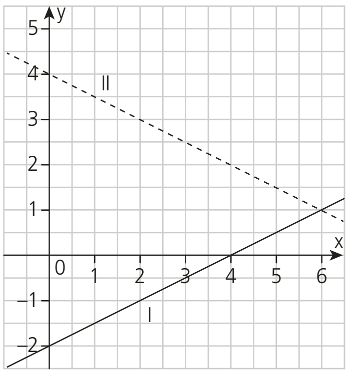
S in I: $5 = 2 \cdot 4 - 3$

$5 = 5$

S in II: $5 = 1{,}5 \cdot 4 - 1$

$5 = 5$

d)



Koordinaten des Schnittpunktes: S(6|1)

S in I: $1 = 0{,}5 \cdot 6 - 2$

$1 = 1$

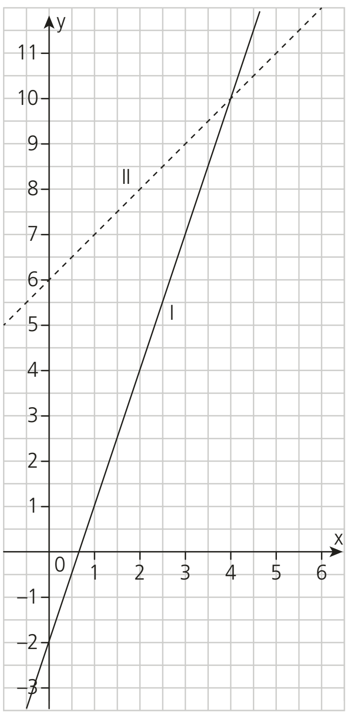
S in II: $1 = -0{,}5 \cdot 6 + 4$

$1 = 1$

5 a) Ⓐ I $y = 3x - 2$ Ⓑ I $y = -x + 3$

II $y = x + 6$ II $y = -2x + 9$

b) Ⓐ



Koordinaten des Schnittpunktes: S(4|10)

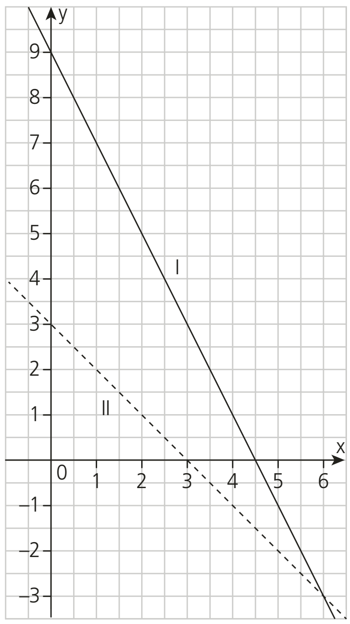
S in I: $10 = 3 \cdot 4 - 2$

$10 = 10$

S in II: $10 = 4 + 6$

$10 = 10$

Ⓑ



Koordinaten des Schnittpunktes: S(6 | −3)

S in I: $-3 = -6 + 3$

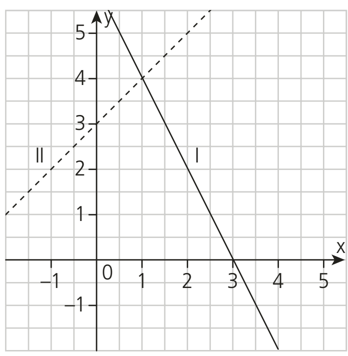
$-3 = -3$

S in II: $-3 = -2 \cdot 6 + 9$

$-3 = -3$

6 a) I $2x + y = 6$ | I $y = -2x + 6$

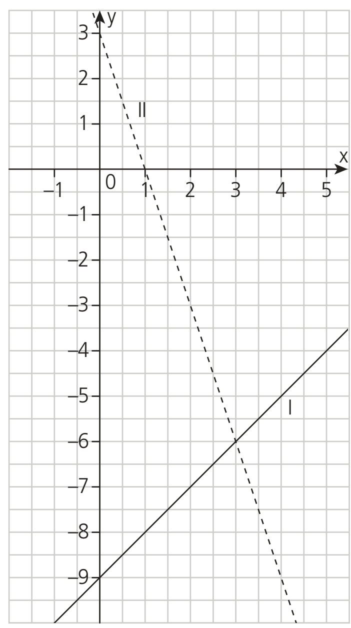
II $x - y = -3$ | II $y = x + 3$



S(1|4)

b) I $y + 9 = x$ | I $y = x - 9$

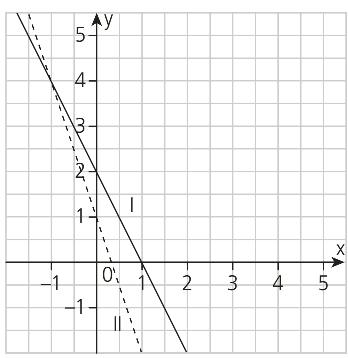
II $3x + y = 3$ | II $y = -3x + 3$



S(3|−6)

c) I $2x + y = 2$ | I $y = -2x + 2$

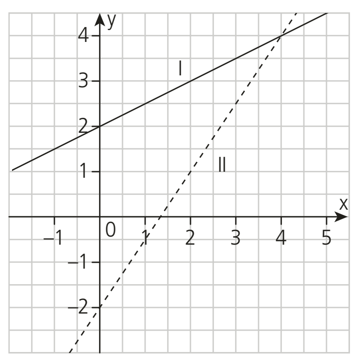
II $y - 1 = -3x$ | II $y = -3x + 1$



S(−0,4|6,8)

d) I $-0{,}5x + y = 2$ | I $y = 0{,}5x + 2$

II $-1{,}5x + y = -2$ | II $y = 1{,}5x - 2$



S(4|4)

7 a) I $y - x = 1{,}5 \rightarrow$ Ⓑ   II $y + 2 = 3x \rightarrow$ Ⓐ

b) $S(1{,}75\,|\,3{,}25)$

S in I: $3{,}25 - 1{,}75 = 1{,}5$ S in II: $3{,}25 + 2 = 3 \cdot 1{,}75$

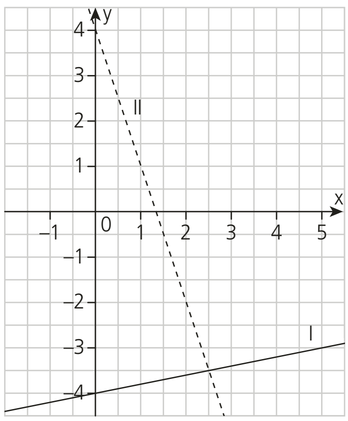
$1{,}8 = 1{,}5$ $5{,}25 = 5{,}25$

Das grafische Lösungsverfahren hat den Nachteil, dass man sehr von der eigenen Zeichengenauigkeit abhängig ist. Selbst wenn man sich noch so bemüht, Lösungen wie (1,75| 3,25) wird man einer händischen Zeichnung nur unter großem Aufwand entnehmen können. Aber selbst wenn die Lösung ganzzahlig ist, können Schwierigkeiten auftreten, z. B. bei einem Zahlenpaar wie (1|100).

c) S in I: $3{,}25 - 1{,}75 = 1{,}5$ S in II: $3{,}25 + 2 = 3 \cdot 1{,}75$

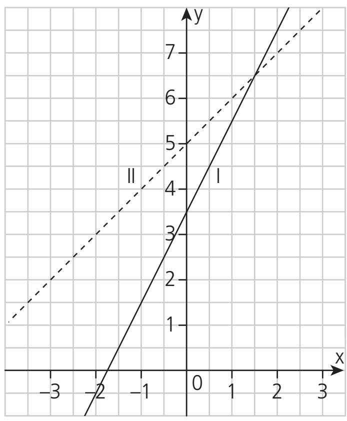
$1{,}8 = 1{,}5$ $5{,}25 = 5{,}25$

8 a)



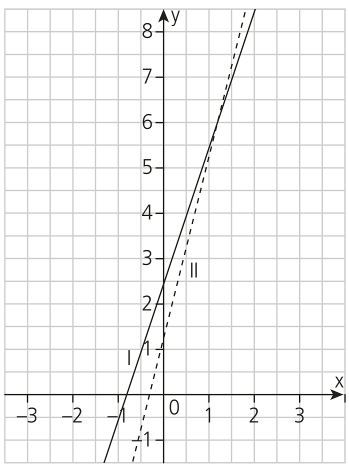
$S(2{,}5\,|\,-3{,}5)$

b)



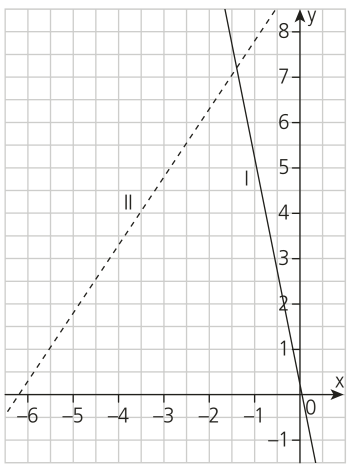
$S(1{,}5\,|\,6{,}5)$

c)



$S(1{,}2\,|\,6)$

d)



$S(-1{,}4\,|\,7{,}2)$

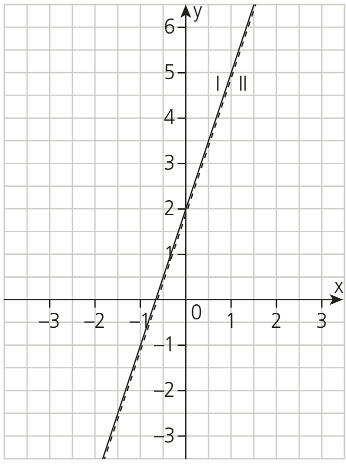
9 a) ① Das Gleichungssystem hat keine Lösungen:
Man erkennt das daran, dass die beiden Graphen parallel sind.

② Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen:
Man erkennt es daran, dass die beiden Graphen die gleiche Gerade bilden.

b) Beispiele

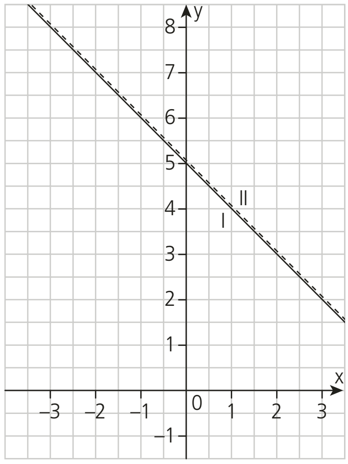
keine Lösungen:	I $y = x + 2$	I $y - 4 = 1{,}5x$	I $y = -4x + 3$
	II $y = x - 2$	II $y = 1{,}5x - 2$	II $y + 4x = -3$
unendlich viele Lösungen:	I $y = 2x + 10$	I $2x + y = 3$	I $5y - 10x + 15 = 0$
	II $2y = 4x + 20$	II $4x + 2y = 6$	II $y - 5 = 2x$

c) Ⓐ I $\quad y = 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad$ I $\quad y = 3x + 2$
II $\quad 3x = y - 2 \qquad\qquad$ II $\quad y = 3x + 2$



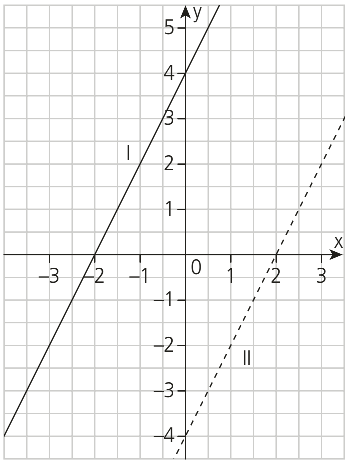
unendlich viele Lösungen

Ⓑ I $\quad x = 5 - y \quad \Rightarrow \quad$ I $\quad y = -x + 5$
II $\quad 2x = 10 - 2y \qquad\qquad$ II $\quad y = -x + 5$



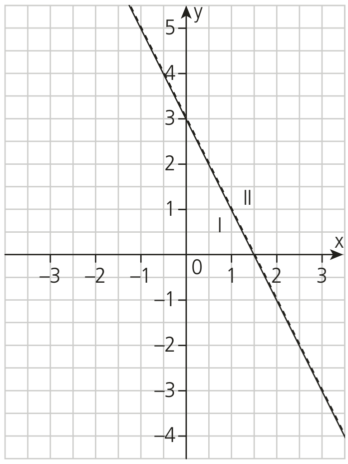
unendlich viele Lösungen

Ⓒ I $\quad y = 2x + 4$
II $\quad y = 2x - 4$



keine Lösungen

Ⓓ I $\quad y = -2x + 3$
II $\quad y = -2x + 3$



unendlich viele Lösungen

L

1 a) Schüler erklären gemäß Beispiel.

b) $x = 1$ in II: $y = 3 \cdot 1 + 3$

$y = 6$

a) I $y = 2x + 4$
II $y = 3x + 1$
I = II:
$2x + 4 = 3x + 1$
$\Rightarrow x = 3$
$x = 3$ in I:
$y = 2 \cdot 3 + 4 = 10$
L: $(3|10)$

b) I $y = 3x - 2$
II $y = x + 6$
I = II
$3x - 2 = x + 6$
$\Rightarrow x = 4$
$x = 4$ in II:
$y = 4 + 6 = 10$
L: $(4|10)$

c) I $y = -2x + 9$
II $y = -x + 3$
I = II:
$-2x + 9 = -x + 3$
$\Rightarrow x = 6$
$x = 6$ in II:
$y = -6 + 3 = -3$
L: $(6|-3)$

d) I $y = 4x - 2$
II $y = 3x + 5$
I = II:
$4x - 2 = 3x + 5$
$\Rightarrow x = 7$
$x = 7$ in I:
$y = 4 \cdot 7 - 2 = 26$
L: $(7|26)$

e) I $y = 3x + 9$
II $y = 5x + 7$
I = II:
$3x + 9 = 5x + 7$
$\Rightarrow x = 1$
$x = 1$ in I:
$y = 3 \cdot 1 + 9 = 12$
L: $(1|12)$

f) I $x = y - 10$
II $x = 5y - 70$
I = II:
$y - 10 = 5x - 70$
$\Rightarrow y = 15$
$y = 15$ in I:
$x = 15 - 10 = 5$
L: $(5|15)$

g) I $x = y - 8$
II $x = 3y - 48$
I = II:
$y - 8 = 3y - 48$
$\Rightarrow y = 20$
$y = 20$ in I:
$x = 20 - 8 = 12$
L: $(12|20)$

h) I $x = 2y + 2$
II $x = 3y - 2$
I = II:
$2y + 2 = 3y - 2$
$\Rightarrow y = 4$
$y = 4$ in II:
$x = 3 \cdot 4 - 2 = 10$
L: $(10|4)$

3 Schüler erklären gemäß Beispiel.
I $y + x = 5$
II $y - 2x = -4$
I $y = -x + 5$
II $y = 2x - 4$
I = II:
$-x + 5 = 2x - 4$
$\Rightarrow 3 = x$
$x = 3$ in I:
$-3 + 5 = 2 \cdot 3 - 4$
$2 = 2$
L: $(3|2)$

a) I $y - 2x = 6$
II $y = 6x + 2$
I $y = 2x + 6$
II $y = 6x + 2$
I = II:
$2x + 6 = 6x + 2$
$\Rightarrow x = 1$
$x = 1$ in II:
$y = 6 \cdot 1 + 2 = 8$
L: $(1|8)$

b) I $9x + y = 17$
II $3x + y = 5$
I $y = -9x + 17$
II $y = -3x + 5$
I = II:
$-9x + 17 = -3x + 5$
$\Rightarrow 2 = x$
$x = 2$ in I:
$9 \cdot 2 + y = 17$
$\Rightarrow y = -1$
L: $(2|-1)$

c) I $2x - y = 4$
II $6x - 2y = 16$
I $y = 2x - 4$
II $y = 3x - 8$
I = II:
$2x - 4 = 3x - 8$
$\Rightarrow x = 4$
$x = 4$ in I:
$2 \cdot 4 - y = 4$
$\Rightarrow y = 4$
L: $(4|4)$

Lineare Gleichungssysteme werden rechnerisch über das Gleichsetzungsverfahren gelöst. Während dabei zunächst beide Gleichungen bereits nach einer Variablen aufgelöst sind, muss bei späteren Aufgaben diese Auflösung nach einer Variablen bzw. auch einem Vielfachen der Variablen erst vorgenommen werden.

d) I $15x + 5y = 25$
II $2x + 3y = -6$
I $y = -3x + 5$
II $y = -\frac{2}{3}x - 2$
I = II:
$-3x + 5 = -\frac{2}{3}x - 2$
$\Rightarrow x = 3$
$x = 3$ in II:
$2 \cdot 3 + 3y = -6$
$\Rightarrow y = -4$
L: $(3|-4)$

e) I $x + 2y = 5$
II $5x + 6y = 21$
I $y = -0{,}5x + 2{,}5$
II $y = -\frac{5}{6}x + 3{,}5$
I = II:
$-0{,}5x + 2{,}5 = -\frac{5}{6}x + 3{,}5$
$\Rightarrow x = 3$
$x = 3$ in I:
$3 + 2y = 5$
$\Rightarrow y = 1$
L: $(3|1)$

f) I $2x + 7y = 1$
II $x + 5y = -1$
I $y = -\frac{2}{7}x + \frac{1}{7}$
II $y = -\frac{1}{5}x - 0{,}2$
I = II:
$-\frac{2}{7}x + \frac{1}{7} = -\frac{1}{5}x - 0{,}2$
$\Rightarrow x = 4$
$x = 4$ in II:
$4 + 5y = -1$
$\Rightarrow y = -1$
L: $(4|-1)$

4 Ⓐ I $-7x + 5y = 11$
II $5y + 3x = 25$
I $5y = 11 + 7x$
II $5y = 25 - 3x$
I = II:
$11 + 7x = 25 - 3x$
$\Rightarrow x = 1{,}4$
$x = 1{,}4$ in II:
$5y + 3 \cdot 1{,}4 = 25$
$\Rightarrow y = 4{,}16$
L: $(1{,}4|4{,}16)$

Ⓑ I $3x - 2y = -10{,}5$
II $7{,}5 + 3x = 1{,}5y$
I $3x = -10{,}5 + 2y$
II $3x = 1{,}5y - 7{,}5$
I = II:
$-10{,}5 + 2y = 1{,}5y - 7{,}5$
$\Rightarrow y = 6$
$y = 6$ in I:
$3x - 2 \cdot 6 = -10{,}5$
$\Rightarrow x = 0{,}5$
L: $(0{,}5|6)$

a) I $2y - 2 = x$
II $2y + 22 = 5x$
I $2y = x + 2$
II $2y = 5x - 22$
I = II:
$x + 2 = 5x - 22$
$\Rightarrow x = 6$
$x = 6$ in I:
$2y - 2 = 6$
$\Rightarrow y = 4$
L: $(6|4)$

b) I $4x + 2y = 26$
II $4x - 2y = 14$
I $4x = -2y - 26$
II $4x = 2y + 14$
I = II:
$-2y - 26 = 2y + 14$
$\Rightarrow y = 3$
$y = 3$ in I:
$4x + 2 \cdot 30 = 26$
$\Rightarrow x = 5$
L: $(5|3)$

c) I $3x - 2y = 11$
II $27 + 3x = 21y$
I $3x = 2y + 11$
II $3x = 21y - 27$
I = II:
$2y + 11 = 21y - 27$
$\Rightarrow y = 2$
$y = 2$ in I:
$3x - 2 \cdot 2 = 11$
$\Rightarrow x = 5$
L: $(5|2)$

d) I $5x - 49 = -4y$
II $3x + 4y = 39$
I $4y = -5x + 49$
II $4y = -3x + 39$
I = II:
$-5x + 49 = -3x + 39$
$\Rightarrow x = 5$
$x = 5$ in II:
$3 \cdot 5 + 4y = 39$
$\Rightarrow y = 6$
L: $(5|6)$

e) I $8y = 3{,}2x + 8$
II $1{,}6x = 8y + 4$
I $8y = 3{,}2x + 8$
II $8y = 1{,}6x - 4$
I = II:
$3{,}2x + 8 = 1{,}6x - 4$
$\Rightarrow x = -7{,}5$
$x = -7{,}5$ in I:
$8y = 3{,}2 \cdot (-7{,}5) + 8$
$\Rightarrow y = -2$
L: $(-7{,}5|-2)$

f) I $5x + 6y = 15$
II $10y - 25 = 5x$
I $5x = -6y + 15$
II $5x = 10y - 25$
I = II:
$-6y + 15 = 10y - 25$
$\Rightarrow y = 2{,}5$
$y = 2{,}5$ in I:
$5x + 6 \cdot 2{,}5 = 15$
$\Rightarrow x = 0$
L: $(0|2{,}5)$

5 a) I $x = 2y$
II $x = y + 4$
I = II:
$2y = y + 4$
$\Rightarrow y = 4$
$y = 4$ in I:
$x = 2 \cdot 4 = 8$
L: $(8|4)$

b) I $4y = x + 6$
II $4y = 2x + 4$
I = II:
$x + 6 = 2x + 4$
$\Rightarrow x = 2$
$x = 2$ in I:
$4y = 2 \cdot 2 + 4$
$\Rightarrow y = 2$
L: $(2|2)$

Das Einsetzungsverfahren anwenden

Lineare Gleichungssys-teme werden rechne-risch über das Einset-zungsver-fahren gelöst. Anfänglich ist dabei eine Gleichung bereits nach einer Variab-len aufgelöst und der vor-gegebene Term kann un-mittelbar in die andere Gleichung eingesetzt wer-den. Dann jedoch muss die Auflö-sung einer der beiden Gleichungen nach einer Variablen bzw. einem Vielfachen der Vari-ablen erst vorgenommen wer-den.

L

1 a) Lernende erklären gemäß Beispiel.

b) $x = 5$ in I:

$y + 2 = 2 \cdot 5$

$\Rightarrow y = 8$ L: $(5|8)$

2 a) I $3x + y = 25$

II $y = 2x$

II in I:

$3x + 2x = 25$

$\Rightarrow x = 5$

$x = 5$ in II:

$y = 2 \cdot 5$

$\Rightarrow y = 10$

L: $(5|10)$

b) I $x + 2y = 15$

II $y = 7x$

II in I:

$x + 2 \cdot 7x = 15$

$\Rightarrow x = 1$

$x = 1$ in II:

$y = 7 \cdot 1$

$\Rightarrow y = 7$

L: $(1|7)$

c) I $5 - x = y$

II $2x - y = 7$

I in II:

$2x - 7 = 5 - x$

$\Rightarrow x = 4$

$x = 4$ in I:

$5 - 4 = y$

$\Rightarrow 1 = y$

L: $(4|1)$

d) I $3x = 14 - y$

II $y = x - 2$

II in I:

$3x = 14 - (x - 2)$

$\Rightarrow x = 4$

$x = 4$ in II:

$y = 4 - 2 = 2$

L: $(4|2)$

e) I $2x = 2y - 6$

II $x = 2y + 3$

II in I:

$2 \cdot (2y + 3) = 2y - 6$

$\Rightarrow y = -6$

$y = -6$ in II:

$x = 2 \cdot (-6) + 3 = -9$

L: $(-9|-6)$

f) I $4x + 3y = 42$

II $x = y + 7$

II in I:

$4 \cdot (y + 7) + 3y = 42$

$\Rightarrow y = 2$

$y = 2$ in II:

$x = 2 + 7 = 9$

L: $(9|2)$

g) I $3x + 2y = 2$

II $x = 10 - 3y$

II in I:

$3 \cdot (10 - 3y) + 2y = 2$

$\Rightarrow y = 4$

$y = 4$ in II:

$x = 10 - 3 \cdot 4$

$\Rightarrow x = -2$

L: $(-2|4)$

h) I $3x + 8y = 48$

II $4y - 4 = x$

II in I:

$3 \cdot (4y - 4) + 8y = 48$

$\Rightarrow y = 3$

$y = 3$ im II:

$4 \cdot 3 - 4 = x$

$\Rightarrow 8 = x$

L: $(8|3)$

3 Lernende erklären gemäß Beispiel.

I $6x + 2y = 28$

II $-x + y = -2$

II $y = x - 2$

II in I:

$6x + 2 \cdot (x - 2) = 28$

$\Rightarrow x = 4$

$x = 4$ in II:

$-4 + y = -2$

$\Rightarrow y = 2$

L: $(4|2)$

a) I $2y = 4x + 4$
II $7x - 5y = -1$
I $y = 2x + 2$
I in II:
$7x - 5 \cdot (2x + 2) = -1$
$\Rightarrow x = -3$
$x = -3$ in I:
$2y = 4 \cdot (-3) + 4$
$\Rightarrow y = -4$
L: $(-3|-4)$

b) I $y - x = 25$
II $3y = 3 - 3x$
II $y = 1 - x$
II in I:
$1 - x - x = 25$
$\Rightarrow x = -12$
$x = -12$ in I
$y - (-12) = 25$
$\Rightarrow y = 13$
L: $(-12|13)$

c) I $x + 3y = 5$
II $x - 2y = 10$
I $x = 5 - 3y$
I in II:
$5 - 3y - 2y = 10$
$\Rightarrow y = -1$
$y = -1$ in I:
$x + 3 \cdot (-1) = 5$
$\Rightarrow x = 8$
L: $(8|-1)$

d) I $2x = 3y - 3$
II $x - 3y = -9$
II $x = 3y - 9$
II in I:
$2 \cdot (3y - 9) = 3y - 3$
$\Rightarrow y = 5$
$y = 6$ in II:
$x - 3 \cdot 5 = -9$
$\Rightarrow x = 6$
L: $(6|5)$

e) I $4y - 2x = 16$
II $4x - 5y = -2$
I $y = 0{,}5x + 4$
I in II:
$4x - 5 \cdot (0{,}5x + 4) = -2$
$\Rightarrow x = 12$
$x = 12$ in I:
$4y - 2 \cdot 12 = 16$
$\Rightarrow y = 10$
L: $(12|10)$

f) I $x - 2y = -4$
II $x - y = 5$
II $x = y + 5$
II in I:
$y + 5 - 2y = -4$
$\Rightarrow y = 9$
$y = 9$ in I:
$x - 2 \cdot 9 = -4$
$\Rightarrow x = 14$
L: $(14|9)$

4 Ⓐ I $3x + 8y = 48$
II $-2x + 8y = 48$
II $8y = 2x + 48$
II in I:
$3x + 2x + 48 = 48$
$\Rightarrow x = 0$
$x = 0$ in I:
$3 \cdot 0 + 8y = 48$
$\Rightarrow y = 6$
L: $(0|6)$

Ⓑ I $7x - 8y = 62$
II $7x + 8y = 78$
I $7x = 8y + 62$
I in II:
$8y + 62 + 8y = 78$
$\Rightarrow y = 1$
$y = 1$ in I:
$7x - 8 \cdot 1 = 62$
$\Rightarrow x = 10$
L: $(10|1)$

a) I $2x + 3y = 24$
II $2x + 5y = 56$
II $x = 28 - 2{,}5y$
II in I:
$2 \cdot (28 - 2{,}5y) + 3y = 24$
$\Rightarrow y = 16$
$y = 16$ in II:
$2x + 5 \cdot 16 = 56$
$\Rightarrow x = -12$
L: $(-12|16)$

b) I $6x - 12y = -30$
II $20x - 12y = -44$
I $x = 2y - 5$
I in II:
$20 \cdot (2y - 5) - 12y = -44$
$\Rightarrow y = 2$
$y = 2$ in I:
$6x - 12 \cdot 2 = -30$
$\Rightarrow x = -1$
L: $(-1|2)$

c) I $3x + 4y = 32$
II $3x + 7y = 47$
II $3x = 47 - 7y$
II in I:
$47 - 7y + 4y = 32$
$\Rightarrow y = 5$
$y = 5$ in II:
$3x + 7 \cdot 5 = 47$
$\Rightarrow x = 4$
L: $(4|5)$

d) I $3x + 7y = 26$
II $3x - 4y = 4$
II $3x = 4y + 4$
II in I:
$4y + 4 + 7y = 26$
$\Rightarrow y = 2$
$y = 2$ in I:
$3x + 7 \cdot 2 = 26$
$\Rightarrow x = 4$
L: $(4|2)$

e) I $3x - 2y = 13$
II $5x - 2y = 19$
II $2y = 5x - 19$
II in I:
$3x - (5x - 19) = 13$
$\Rightarrow x = 3$
$x = 3$ in I:
$3 \cdot 3 - 2y = 13$
$\Rightarrow y = -2$
L: $(3|-2)$

f) I $12x + 7y = 5$
II $15x + 7y = 50$
I $7y = 5 - 12x$
I in II:
$15x + 5 - 12x = 50$
$\Rightarrow x = 15$
$x = 15$ in I:
$12 \cdot 15 + 7y = 5$
$\Rightarrow y = -25$
L: $(15|-25)$

5 a) I $2x + 8 = y$
II $x + y = 14$
I $y = 14 - x$
I in I:
$2x + 8 = 14 - x$
$\Rightarrow x = 2$
$x = 2$ in I:
$2 \cdot 2 + 8 = y$
$\Rightarrow 12 = y$
L: $(2|12)$

b) I $2x + 3y = 19$
II $2x - 3y = 1$
I $x = -1{,}5y + 9{,}5$
I in II:
$2 \cdot (-1{,}5y + 9{,}5) - 3y = 1$
$\Rightarrow y = 3$
$y = 3$ in I:
$2x + 3 \cdot 3 = 19$
$\Rightarrow x = 5$
L: $(5|3)$

L

Lineare Gleichungssysteme werden rechnerisch über das Additionsverfahren gelöst. Zunächst sind die Aufgabenstellungen dabei derart, dass die Gleichungen bereits beidseitig gleichförmig und die Koeffizienten einer der beiden Variablen jeweils Zahl und Gegenzahl sind. Somit kann das Additionsverfahren unmittelbar angewendet werden. Dann jedoch ist erst die äquivalente Umformung einer und später beider Gleichungen erforderlich.

1 Lernende erklären:
Beim Additionsverfahren werden beide Gleichungen addiert. Da in der Gleichung I 3y subtrahiert und bei Gleichung II 3y addiert werden, fallen die y-Glieder bei der Addition beider Gleichungen weg und es entsteht eine Gleichung mit der Variablen x, so dass diese berechnet werden kann. Die Lösung für x wird in eine der ursprünglichen Gleichungen eingesetzt und damit y berechnet.

I $9x - 3y = 3$
II $4x + 3y = 23$

I + II: $9x - 3y + 4x + 3y = 3 + 23$
$13x = 26$
$x = 2$

x = 2 in I: $9 \cdot 2 - 3y = 3$
$\Rightarrow y = 5$
L: $(2|5)$

2 a) I $2x - 2y = -5$
II $4x + 2y = -7$
I + II:
$6x = -12$
$x = -2$
x = 2 in I:
$2 \cdot (-2) - 2y = -5$
$\Rightarrow y = 0{,}5$
L: $(-2|0{,}5)$

b) I $15x + 11y = 78$
II $15x - 11y = 12$
I + II:
$30x = 90$
$x = 3$
x = 3 in I:
$15 \cdot 3 + 11y = 78$
$y = 3$
L: $(3|3)$

c) I $5y = 10 - x$
II $-5y = 20 - 5x$
I + II:
$0 = 30 - 6x$
$\Rightarrow x = 5$
x = 5 in I:
$5y = 10 - 5$
$\Rightarrow y = 1$
L: $(5|1)$

d) I $18 = 3x + y$
II $7 = 2x - y$
I + II:
$25 = 5x$
$5 = x$
x = 5 in II:
$7 = 10 - y$
$\Rightarrow y = 3$
L: $(5|3)$

e) I $2x - 5y = 8$
II $-2x + 11y = 4$
I + II:
$-5y + 11y = 12$
$\Rightarrow y = 2$
y = 2 in I:
$2x - 5 \cdot 2 = 8$
$\Rightarrow x = 9$
L: $(9|2)$

f) I $-3x + 2y = -9$
II $3x + 7y = 36$
I + II:
$2y + 7y = 27$
$\Rightarrow y = 3$
y = 3 in II:
$3x + 7 \cdot 3 = 36$
$\Rightarrow x = 5$
L: $(5|3)$

g) I $3x - 4y - 16 = 0$
II $10x + 4y - 88 = 0$
I + II:
$13x - 104 = 0$
$\Rightarrow x = 8$
x = 8 in I:
$3 \cdot 8 - 4y - 16 = 0$
$\Rightarrow y = 2$
L: $(8|2)$

h) I $7x - 8y = 62$
II $7x + 8y = 78$
I + II:
$14x = 140$
$\Rightarrow x = 10$
x = 10 in II:
$7 \cdot 10 + 8y = 78$
$\Rightarrow y = 1$
L: $(10|1)$

i) I $6x - 2y = 4$
II $-6x + 5y = 17$
I + II:
$3y = 21$
$\Rightarrow y = 7$
y = 7 in I:
$6x - 2 \cdot 7 = 4$
$\Rightarrow x = 3$
L: $(3|7)$

3 a) I $y - 2x = 6 \quad | \cdot (-1)$
II $y + 6 = -6x$
I $-y + 2x = -6$
I + II:
$-2x + 6 = -6x$
$\Rightarrow x = -1{,}5$
x = –1,5 in I:
$y - 2 \cdot (-1{,}5) = 6$
$\Rightarrow y = 3$
L: $(-1{,}5|3)$

b) I $4y - 3x = 46 \quad | \cdot (-1)$
II $4y - 7x = -14$
I $-4y + 3x = -46$
I + II:
$-4x = -60$
$\Rightarrow x = 15$
x = 15 in II:
$4y - 7 \cdot 15 = -14$
$\Rightarrow y = 22{,}75$
L: $(15|22{,}75)$

c) I $6x + 4y = 10$
II $7x + 4y = 21 \quad | \cdot (-1)$
II $-7x - 4y = -21$
I + II:
$-x = -11$
$\Rightarrow x = 11$
$x = 11$ in I:
$6 \cdot 11 + 4y = 10$
$\Rightarrow y = -14$
L: $(11|-14)$

d) I $6x + 8y = -7$
II $6x + 2y = 68 \quad | \cdot (-1)$
II $-6x - 2y = -68$
I + II:
$6y = -75$
$\Rightarrow y = -12{,}5$
$y = -12{,}5$ in II:
$6x + 2 \cdot (-12{,}5) = 68$
$\Rightarrow x = 15{,}5$
L: $(15{,}5|-12{,}5)$

4 I $2x + 3y = 11 \quad | \cdot (-4)$
II $8x - 2y = 2$
I $-8x - 12y = -44$
II $8x - 2y = 2$
I + II:
$-8x - 12y + 8x - 2y = -44 + 2$
$\Rightarrow y = 3$
$y = 3$ in II:
$8x - 2 \cdot 3 = 2$
$\Rightarrow x = 1$
L: $(1|3)$

Damit die Variable x bei der anschließenden Addition wegfällt, wird die Gleichung I mit –4 multipliziert. Anschließend werden die beiden Gleichungen addiert.

a) I $9x + 6y = 96$
II $-20x + 3y = -1 \quad | \cdot (-2)$
II $40x - 6y = 2$
I + II:
$49x = 98$
$\Rightarrow x = 2$
$x = 2$ in I:
$9 \cdot 2 + 6y = 96$
$\Rightarrow y = 13$
L: $(2|13)$

b) I $4x - 3y = -5$
II $3x + y = 6 \quad | \cdot 3$
II $9x + 3y = 18$
I + II:
$13x = 13$
$\Rightarrow x = 1$
$x = 1$ in II:
$3 \cdot 1 + y = 6$
$\Rightarrow y = 3$
L: $(1|3)$

c) I $3x - 14 = 5y$
II $x + y - 10 = 0 \quad | \cdot (-3)$
II $-3x - 3y + 30 = 0$
I + II:
$-14 - 3y + 30 = 5y$
$\Rightarrow y = 2$
$y = 2$ in I:
$3x - 14 = 5 \cdot 2$
$\Rightarrow x = 8$
L: $(8|2)$

d) I $2y - 1{,}4x = 0{,}8$
II $y + 7x + 15 = 0 \quad | \cdot (-2)$
II $-2y - 14x - 30 = 0$
I + II:
$-15{,}4x - 30 = 0{,}8$
$\Rightarrow x = -2$
$x = -2$ in II:
$y + 7 \cdot (-2) + 15 = 0$
$\Rightarrow y = -1$
L: $(-2|-1)$

e) I $5y - 2x = 24$
II $2{,}5y + 3x = 28 \quad | \cdot (-2)$
II $-5y - 6x = -56$
I + II:
$-8x = -32$
$\Rightarrow x = 4$
$x = 4$ in I:
$5y - 2 \cdot 4 = 24$
$\Rightarrow y = 6{,}4$
L: $(4|6{,}4)$

f) I $9x + 4y = 66$
II $3x - 5y = 3 \quad | \cdot (-3)$
II $-9x + 15y = -9$
I + II:
$19y = 57$
$\Rightarrow y = 3$
$y = 3$ in II:
$3x - 5 \cdot 3 = 3$
$\Rightarrow x = 6$
L: $(6|3)$

g) I $8x - 18 - 4y = 0$
II $-2y + 5x = 10 \quad | \cdot (-2)$
II $4y - 10x = -20$
I + II:
$-2x - 18 = -20$
$\Rightarrow x = 1$
x =1 in I:
$8 \cdot 1 - 18 - 4y = 0$
$\Rightarrow y = -2,5$
L: $(1|-2,5)$

h) I $2x - 9y = 11 \quad | \cdot 2$
II $20 + 22y - 4x = 2$
I $4x - 18y = 22$
I + II:
$4y + 20 = 24$
$\Rightarrow y = 1$
y = 1 in I:
$2x - 9 \cdot 1 = 11$
$\Rightarrow x = 10$
L: $(10|1)$

i) I $7x + 3y = -30 \quad | \cdot (-2)$
II $8x + 6y = -24$
I $-14x - 6y = 60$
I + II:
$-6x = 36$
$\Rightarrow x = -6$
x = –6 in I:
$7 \cdot (-6) + 3y = -30$
$\Rightarrow y = 4$
L: $(-6|4)$

j) I $5x + 2y = 23 \quad | \cdot (-2)$
II $4y - 6x = -34$
I $-10x - 4y = -46$
I + II:
$-16x = -80$
$\Rightarrow x = 5$
x = 5 in II:
$4y - 6 \cdot 5 = -34$
$\Rightarrow y = -1$
L: $(5|-1)$

k) I $6y + 2x = 12$
II $2y + 2x = -16 \quad | \cdot (-1)$
II $-2y - 2x = 16$
I + II:
$4y = 28$
$\Rightarrow y = 7$
y = 7 in I:
$6 \cdot 7 + 2x = 12$
$\Rightarrow x = -15$
L: $(-15|7)$

l) I $2y - 4x = 2 \quad | \cdot (-1)$
II $2y - 16 = 2x$
I $-2y + 4x = -2$
I + II:
$-16 + 4x = -2 + 2x$
$\Rightarrow x = 7$
x = 7 in II:
$2y - 16 = 2 \cdot 7$
$\Rightarrow y = 15$
L: $(7|15)$

5 a) I $x + y = 61$
II $x - y = 13$
I + II:
$2x = 74$
$\Rightarrow x = 37$
x = 37 in I:
$37 + y = 61$
$\Rightarrow y = 24$
L: $(37|24)$

b) I $3x - y = 8$
II $4x + y = 6$
I + II:
$7x = 14$
$\Rightarrow x = 2$
x = 2 in II:
$4 \cdot 2 + y = 6$
$\Rightarrow y = -2$
L: $(2|-2)$

Die verschiedenen Lösungsverfahren werden nochmals geübt. Ab Aufgabe 3 entscheiden sich die Schüler für das Verfahren, das ihnen für die betreffende Aufgabe am geeignetsten erscheint.

L

1 Erklärung gemäß Beispiel

Gleichsetzungsverfahren

I $x + y = 12$
II $x + 1{,}5y = 16$
I $x = 12 - y$
II $x = 16 - 1{,}5y$
I = II:
$12 - y = 16 - 1{,}5y$
$\Rightarrow y = 8$
y = 8 in I:
$x + 8 = 12$
$\Rightarrow x = 4$
L: (4|8)

Einsetzungsverfahren

I $x + y = 12$
II $x + 1{,}5y = 16$
I $x = 12 - y$
I in II:
$12 - y + 1{,}5y = 16$
$\Rightarrow y = 8$
y = 8 in I:
$x + 8 = 12$
$\Rightarrow x = 4$
L: (4|8)

Additionsverfahren

I $x + y = 12 \quad | \cdot (-1)$
II $x + 1{,}5y = 16$
I $-x - y = -12$
I + II:
$0{,}5y = 4$
$\Rightarrow y = 8$
y = 8 in II:
$x + 1{,}5 \cdot 8 = 16$
$\Rightarrow x = 4$
L: (4|8)

Anzahl Flaschen: Apfelsaft: 4 Orangensaft: 8

2 Gleichsetzungsverfahren

a) I $11y = 4x - 6$
II $11y = 9x - 41$
I = II:
$4x - 6 = 9x - 41$
$\Rightarrow x = 7$
x = 7 in I:
$11y = 4 \cdot 7 - 6$
$\Rightarrow y = 2$
L: (7|2)

b) I $7x - 8y = 52$
II $7x = 3y + 37$
I $7x = 52 + 8y$
$3y + 37 = 52 + 8y$
$\Rightarrow y = -3$
y = –3 in II:
$7x = 3 \cdot (-3) + 37$
$\Rightarrow x = 4$
L: (4|–3)

c) I $2x - 5 = 3y$
II $3x + 3 = y$
II in I:
$2x - 5 = 3 \cdot (3x + 3)$
$\Rightarrow x = -2$
x = – 2 in II:
$3 \cdot (-2) + 3 = y$
$\Rightarrow y = -3$
L: (–2|–3)

Einsetzungsverfahren

a) I $y = 2x - 3$
II $y - 3x = -8$
I in II:
$2x - 3 - 3x = -8$
$\Rightarrow x = 5$
x = 5 in I:
$y = 2 \cdot 5 - 3$
$\Rightarrow y = 7$
L: (5|7)

b) I $0 = 3y + 14 - x$
II $x = 5y + 22$
II in I:
$0 = 3y + 14 - (5y + 22)$
$\Rightarrow y = -4$
y = –4 in II:
$x = 5 \cdot (-4) + 22$
$\Rightarrow x = 2$
L: (2|–4)

c) I $y = 3x - 13$
II $8x - 78 = -6y$
I in II:
$8x - 78 = -6 \cdot (3x - 13)$
$\Rightarrow x = 6$
x = 6 in I:
$y = 3 \cdot 6 - 13 = 5$
L: (6|5)

Additionsverfahren

a) I $5x + 5y = 50$
II $5x - 5y = 20$
I + II:
$10x = 70$
$\Rightarrow x = 7$
x = 7 in II:
$5 \cdot 7 - 5y = 20$
$\Rightarrow y = 3$
L: (7|3)

b) I $3x + 5y = 19$
II $7x + 5y = 31 \quad | \cdot (-1)$
II $-7x - 5y = -31$
I + II:
$-4x = -12$
$\Rightarrow x = 3$
x = 3 in II:
$7 \cdot 3 + 5y = 31$
$\Rightarrow y = 2$
L: (3|2)

c) I $11x + 6y = 23 \quad | \cdot 4$
II $7x + 8y = 23 \quad | \cdot (-3)$
I $44x + 24y = 92$
II $-21x - 24y = -69$
I + II:
$23x = 23$
$\Rightarrow x = 1$
x = 1 in II:
$7 \cdot 1 + 8y = 23$
$\Rightarrow y = 2$
L: (1|2)

3 Als Lösungsbeispiele wird jeweils das augenscheinlich günstigere Lösungsverfahren angewendet.

a) I $3x + y = 5$
II $3y - 2x = 70$
I $y = 5 - 3x$
I in II:
$3 \cdot (5 - 3x) - 2x = 70$
$\Rightarrow x = -5$
$x = -5$ in I:
$3 \cdot (-5) + y = 5$
$\Rightarrow y = 20$
L: $(-5|20)$

b) I $x + 11 = 2y$
II $x + 56 = 8y$
I $x = 2y - 11$
I in II:
$2y - 11 + 56 = 8y$
$\Rightarrow y = 7{,}5$
$y = 7{,}5$ in I:
$x + 11 = 2 \cdot 7{,}5$
$\Rightarrow x = 4$
L: $(4|7{,}5)$

c) I $3x - 5y - 14 = 0$
II $x + y - 10 = 0 \quad | \cdot 5$
II $5x + 5y - 50 = 0$
I + II:
$8x - 64 = 0$
$\Rightarrow x = 8$
$x = 8$ in II:
$8 + y - 10 = 0$
$\Rightarrow y = 2$
L: $(8|2)$

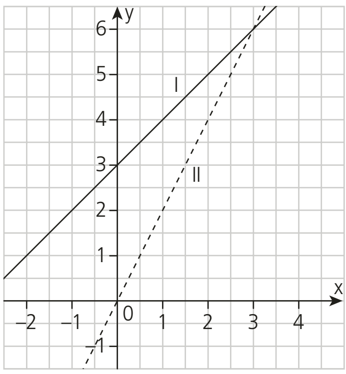
d) I $1{,}5a - 3b = -24 \quad | \cdot 3$
II $-6a + 9b = 87$
I $4{,}5a - 9b = -72$
I + II:
$-1{,}5a = 15$
$\Rightarrow a = -10$
$a = -10$ in II:
$-6 \cdot (-10) + 9b = 87$
$\Rightarrow b = 3$
L: $(-10|3)$

e) I $-3p + 7q = 4$
II $8q + 3p = 11$
I + II:
$15q = 15$
$\Rightarrow q = 1$
$q = 1$ in II:
$8 \cdot 1 + 3p = 11$
$\Rightarrow p = 1$
L: $(1|1)$

f) I $4z - 3y = -35$
II $6z - 2y = -20$
II $y = 3z + 10$
II in I:
$4z - 3 \cdot (3z + 10) = -35$
$\Rightarrow z = 1$
$z = 1$ in I:
$4 \cdot 1 - 3y = -35$
$\Rightarrow y = 13$
L: $(13|1)$

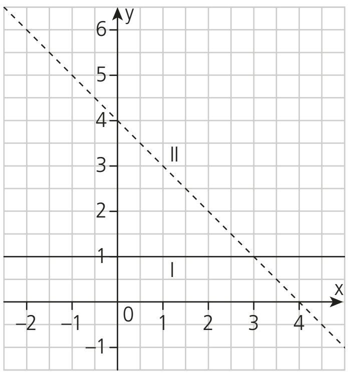
4 a) grafische Lösung: $S(-1|2)$
I $y - 2x = 0 \qquad y = 2x$
II $2y - 6 = 2x \qquad y = x + 3$
I $y = 2x$
I in II:
$2 \cdot 2x - 6 = 2x$
$\Rightarrow x = 3$
$x = 3$ in I:
$y - 2 \cdot 3 = 0$
$\Rightarrow y = 6$
L: $(3|6)$

Die grafische Lösung ist falsch, d h. die Graphen wurden fehlerhaft gezeichnet. Hier die Korrektur:



b) grafische Lösung: $(2|2)$
I $y + x = 4 \qquad y = -x + 4$
II $2y - 4 = -2 \qquad y = 1$
I $y = -x + 4$
I in II:
$2 \cdot (-x + 4) = 2$
$\Rightarrow x = 3$
$x = 3$ in I:
$y + 3 = 4$
$\Rightarrow y = 1$
L: $(3|1)$

Die grafische Lösung ist falsch, d h. die Graphen wurden fehlerhaft gezeichnet. Hier die Korrektur:



c) grafische Lösung: $(-2|-1)$

I $y - 2x - 3 = 0$	$y = 2x + 3$
II $2y + x = -4$	$y = -0{,}5x - 2$

I $y = 2x + 3$
II $y = -0{,}5x - 2$
I = II:
$2x + 3 = -0{,}5x - 2$
$\Rightarrow x = -2$
$x = -2$ in I:
$y = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$
L: $(-2|-1)$

Die grafische Lösung stimmt mit der rechnerischen Lösung überein.

5 a) I $y = 2x + 4$
II $y = x - 1$
I = II:
$2x + 4 = x - 1$
$\Rightarrow x = -5$
$x = -5$ in II:
$y = -5 - 1 = -6$
L: $(-5|-6)$
Schnittpunkt der Geraden: $S(-5|-6)$

b) I $y = -x - 1$
II $y = -2x - 8$
I = II:
$-x - 1 = -2x - 8$
$\Rightarrow x = -7$
$x = -9$ in I:
$y = -(-7) - 1 = 6$
L: $(-7|6)$
Schnittpunkt der Geraden: $S(-7|6)$

L

1 a) Aussage I: Ein Jugendhotel kann 30 Gäste in Einzel- und Doppelzimmern unterbringen.
Aussage II: Insgesamt sind 21 Zimmer vorhanden.

b) I $x + 2y = 30$
II $x + y = 21$
I $x = -2y + 30$
I in II:
$-2y + 30 + y = 21$
$\Rightarrow y = 9$
$y = 9$ in II:
$x + 9 = 21$
$\Rightarrow x = 12$
L: $(12 \mid 9)$
Das Jugendhotel hat 12 Einzelzimmer und 9 Doppelzimmer.

c) I $y + 2x = 30$
II $y + x = 21$
I $y = -2x + 30$
I in II:
$-2x + 30 + x = 21$
$\Rightarrow x = 9$
$x = 9$ in II:
$y + 9 = 21$
$\Rightarrow y = 12$
L: $(9 \mid 12)$
Das Ergebnis bleibt gleich. Der Unterschied liegt nur in der Benennung der Variablen.

2 Beispiele: Es wird eine Möglichkeit vorgestellt.

a) Anzahl Dreibettzimmer: x
Anzahl Fünfbettzimmer: y
I $x + y = 15$
II $3x + 5y = 63$
I $x = -y + 15$
I in II:
$3 \cdot (-y + 15) + 5y = 63$
$\Rightarrow y = 9$
$y = 9$ in I:
$x + 9 = 15$
$\Rightarrow x = 6$
L: $(6 \mid 9)$
Anzahl Dreibettzimmer: 6
Anzahl Fünfbettzimmer: 9

b) Anzahl Einzelzimmer: x
Anzahl Zweibettzimmer: y
I $x + y = 20$
II $x + 2y = 34$
I $x = -y + 20$
I in II:
$-y + 20 + 2y = 34$
$\Rightarrow y = 14$
$y = 14$ in I:
$x + 14 = 20$
$\Rightarrow x = 6$
L: $(6 \mid 14)$
Anzahl Einzelzimmer: 6
Anzahl Zweibettzimmer: 14

c) Anzahl Sechsbettzimmer: x
Anzahl Vierbettzimmer: y
Anzahl Sechs- und Vierbettzimmer: $16 - 4 - 3 = 9$
Anzahl der Betten in Sechs- und Vierbettzimmern: $55 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 44$
I $x + y = 9$
II $6x + 4y = 44$
I $x = -y + 9$
I in II:
$6 \cdot (-y + 9) + 4y = 44$
$\Rightarrow y = 5$
$y = 5$ in I:
$x + 5 = 9$
$\Rightarrow x = 4$
L: $(4 \mid 5)$
Anzahl Sechsbettzimmer: 4
Anzahl Vierbettzimmer: 5

Auf den Seiten 100 und 101 werden Sachaufgaben über das Aufstellen linearer Gleichungssysteme gelöst. Durch das Festlegen und schriftliche Notieren der Variablen für die gesuchten Größen werden Sachaufgaben klarer strukturiert. Die Lernenden können auch noch am Schluss der Aufgabe erkennen, für welche Größe die Variable eingesetzt wurde. Auf einen Antwortsatz sollte Wert gelegt werden, denn er erfordert ein nochmaliges Lesen der gestellten Frage. Der vorgegebene Lösungsplan sollte von den Schülern übernommen und eingeübt werden.

3 a) Preis Eintrittskarte Kind: x
Preis Eintrittskarte Erwachsener: y
I $x + 2y = 24$ $|\cdot(-1)$
II $3x + 2y = 36$
I $-x - 2y = -24$
I + II:
$2x = 12$
$\Rightarrow x = 6$
$x = 6$ in I:
$6 + 2y = 24$
$\Rightarrow y = 9$
L: $(6|9)$
Preis Eintrittskarte Kind: 6 €
Preis Eintrittskarte Erwachsener: 9 €

b) Anzahl Schweine: x
Anzahl Hühner: y
I $x + y = 50$
I $4x + 2y = 116$
I $x = 50 - y$
I in II:
$4 \cdot (50 - y) + 2y = 116$
$\Rightarrow y = 42$
$y = 42$ in I:
$x + 42 = 50$
$\Rightarrow x = 8$
Anzahl Schweine: 8
Anzahl Hühner: 42

c) Preis Tasse Kaffee: x
Preis Stück Kuchen: y
I $2x + y = 8{,}6$
II $3x + 4y = 21{,}9$
I $y = 8{,}6 - 2x$
I in II:
$3x + 4 \cdot (8{,}6 - 2x) = 21{,}9$
$\Rightarrow x = 2{,}5$
$x = 2{,}5$ in I:
$2 \cdot 2{,}5 + y = 8{,}6$
$\Rightarrow y = 3{,}6$
L: $(2{,}5|3{,}6)$
Preis Tasse Kaffee: 2,50 €
Preis Stück Kuchen: 3,60 €

4 a) Beispiel Text:
Ⓐ Udo zahlt für zwei Paar Wiener und zwei Brezeln 11,20 €. Frau Ammon kauft vier Paar Wiener und 3 Brezeln für 20,00 €. Berechne den Preis für ein Paar Wiener und für eine Brezel.
Preis für ein Paar Wiener: x
Preis für ein Brezel: y
I $2x + 2y = 11{,}2$ $|\cdot(-2)$
II $4x + 3y = 20$
I $-4x - 4y = -22{,}4$
I + II:
$-y = -2{,}4$
$\Rightarrow y = 2{,}4$
$y = 2{,}4$ in II:
$4x + 3 \cdot 2{,}4 = 20$
$\Rightarrow x = 3{,}2$
L: $(3{,}2|\ 2{,}4)$
Preis für ein Paar Wiener: 3,20 €
Preis für eine Brezel: 2,40 €

b) Ⓑ Am Imbissstand bezahlt Ayla für vier Würstchen und zwei Portionen Pommes 12,20 €, Frau Akkan für drei Würstchen und drei Portionen Pommes 12,90 €. Wie viel kostet jeweils ein Würstchen und eine Portion Pommes?
Preis für ein Würstchen: x
Preis Portion Pommes: y
I $4x + 2y = 12{,}2$
II $3x + 3y = 12{,}9$
I $y = 6{,}1 - 2x$
I in II:
$3x + 3 \cdot (6{,}1 - 2x) = 12{,}9$
$\Rightarrow x = 1{,}8$
$x = 0{,}9$ in I:
$4 \cdot 1{,}8 + 2y = 12{,}2$
$\Rightarrow y = 2{,}5$
L: $(1{,}8|2{,}5)$
Preis pro Würstchen: 1,80 €
Preis Portion Pommes: 2,50 €

b) Individuelle Schülerformulierungen

5 Erklärung gemäß Beispiel

I $x - 8 = (y - 8) \cdot 3$

II $x + 2 = (y + 2) \cdot 2$

I $x = (y - 8) \cdot 3 + 8$

II $x = (y + 2) \cdot 2 - 2$

I = II:

$(y - 8) \cdot 3 + 8 = (y + 2) \cdot 2 - 2$

$\Rightarrow y = 18$

$y = 18$ in I:

$x - 8 = (18 - 8) \cdot 3$

$\Rightarrow x = 38$

L: $(38|18)$

Alter Vater: 38 Jahre

Alter Tobias: 18 Jahre

6 a) Alter Irmgard: x

Alter Großvater: y

I $5x = y$

II $(x - 5) \cdot 7 = y - 5$

I in II:

$(x - 5) \cdot 7 = 5x - 5$

$\Rightarrow x = 15$

$x = 15$ in I:

$5 \cdot 15 = y$

$75 = y$

L: $(15|75)$

Alter Irmgard: 15 Jahre

Alter Großvater: 75 Jahre

b) Alter Anja: x

Alter Fabian: y

I $x - 10 = 2 \cdot (y - 10)$

II $x = y + 4$

II in I:

$y + 4 - 10 = 2 \cdot (y - 10)$

$\Rightarrow y = 14$

$y = 14$ in II:

$x = 14 + 4 = 18$

L: $(18|14)$

Alter Anja: 18 Jahre

Alter Fabian: 14 Jahre

c) Alter Thomas: x

Alter Silke: y

I $x = 2y + 4$

II $x - 2 = 5 \cdot (y - 2)$

I in II:

$2y + 4 - 2 = 5 \cdot (y - 2)$

$\Rightarrow y = 4$

$y = 4$ in I:

$x = 2 \cdot 4 + 4 = 12$

L: $(12|4)$

Alter Thomas: 12 Jahre

Alter Silke: 4 Jahre

d) Alter Christian: x

Alter Simon: y

I $x - 7 = (y - 7) \cdot 7$

I $x + 3 = 3 \cdot (y + 3)$

I $x = (y - 7) \cdot 7 + 7$

II $x = 3 \cdot (y + 3) - 3$

I = II:

$(y - 7) \cdot 7 + 7 = 3 \cdot (y + 3) - 3$

$\Rightarrow x = 42$

$x = 42$ in I:

$42 + 3 = 3 \cdot (y + 3)$

$\Rightarrow y = 12$

L: $(42|12)$

Alter Christian: 42 Jahre

Alter Simon: 12 Jahre

7 a)

	Preis pro Erw. (€)	Preis pro Kind (€)	Gesamtpreis (€)
I Familie Bauer	3x +	4y =	60
II Familie Reber	2x +	3y =	42

b) Schülererklärungen anhand der Tabelle.

c) I $3x + 4y = 60 \quad | \cdot 2$

II $2x + 3y = 42 \quad | \cdot (-3)$

I $6x + 8y = 120$

II $-6x - 9y = -126$

I + II:

$-y = -6$

$\Rightarrow y = 6$

y = 6 in II:

$2x + 3 \cdot 6 = 42$

$\Rightarrow x = 12$ Eintrittspreis Erwachsener: 12 €

Eintrittspreis Kind: 6 €

8 a) Fahrpreis Erwachsener: x

Fahrpreis Kind: y

I $2x + 3y = 42$

II $3x + y = 42$

II $y = 42 - 3x$

II in I:

$2x + 3 \cdot (42 - 3x) = 42$

$\Rightarrow x = 12$

x = 12 in I:

$2 \cdot 12 + 3y = 42$

$\Rightarrow y = 6$

L: $(12|6)$

Fahrpreis Erwachsener: 12 €

Fahrpreis Kind: 6 €

b) Preis Rose: x

Preis Tulpe: y

I $9x + 7y = 16{,}5 \quad | \cdot 9$

I $9y + 7x = 15{,}5 \quad | \cdot (-7)$

I $81x + 63\,y = 148{,}5$

II $-63y - 49x = -108{,}5$

I + II:

$32x = 40$

$\Rightarrow x = 1{,}25$

x = 1,25 in I:

$9 \cdot 1{,}25 + 7y = 16{,}5$

$\Rightarrow y = 0{,}75$

L: $(1{,}25|0{,}75)$

Preis Rose: 1,25 €

Preis Tulpe: 0,75 €

c) Anzahl Apfelsaftflaschen: x

Anzahl Orangensaftflaschen: y

I $x + y = 16$

II $1{,}3x + 1{,}45y = 22{,}3$

I $x = 16 - y$

I in II:

$1{,}3 \cdot (16 - y) + 1{,}45y = 22{,}30$

$\Rightarrow y = 10$

y = 10 in I:

$x + 10 = 16$

$\Rightarrow x = 6$

L: $(6|10)$

Anzahl Apfelsaftflaschen: 6

Anzahl Orangensaftflaschen: 10

d) Grundgebühr pro Tag: x

Geldbetrag pro Kilometer: y

I $5x + 625y = 775$

II $7x + 1\,025y = 1\,127$

I $x = 155 - 125y$

I in II:

$7 \cdot (155 - 125y) + 1\,025y = 1\,127$

$\Rightarrow y = 0{,}28$

y = 0,28 in I:

$5x + 625 \cdot 0{,}28 = 775$

$\Rightarrow x = 120$

L: $(120|0{,}28)$

Grundgebühr pro Tag: 120,00 €

Geldbetrag pro Kilometer: 0,28 €

L

1 a) Erklärung gemäß Beispiel

I $x + y = 30$

II $x \cdot 25 + y \cdot 20 = 30 \cdot 22$

b) I $x = 30 - y$

I in II:

$25 \cdot (30 - y) + 20y = 660$

$\Rightarrow y = 18$

$y = 18$ in I:

$x + 18 = 30$

$\Rightarrow x = 12$

Menge Teesorte 1: 12 kg

Menge Teesorte 2: 18 kg

c) Menge Teesorte 1: x

Menge Teesorte 2: y

I $x + y = 20$

II $28x + 24y = 516$

I $x = 20 - y$

I in II:

$28 \cdot (20 - y) + 24y = 516$

$\Rightarrow y = 11$

$y = 11$ in I:

$x + 11 = 20$

$\Rightarrow x = 9$

Menge Teesorte 1: 9 kg

Menge Teesorte 2: 11 kg

2 Menge gute Kaffeesorte: x

Menge billigere Kaffeesorte: y

I $1{,}5x = y$

II $16x + 6 \cdot 1{,}5x = 1\,000$

I in II:

$16x + 9x = 1\,000$

$\Rightarrow x = 40$

$x = 40$ in I:

$1{,}5 \cdot 40 = y$

$\Rightarrow 60 = y$

Menge gute Kaffeesorte: 40 kg

Menge billigere Kaffeesorte: 60 kg

3 a) Erklärung gemäß Beispiel

I $x + y = 5\,400$

II $\frac{39}{11} = \frac{x}{y}$

b) II $39y = 11x$

I $x = 5\,400 - y$

I in II:

$39y = 11 \cdot (5\,400 - y)$

$\Rightarrow y = 1\,188$

$y = 1\,188$ in I:

$x + 1\,188 = 5\,400$

$\Rightarrow x = 4\,212$

L: $(4\,212 | 1\,188)$

Menge Kupfer: 4 212 kg

Menge Zinn: 1 188 kg

c) Menge Kupfer: x

Menge Zinn: y

I $x + y = 4\,800$

II $\frac{35}{15} = \frac{x}{y}$

II $35y = 15x$

I $x = 4\,800 - y$

I in II:

$35y = 15 \cdot (4\,800 - y)$

$\Rightarrow y = 1\,440$

$y = 1\,440$ in I:

$x + 1\,440 = 4\,800$

$\Rightarrow x = 3\,360$

L: $(3\,360 | 1\,440)$

Menge Kupfer: 3 360 kg

Menge Zinn: 1 140 kg

Anhand realitätsnaher Sachverhalte lernen die Lernenden, Mischungs- und Verhältnisrechnungen anzusetzen und zu lösen. Verhältnisrechnen spielt auch an späterer Stelle (ähnliche Figuren, Strahlensätze) eine Rolle.

4 a) Menge Wassertemperatur 25°: x

Menge Wassertemperatur 65°: y

I $x + y = 100$

II $25x + 65y = 33 \cdot 100$

I $x = 100 - y$

I in II:

$25 \cdot (100 - y) + 65y = 3\,300$

$\Rightarrow y = 20$

$y = 20$ in I:

$x + 20 = 100$

$\Rightarrow x = 80$

L: $(80|20)$

Menge Wassertemperatur 25°: 80 l

Menge Wassertemperatur 65°: 20 l

b) Menge Orangensaft mit Fruchtanteil 60 %: x

Menge Orangensaft mit Fruchtanteil 20 %: y

I $x + y = 1$

II $60x + 20y = 30$

I $x = 1 - y$

I in II:

$60 \cdot (1 - y) + 20\,y = 30$

$\Rightarrow y = 0{,}75$

$y = 0{,}75$ in I:

$x + 0{,}75 = 1$

$\Rightarrow x = 0{,}25$

L: $(0{,}25|\,0{,}75)$

Menge Orangensaft mit Fruchtanteil 60 %: 0,25 l

Menge Orangensaft mit Fruchtanteil 20 %: 0,75 l

c) Menge Weizenmehl: x

Menge Roggenmehl: y

I $0{,}68x + 0{,}6y = 0{,}65 \cdot (x + y)$

II $0{,}6 \cdot (y + 60) + 0{,}68 \cdot (x - 60) = 0{,}62 \cdot (x + y)$

I $0{,}68x + 0{,}6y = 0{,}65x + 0{,}65y$

$\Rightarrow x = 1\frac{2}{3}y$

$x = 1\frac{2}{3}y$ in II:

$0{,}6 \cdot (y + 60) + 0{,}68 \cdot \left(1\frac{2}{3}y - 60\right) = 0{,}62 \cdot (x + y)$

$\Rightarrow y = 60$

$y = 60$ in I:

$0{,}68x + 0{,}6 \cdot 60 = 0{,}65 \cdot (x + 60)$

$\Rightarrow x = 100$

L: $(100|60)$

Menge Weizenmehl: 100 kg

Menge Roggenmehl: 60 kg

Geometrieaufgaben mit Gleichungssystemen lösen

L

Bei den geometrischen Aufgaben sollten die Schüler die wichtigsten Formeln kennen. Der sichere Umgang mit der Formelsammlung kann das selbstständige Arbeiten erleichtern.

1 Erklärung gemäß Beispiel

I $a = 3b$
II $440 = 2a + 2b$
I in II:
$440 = 3b + 2b$
$\Rightarrow b = 55$
$b = 55$ in I:
$a = 3 \cdot 55 = 165$
Länge Rechteck: 165 cm
Breite Rechteck: 55 cm

2 a) Länge Rechteck: a
Breite Rechteck: b
I $a = b + 24$
II $78 = 2a + 2b$
I in II:
$78 = 2 \cdot (b + 24) + 2b$
$\Rightarrow b = 7{,}5$
$b = 7{,}5$ in I:
$a = 7{,}5 + 24 = 31{,}5$
Länge Rechteck: 31,5 cm
Breite Rechteck: 7,5 cm

b) Länge Rechteck: a
Breite Rechteck: b
I $a = 1{,}5b + 4$
II $2a + 2b = 78$
I in II:
$2 \cdot (1{,}5b + 4) + 2b = 78$
$\Rightarrow b = 14$
$b = 14$ in I:
$a = 1{,}5 \cdot 14 + 4 = 25$
L: $(25|14)$
Länge Rechteck: 25 cm
Breite Rechteck: 14 cm

c) Länge Rechteck: a
Breite Rechteck: b
I $2 \cdot (a + b) = 40$
II $2 \cdot (2a + b) = 64$
I $2a = 40 - 2b$
I in II:
$2 \cdot (40 - 2b + b) = 64$
$\Rightarrow b = 8$
$b = 8$ in I:
$2 \cdot (a + 8) = 40$
$\Rightarrow a = 12$
Länge Rechteck: 12 cm
Breite Rechteck: 8 cm

3 a) Schenkel: a
Basis: b
I $2a + b = 50$
II $2a = 1{,}5b$
II in I:
$1{,}5b + b = 50$
$\Rightarrow b = 20$
$b = 20$ in II:
$2a = 1{,}5 \cdot 20$
$\Rightarrow a = 15$
Schenkel: 15 cm
Basis: 20 cm

b) Schenkel: a
Basis: b
I $2a = b + 4$
II $2a + b = 32$
I in II:
$b + 4 + b = 32$
$\Rightarrow b = 14$
$b = 14$ in I:
$2a = 14 + 4$
$\Rightarrow a = 9$
Schenkel: 9 cm
Basis: 14 cm

c) Schenkel: a
Basis: b
I $a = 2b$
II $2a + b = 72$
I in II:
$2 \cdot 2b + b = 72$
$\Rightarrow b = 14{,}4$
$b = 14{,}4$ in I
$a = 14{,}4 \cdot 2 = 28{,}8$
L: $(28{,}8|14{,}4)$
Schenkel: 28,8 cm
Basis: 14,4 cm

4 a) Basiswinkel: α
Winkel an der Spitze: γ
I $2\alpha + \gamma = 180$
II $\alpha = \gamma + 9$
II in I:
$2 \cdot (y + 9) + \gamma = 180$
$\Rightarrow \gamma = 54$
$y = 54$ in I:
$2\alpha + 54 = 180$
$\Rightarrow \alpha = 63$
Basiswinkel: 63°
Winkel an der Spitze: 54°

b) Basiswinkel: α
Winkel an der Spitze: γ
I $2\alpha + \gamma = 180$
II $\alpha = \gamma + 33$
II in I:
$2 \cdot (\gamma + 33) + \gamma = 180$
$\Rightarrow \gamma = 38$
$\gamma = 38$ in II:
$\alpha = 38 + 33$
$\Rightarrow \alpha = 71$
Basiswinkel: 71°
Winkel an der Spitze: 38°

c) Winkel: γ
Winkel: β
I $42 + \beta + \gamma = 180$
II $\gamma = \beta + 24$
II in I:
$42 + \beta + \beta + 24 = 180$
$\Rightarrow \beta = 57$
$\beta = 57$ in II:
$\gamma = 57 + 24 = 81$
Winkel: $\gamma = 81°$
Winkel: $\beta = 57°$

5 Erklärung gemäß Beispiel

I $2a + 2b = 42$
II $(a - 4) \cdot (b + 4) = a \cdot b - 4$
I $a = 21 - b$
I in II:
$(21 - b - 4) \cdot (b + 4) = (21 - b) \cdot b - 4$
$17b + 68 - b^2 - 4b = 21b - b^2 - 4$
$13b + 68 = 21b - 4$
$\Rightarrow b = 9$
$b = 9$ in I:
$a = 21 - 9 = 12$
Länge des ursprünglichen Rechtecks: 12 cm
Breite des ursprünglichen Rechtecks: 9 cm

6 a) Länge Rechteck: a
Breite Rechteck: b
I $(a - 3) \cdot (b + 5) = a \cdot b + 85$
II $(a + 5) \cdot (b - 3) = a \cdot b \cdot 11$
I $ab + 5a - 3b - 15 = ab + 85$
II $ab - 3a + 5b - 15 = ab - 11$
I $5a - 3b = 100 \quad | \cdot 3$
II $-3a + 5b = 4 \quad | \cdot 5$
I $15a - 9b = 300$
II $-15a + 25b = 20$
I + II:
$16b = 320$
$\Rightarrow b = 20$
$b = 20$ in I:
$5a - 3 \cdot 20 = 100$
$\Rightarrow a = 32$
L: $(32|20)$
Länge Rechteck: 32 cm
Breite Rechteck: 20 cm

b) Länge Rechteck: a
Breite Rechteck: b
I $a - 6 = b - 3$
II $(a - 6) \cdot (b - 3) + 126 = a \cdot b$
II $ab - 3a - 6b + 18 + 126 = ab$
$\Rightarrow -3a - 6b = -144$
I $a = b + 3$
I in II:
$-3 \cdot (b + 3) - 6b = -144$
$\Rightarrow b = 15$
$b = 15$ in I:
$a = 15 + 3 = 18$
L: $(18|15)$
Länge Rechteck: 18 cm
Breite Rechteck: 15 cm

L

1 a) Wird eine Zahl ins Quadrat erhoben, ist es egal, ob die Zahl positiv oder negativ gewesen ist. Deshalb haben quadratische Gleichungen in der Regel zwei Lösungen.

b)

$x^2 = 25$	$L = \{5; -5\}$	$x^2 - 3 = 6$	$L = \{3; -3\}$
$x^2 = 2{,}56$	$L = \{1{,}6; -1{,}6\}$	$b^2 = 196$	$L = \{14; -14\}$
$y^2 - 81 = 0$	$L = \{9; -9\}$	$x^2 = 0{,}04$	$L = \{0{,}2; -0{,}2\}$
$x^2 - 1{,}44 = 0$	$L = \{1{,}2; -1{,}2\}$	$a^2 = \frac{4}{9}$	$L = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$

2 a) Im Gegensatz zu den Gleichungen bei 1 steht vor der Variablen noch ein Faktor.

b)

$6x^2 - 12 = 138$	$\mid + 12$	Addiere auf beiden Seiten die gleiche Zahl.
$6x^2 = 150$	$\mid : 6$	Dividiere beide Seiten durch die gleiche Zahl.
$x^2 = 25$	$\mid \sqrt{\ }$	Ziehe auf beiden Seiten die Wurzel.
$x_{1/2} = \pm\sqrt{25}$		Berechne die Lösungen.
$x_1 = +\sqrt{25} = 5$		
$x_2 = -\sqrt{25} = -5$		
$6 \cdot 5^2 - 12 = 138$		Mache die Probe.
$6 \cdot (-5)^2 - 12 = 138$		

3 Erklärung gemäß Beispiel

a) $5x^2 = 45 \quad \mid : 5$
$x^2 = 9$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{9}$
$x_1 = +\sqrt{9} = 3 \quad x_2 = -\sqrt{9} = -3$
$L = \{3; -3\}$

b) $7x^2 = 2\,800 \quad \mid : 7$
$x^2 = 400$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{400}$
$x_1 = +\sqrt{400} = 20 \quad x_2 = -\sqrt{400} = -20$
$L = \{20; -20\}$

c) $4x^2 - 144 = 0 \quad \mid + 144$
$4x^2 = 144 \quad \mid : 4$
$x^2 = 36 \quad \mid \sqrt{\ }$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{36}$
$x_1 = +\sqrt{36} = 6 \quad x_2 = -\sqrt{36} = -6$
$L = \{6; -6\}$

d) $2y^2 - 50 = 0 \quad \mid + 50$
$2y^2 = 50 \quad \mid : 2$
$y^2 = 25 \quad \mid \sqrt{\ }$
$y_{1/2} = \pm\sqrt{25}$
$y_1 = +\sqrt{25} = 5 \quad y_2 = -\sqrt{25} = -5$
$L = \{5; -5\}$

e) $-y^2 + 25 = -75 \quad \mid -25$
$-y^2 = -100 \quad \mid \cdot (-1)$
$y^2 = 100 \quad \mid \sqrt{\ }$
$y_{1/2} = \pm\sqrt{100}$
$y_1 = +\sqrt{100} = 10 \quad y_2 = -\sqrt{100} = -10$
$L = \{10; -10\}$

f) $2x^2 - 242 = 0 \quad \mid + 242$
$2x^2 = 242 \quad \mid : 2$
$x^2 = 121 \quad \mid \sqrt{\ }$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{121}$
$x_1 = +\sqrt{121} = 11 \quad x_2 = -\sqrt{121} = -11$
$L = \{11; -11\}$

g) $6x^2 - 17 = 277 \quad \mid + 17$
$6x^2 = 294 \quad \mid : 6$
$x^2 = 49 \quad \mid \sqrt{\ }$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{49}$
$x_1 = +\sqrt{49} = 7 \quad x_2 = -\sqrt{49} = -7$
$L = \{7; -7\}$

h) $-0{,}3x^2 - 17 = -36{,}2 \quad \mid + 17$
$-0{,}3x^2 = -19{,}2 \quad \mid : (-0{,}3)$
$x^2 = 64 \quad \mid \sqrt{\ }$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{64}$
$x_1 = +\sqrt{64} = 8 \quad x_2 = -\sqrt{64} = -8$
$L = \{8; -8\}$

i) $0{,}3x^2 - 24{,}3 = 0 \quad \mid + 24{,}3$
$0{,}3x^2 = 24{,}3 \quad \mid : 0{,}3$
$x^2 = 81 \quad \mid \sqrt{\ }$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{81}$
$x_1 = +\sqrt{81} = 9 \quad x_2 = -\sqrt{81} = -9$
$L = \{9; -9\}$

j) $92{,}5 = 12{,}5 + 5y^2 \quad \mid - 12{,}5$
$80 = 5y^2 \quad \mid : 5$
$16 = y^2 \quad \mid \sqrt{\ }$
$y_{1/2} = \pm\sqrt{16}$
$y_1 = +\sqrt{16} = 4 \quad y_2 = -\sqrt{16} = -4$
$L = \{4; -4\}$

Schrittweise können die Lernenden das Lösen von reinquadratischen Gleichungen nachvollziehen. Wichtig sind dabei die Bestimmung der Lösungsmenge und das Rechnen im Kopf. Die Lernenden sollen auch erkennen, dass negative Lösungen – gerade bei geometrischen Berech-nungen – unsinnig sein können.
Im nächsten Schritt kommen Fallunterscheidungen hinzu. Die Lernenden wenden ihre Lösungsstrategie an.

k) $0,25x^2 - 9 = 27 \quad | + 9$
$0,25x^2 = 36 \quad | : 0,25$
$x^2 = 144 \quad | \sqrt{}$
$x_{1/2} = \pm \sqrt{144}$
$x_1 = + \sqrt{144} = 12 \qquad x_2 = - \sqrt{144} = -12$
$L = \{12; -12\}$

l) $1,4b^2 - 2,3 = -1,95 \quad | + 2,3$
$1,4b^2 = 0,35 \quad | : 1,4$
$b^2 = 0,25 \quad | \sqrt{}$
$b_{1/2} = \pm \sqrt{0,25}$
$b_1 = + \sqrt{0,25} = 0,5 \qquad b_2 = - \sqrt{0,25} = -0,5$
$L = \{0,5; -0,5\}$

4 Ⓐ $A = a^2$
$36 = a^2 \quad | \sqrt{}$
$a_{1/2} = \pm \sqrt{36}$
$a_1 = + \sqrt{36} = 6$
$a_2 = - \sqrt{36} = -6$
$L = \{6; -6\}$

Seitenlänge a: 6 cm

Ⓑ $A = 6 \cdot a^2$
$486 = 6a^2 \quad | : 6$
$81 = a^2 \quad | \sqrt{}$
$a_{1/2} = \pm \sqrt{81}$
$a_1 = + \sqrt{81} = 9$
$a_2 = - \sqrt{81} = -9$
$L = \{9; -9\}$

Seitenlänge a: 9 m

Ⓒ $A = r^2 \cdot 3,14$
$1\,017,36 = r^2 \cdot 3,14 \quad | : 3,14$
$324 = r^2 \quad | \sqrt{}$
$r_{1/2} = \pm \sqrt{324}$
$r_1 = + \sqrt{324} = 18$
$r_2 = - \sqrt{324} = -18$
$L = \{18; -18\}$

Radius r: 18 dm

Bei diesen Aufgaben sind die negativen Lösungen nicht sinnvoll, da hier keine negativen Seitenlängen bzw. kein negativer Radius möglich ist.

5 Erklärung gemäß Beispiel

a) $x^2 = 144 \quad | \sqrt{}$
$x_{1/2} = \pm \sqrt{144}$
$x_1 = 12 \qquad x_2 = -12$
Für $x^2 > 0$ gibt es zwei Lösungen.
$L = \{12; -12\}$

b) $y^2 = -56$
Für $y^2 < 0$ gibt es keine Lösung.
L: Ø

c) $15 = y^2 + 15 \quad | - 15$
$0 = y^2$
$y_{1/2} = \pm \sqrt{0}$
$y = 0$
Für $y^2 = 0$ gibt es eine Lösung.
$L = \{0\}$

d) $x^2 = -\frac{4}{9} \quad | \sqrt{}$
Für $x^2 < 0$ gibt es keine Lösung.
L: Ø

e) $2x^2 + 2 = 0 \quad | -2$
$2x^2 = -2 \quad | : 2$
$x^2 = -1$
Für $x^2 < 0$ gibt es keine Lösung.
L = Ø

f) $\frac{1}{3} m^2 - \frac{1}{3} = 0 \quad | + \frac{1}{3}$
$\frac{1}{3} m^2 = \frac{1}{3} \quad | : \frac{1}{3}$
$m^2 = 1 \quad | \sqrt{}$
$m = \pm \sqrt{1}$
$m_1 = 1 \qquad m_2 = -1$
Für $m^2 > 0$ gibt es zwei Lösungen.
$L = \{1; -1\}$

g) $-4,5 + z^2 = 4,5 \quad | + 4,5$
$z^2 = 9$
$z_{1/2} = \pm \sqrt{9}$
$z_1 = 3 \qquad z_2 = -3$
Für $z^2 > 0$ gibt es zwei Lösungen.
$L = \{3; -3\}$

h) $5x^2 - 16 = -16 \quad | + 16$
$5x^2 = 0 \quad | : 5$
$x^2 = 0 \quad | \sqrt{}$
$x_{1/2} = \pm \sqrt{0}$
$x = 0$
Für $x^2 = 0$ gibt es eine Lösung.
$L = \{0\}$

6 a) $10z^2 - 810 = 0 \quad | + 810$

$10z^2 = 810 \quad | : 10$

$z^2 = 81$

$z_{1/2} = \pm\sqrt{81}$

$z_1 = 9 \quad z_2 = -9$

Für $z^2 > 0$ gibt es zwei Lösungen.

$L = \{9; -9\}$

b) $3y^2 + 6 = -3 \quad | -5$

$3y^2 = -9 \quad | : 3$

$y^2 = 3$

Für $y^2 < 0$ gibt es keine ^Lösung.

$L = \emptyset$

c) $\frac{x^2}{4} = 16 \quad | \cdot 4$

$x^2 = 64 \quad | \sqrt{\ }$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{64}$

$x_1 = 8 \quad x_2 = -8$

Für $x^2 > 0$ gibt es zwei Lösungen.

$L = \{8; -8\}$

d) $1 - 12m^2 = 1 - 16m^2 \quad | - 1$

$-12m^2 = -16m^2 \quad | + 16\,m^2$

$4m^2 = 0 \quad | : 4$

$m^2 = 0$

$m_{1/2} = \pm\sqrt{0}$

$m = 0$

Für $m^2 = 0$ gibt es eine Lösung.

$L = \{0\}$

e) $-9x^2 + 0{,}8 = 169{,}8 - 10x^2 \quad | + 10x^2$

$x^2 + 0{,}8 = 169{,}8 \quad | - 0{,}8$

$x^2 = 169 \quad | \sqrt{\ }$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{169}$

$x_1 = 13 \quad x_2 = -13$

Für $x^2 > 0$ gibt es zwei Lösungen.

$L = \{13; -13\}$

f) $2z^2 + 2 = 3z^2 + 3 \quad | - 3z^2$

$-z^2 + 2 = 3 \quad | - 2$

$-z^2 = 1 \quad | \cdot (-1)$

$z^2 = -1$

Für $z^2 < 0$ gibt es keine Lösung.

$L = \emptyset$

g) $5a^2 + 127 = 2a^2 + 100 \quad | -2a^2$

$3a^2 + 127 = 100 \quad | - 127$

$3a^2 = -27 \quad | : 3$

$a^2 = -9$

Für $a^2 < 0$ gibt es keine Lösung.

$L = \emptyset$

h) $30t^2 + 10 + 3t^2 = 37t^2 - 26$

$33t^2 + 10 = 37t^2 - 26 \quad | - 37t^2$

$-4t^2 + 10 = -26 \quad | - 10$

$-4t^2 = -36 \quad | : (-4)$

$t^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$

$t_{1/2} = \pm\sqrt{9}$

$t_1 = 3 \quad t_2 = -3$

Für $t^2 > 0$ gibt es zwei Lösungen.

$L = \{3; -3\}$

i) $8x^2 + 21 = -x^2 - 5 \quad | + x^2$

$9x^2 + 21 = -5 \quad | - 21$

$9x^2 = -16 \quad | : 9$

$x^2 = -\frac{16}{9}$

Für $x^2 < 0$ gibt es keine Lösung.

$L = \emptyset$

7 a) $2(3 + x^2) = 24$

$6 + 2x^2 = 24$

$\Rightarrow x^2 = 9$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{9}$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$

Für $x^2 > 0$ gibt zwei Lösungen.

$L = \{3; -3\}$

b) $45 - 4z^2 = 0{,}5(z^2 - 54)$

$45 - 4z^2 = 0{,}5z^2 - 27$

$\Rightarrow z^2 = 16 \quad | \sqrt{\ }$

$z_{1/2} = \pm\sqrt{16}$

$z_1 = 4 \quad z_2 = -4$

Für $z^2 > 0$ gibt zwei Lösungen.

$L = \{4; -4\}$

c) $4b^2 + b^2 - 13 = (3 + b^2) \cdot 4$

$5b^2 - 13 = 12 + 4b^2$

$\Rightarrow b^2 = 25 \quad | \sqrt{}$

$b_{1/2} = \pm \sqrt{25}$

$b_1 = 5 \qquad b_2 = -5$

Für $b^2 > 0$ gibt zwei Lösungen.

L = {5; –5}

d) $\frac{1}{2}(6 - s^2) + 37{,}5 - 4^2 = 0$

$3 - 0{,}5s^2 + 37{,}5 - 4s^2 = 0$

$\Rightarrow s^2 = 9 \quad | \sqrt{}$

$s_{1/2} = \pm \sqrt{9}$

$s_1 = 3 \qquad s_2 = -3$

Für $s^2 > 0$ gibt zwei Lösungen.

L = {3; –3}

e) $(x^2 + 16) : 4 + 0{,}25x^2 = -20$

$0{,}25x^2 + 4 + 0{,}25x^2 = -20$

$\Rightarrow x^2 = -48$

Für $x^2 < 0$ gibt es keine Lösung.

L = Ø

f) $(5{,}5a^2 - 3{,}5) \cdot 1{,}5 = a^2 + 1{,}5\,(5{,}5a^2 - 3{,}5)$

$8{,}25a^2 - 5{,}25 = a^2 + 8{,}25\,a^2 - 5{,}25$

$8{,}25a^2 - 5{,}25 = 9{,}25a^2 - 5{,}25$

$\Rightarrow a^2 = 0 \quad | \sqrt{}$

$a_{1/2} = \pm \sqrt{0}$

$a = 0$

Für $a^2 = 0$ gibt es eine Lösung.

L = {0}

8 Seitenlänge einer Platte: a

$30 \cdot a \cdot a = 10{,}8 \quad | : 30$

$a^2 = 0{,}36 \quad | \sqrt{}$

$a_{1/2} = \pm \sqrt{0{,}36}$

$a_1 = 0{,}6 \qquad a_2 = -0{,}6$

Für $a^2 > 0$ gibt zwei Lösungen.

L = {0,6; –0,6}

Seitenlänge Platte: 0,60 m

Die negative Lösung ergibt hier keinen Sinn.

9 Beispiele:

	a)	b)	c)	d)
zwei Lösungen	$x^2 - 64 = 0$	$6y^2 = 24$	$4x^2 + 2 \cdot (-18) = 0$	$\frac{1}{4}x^2 - 4 \cdot 4 = 0$
eine Lösung	$x^2 - 0 = 0$	$6y^2 = 0$	$4x^2 + 2 \cdot 0 = 0$	$\frac{1}{4}x^2 - 4 \cdot 0 = 0$
keine Lösung	$x^2 + 64 = 0$	$6y^2 = -6$	$4x^2 + 2 \cdot 18 = 0$	$\frac{1}{4}x^2 - 4 \cdot (-4) = 0$

10 Ⓐ $x^2 : 2 + 20 = 401 : 2$

$\Rightarrow x^2 = 361 \quad | \sqrt{}$

$x_{1/2} = \pm \sqrt{361}$

$x_1 = 19 \qquad x_2 = -19$

Für $x^2 > 0$ gibt zwei Lösungen.

L = {19; –19}

Ⓑ $(x^2 - 23) \cdot 4 = 484$

$4x^2 - 92 = 484$

$\Rightarrow x^2 = 144 \quad | \sqrt{}$

$x_{1/2} = \pm \sqrt{144}$

$x_1 = 12 \qquad x_2 = -12$

Für $x^2 > 0$ gibt zwei Lösungen.

L = {12; –12}

Ⓒ $4y^2 - 49 = 2y^2 + 49$

$\Rightarrow y = 49 \quad | \sqrt{}$

$y_{1/2} = \pm \sqrt{49}$

$y_1 = 7 \qquad y_2 = -7$

Für $y^2 > 0$ gibt zwei Lösungen.

L = {7; –7}

11 Beispiele:

a) L = {–3; 3}

$x^2 - 9 = 0$

$5x^2 - 45 = 0$

$2x^2 + 16 = 34$

b) L = {0}

$5y^2 = 0$

$3y^2 - 6 = -6$

$0{,}5y^2 + 8 = 8$

c) L = {–0,5; 0,5}

$x^2 = 0{,}25$

$4x^2 - 1 = 0$

$2x^2 - 4 = -3$

L

1 Terme umformen

a) Ⓐ $6 \cdot (4x + 10) - 4 \cdot (2x + 12) - 2x$
$= (24x + 60) - (8x - 48) - 2x$
$= 24x + 60 - 8x + 48 - 2x$
$= 14x + 108$

Ⓑ $22y - (4{,}5 + 2{,}1y) + (14{,}4y - 28{,}4) : 4$
$= 22y - 4{,}5 - 2{,}1y + 3{,}6y - 7{,}1$
$= 23{,}5y - 11{,}6$

b) Ⓐ $(x - 7) \cdot (y + 8)$
$= xy + 8x - 7y - 54$

Ⓑ $(a - 2{,}5) \cdot (4 - b)$
$= 4a - ab - 10 + 2{,}5b$

2 Gleichungen wertgleich umformen

a) Ⓐ
$$\begin{aligned} 27 - (6 - 5y) \cdot 2 &= 9 \cdot (8 - 10y) + 19y + 24 \\ 27 - 12 - 10y &= 72 - 90y + 19y + 24 \\ 15 + 10y &= 96 - 71y \quad &&| + 71y \\ 15 + 81y &= 96 &&| - 15 \\ 81y &= 81 &&| : 81 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Ⓑ
$$\begin{aligned} 1{,}2 \cdot (16x - 8) - 3{,}6 \cdot (3x + 9) &= 9{,}6x - 48 \\ (19{,}2x - 9{,}6) - (10{,}8x + 32{,}4) &= 9{,}6x - 48 \\ 19{,}2x - 9{,}6 - 10{,}8x - 32{,}4 &= 9{,}6x - 48 \\ 8{,}4x - 42 &= 9{,}6x - 48 \quad &&| - 9{,}6x \\ -1{,}2x - 42 &= -48 &&| + 42 \\ -1{,}2x &= -6 &&| : (-1{,}2) \\ x &= 5 \end{aligned}$$

b) Ⓐ
$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{3x}{5} - 3 &= \frac{3x}{10} + 1 \quad &&| \cdot 10 \\ \frac{{}^{5}\cancel{10}x}{\cancel{2}_1} + \frac{{}^{2}\cancel{10} \cdot 3x}{\cancel{5}_1} - 10 \cdot 3 &= \frac{{}^{1}\cancel{10} \cdot 3x}{\cancel{10}_1} + 10 \cdot 1 \\ 5x + 6x - 30 &= 3x + 10 \\ 11x - 30 &= 3x + 10 &&| - 3x \\ 8x - 30 &= 10 &&| + 30 \\ 8x &= 40 &&| : 8 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Ⓑ
$$\begin{aligned} \frac{6x}{5} - \frac{4\,(x - 2)}{3} - 6x + (x + 2) \cdot 4 &= 0 \quad &&| \cdot 15 \\ \frac{{}^{3}\cancel{15} \cdot 6x}{\cancel{5}_1} - \frac{{}^{3}\cancel{15} \cdot 4\,(x - 2)}{\cancel{3}_1} - 15 \cdot 6x + 15 \cdot (x + 2) \cdot 4 &= 0 \\ 18x - 20\,(x - 2) - 90x + 60x + 120 &= 0 \\ 18x - 20x + 40 - 90x + 60x + 120 &= 0 \\ -32x + 160 &= 0 &&| - 160 \\ -32x &= -160 &&| : (-32) \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Die wesentlichen Inhalte des Kapitels sind erarbeitet. Inwieweit sind die Lernenden darin fit? Wie unterschiedlich ist der Lernstand? Die Zwischenrunde bietet die Möglichkeit, das durch zwei Anforderungsniveaus differenziert zu erfassen. Auch die Lernenden können lernen, sich selbst einzuschätzen. Die Lösungen sind dazu im Buch angegeben. Ferner findet sich im Internet ein entsprechender Selbsteinschätzungsbogen. Unter Umständen müssen Inhalte nochmals aufgegriffen werden, um einen gesicherten Wissensstand zu erreichen.

3 Gleichungen aufstellen und lösen

a) Beispiel Rechenfrage:

Wie viel Geld hat jede von ihnen gesammelt?

	Geldbetrag
Sabine	0,5x
Lena	x
Karin	0,5x + 8
Spende Mutter	10
insgesamt	200

Gleichung: $0{,}5x + x + 0{,}5x + 8 + 10 = 200$

$$2x + 18 = 200$$
$$\Rightarrow x = 91$$

Geldbetrag: Sabine: 45,50 €

Lena: 91,00 €

Karin: 53,50 €

b) Beispiel:

$$(6x + 12) : 3 = (8x - 4) : 2$$
$$2x + 4 = 4x - 2$$
$$\Rightarrow x = 3$$

4 Bruchgleichungen aufstellen und lösen

a) Ⓐ $\frac{9}{x} + 4 = \frac{27}{x} - 2$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$$\frac{9}{x} + 4 = \frac{27}{x} - 2 \quad | \cdot x$$
$$\frac{{}^{1}\cancel{x} \cdot 9}{\cancel{x}_1} + x \cdot 4 = \frac{{}^{1}\cancel{x} \cdot 27}{\cancel{x}_1} - x \cdot 2$$
$$9 + 4x = 27 - 2x$$
$$\Rightarrow x = 3 \qquad L = \{3\}$$

Ⓑ $\frac{x+2}{x-3} - \frac{x+8}{x-5} = 0$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{3; 5\}$

Beispiel: über Kreuz multiplizieren

$$\frac{x+2}{x-3} = \frac{x+8}{x-5}$$
$$(x + 2) \cdot (x - 5) = (x + 8) \cdot (x - 3)$$
$$x^2 - 5x + 2x - 10 = x^2 - 3x + 8x - 24$$
$$x^2 - 3x - 10 = x^2 + 5x - 24 \quad | - x^2$$
$$-3x - 10 = 5x - 24$$
$$\Rightarrow x = 1{,}75 \qquad L = \{1{,}75\}$$

b) $\frac{10}{x-2} = \frac{25}{x+1}$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{2; -1\}$

Beispiel: über Kreuz multiplizieren

$$\frac{10}{x-2} = \frac{25}{x+1}$$
$$10(x + 1) = 25(x - 2)$$
$$10x + 10 = 25x - 50$$
$$\Rightarrow x = 4 \qquad L = \{4\}$$

5 Gleichungen mit Brüchen lösen

a) Ⓐ $A = r^2 \cdot 3{,}14 \qquad d = 2 \cdot r$

$176{,}625 = r^2 \cdot 3{,}14 \qquad = 2 \cdot 7{,}5\text{ cm}$

$\Rightarrow r = 7{,}5\text{ (cm)} \qquad = 15\text{ cm}$

Ⓑ $A = \frac{a + c}{2} \cdot h$

$229{,}5 = \frac{30{,}4 + 20{,}6}{2} \cdot h$

$229{,}5 = 25{,}5 \cdot h$

$\Rightarrow 9\text{ (cm)} = h$

Ⓒ $V = r^2 \cdot 3{,}14 \cdot h$

$1\,240{,}3 = 5^2 \cdot 3{,}14 \cdot h$

$1{,}240{,}3 = 78{,}5 \cdot h$

$\Rightarrow 15{,}8\text{ (cm)} = h$

Ⓓ $V = V_{Qu} + V_P$

$= a \cdot b \cdot c + \frac{c \cdot h}{2} \cdot h_k$

$= 25 \cdot 20 \cdot 5 + \frac{15 \cdot 5}{2} \cdot 20$

$= 2\,500 + 750$

$= 3\,250\text{ (cm}^3\text{)}$

b) Ⓐ $P = G \cdot p$

$98 = G \cdot 0{,}028$

$\Rightarrow 3\,500 = G$

Neues Gehalt: 3 500 €

Ⓑ $K = \frac{Z \cdot 12}{p \cdot 8}$

$= \frac{700 \cdot 12}{0{,}021 \cdot 8}$

$50\,000 = K$

Höhe Darlehen: 50 000 €

Ⓒ $v = \frac{s}{t} \qquad 9{,}1\,\frac{m}{s} \cdot 3{,}6 = 32{,}76\,\frac{km}{h}$

$= \frac{800}{88}$

$\approx 9{,}1\left(\frac{m}{s}\right)$

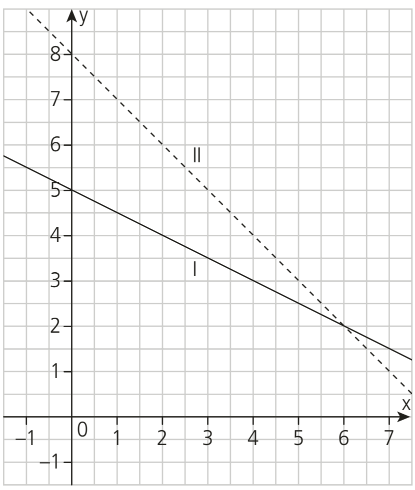
Der Autofahrer hat die zulässige Höchstgeschwindigkeit eingehalten.

6 Gleichungssysteme verschiedenartig lösen

a) Ⓐ I $x + 2y = 10 \qquad \Rightarrow y = -0{,}5x + 5$

II $x + y = 8 \qquad \Rightarrow y = -x + 8$

Ⓑ



L: $(6|2)$

b) Ⓐ I $3x - 2y = 4$

II $3x - y = 5 \quad | \cdot (-1)$

II $-3x + y = -5$

I + II:

$-y = -1 \quad | \cdot (-1)$

$\Rightarrow y = 1$

y = 1 in I:

$3x - 2 \cdot 1 = 4$

$\Rightarrow x = 2$

L: $(2|1)$

Ⓑ I $8y + 10x = 4$

II $14y + 10x = 22$

I $10x = -8y + 4$

II $10x = -14y + 22$

I = II:

$-8y + 4 = -14y + 22$

$\Rightarrow y = 3$

y = 3 in I:

$8 \cdot 3 + 10x = 4$

$\Rightarrow x = -2$

L: $(-2|3)$

7 Sachaufgaben mit Gleichungssystemen lösen

a) Gleichungssystem:

Geranien: x Petunien: y

I $x + y = 16$

II $3x + 2y = 38$

I $x = -y + 16$

I in II:

$3 \cdot (-y + 16) + y = 38$

$\Rightarrow y = 10$

$y = 10$ in I:

$x + 10 = 16$

$\Rightarrow x = 6$

L: $(6|10)$

Anzahl Geranien: 6

Anzahl Petunien: 10

b) Gleichungssystem

Erwachsene: x Kind: y

I $2x + 3y = 41{,}5$

II $x + 2y = 24$

II $x = -2y + 24$

II in I:

$2\,(-2y + 24) + 3y = 41{,}5$

$\Rightarrow y = 6{,}5$

$y = 6{,}5$ in II:

$x + 2 \cdot 6{,}5 = 24$

$\Rightarrow x = 11$

L: $(11|6{,}5)$

Preis Tageskarte: Erwachsener: 11,00 €

Kind: 6,50 €

8 Mischungsaufgaben mit Gleichungssystemen lösen

a) Gleichungssystem:

Preis Sorte A: x

Preis Sorte B: y

I $3x + 2y = 5 \cdot 8{,}8$

II $3x + 5y = 8 \cdot 9{,}25$

I $3x = -2y + 44$

II $3x = -5y + 74$

I = II:

$-2y + 44 = -5y + 74$

$\Rightarrow y = 10$

$y = 10$ in I:

$3x + 2 \cdot 10 = 44$

$\Rightarrow x = 8$

L: $(8|10)$

Preis pro Kilogramm: Sorte A: 8 €

Sorte B: 10 €

b) Gleichungssystem:

Preis Sorte „Exquisit“: x

Preis Sorte „Premium“: y

I $24x + 16y = (24 + 16) \cdot 10{,}8$

II $16x + 24y = (16 + 24) \cdot 9{,}8$

I $24x + 16y = 432$

II $16x + 24y = 392$

$\Rightarrow x = -1{,}5y + 24{,}5$

II in I:

$24\,(-1{,}5y + 24{,}5) + 16y = 432$

$\Rightarrow y = 9{,}75$

$y = 9{,}75$ in I einsetzen:

$24x + 16 \cdot 9{,}75 = 432$

$\Rightarrow x = 11{,}5$

L: $(11{,}5|9{,}75)$

Preis pro kg: Sorte „Exquisit“: 11,50 €

Sorte „Premium“: 9,75 €

9 Geometrieaufgaben mit Gleichungssystemen lösen

a) Gleichungssystem:

I $2a + 2b = 100$

II $a = b + 10$

II in I:

$2(b + 10) + 2b = 100$

$\Rightarrow b = 20$

$b = 20$ in II:

$a = 20 + 10$

$\Rightarrow a = 30$

L: $(30|20)$

gewählte Seitenlängen: 30 cm und 20 cm

b) Gleichungssystem

I $a = c + 3$

II $25{,}2 = \frac{a + c}{2} \cdot 4{,}2$

I in II:

$25{,}2 = \frac{c + 3 + c}{2} \cdot 4{,}2$

$25{,}2 = (2c + 3) \cdot 2{,}1$

$\Rightarrow 4{,}5 = c$

$c = 4{,}5$ in I:

$a = 4{,}5 + 3$

$\Rightarrow a = 7{,}5$

L: $(7{,}5|4{,}5)$

Länge Seite a: 7,5 cm

Länge Seite c: 4,5 cm

10 Reinquadratische Gleichungen lösen

a) Ⓐ $x^2 = 42{,}25$

$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{42{,}25}$

$x_1 = 6{,}5 \quad x_2 = -6{,}5$

$L = \{6{,}5; -6{,}5\}$

Ⓑ $16y^2 = 3\,844$

$\Rightarrow y_{1/2} = \pm\sqrt{240{,}25}$

$y_1 = 15{,}5 \quad y_2 = -15{,}5$

$L = \{15{,}5; -15{,}5\}$

Ⓒ $5{,}5a^2 - 12{,}22 = 560$

$\Rightarrow a_{1/2} = \pm\sqrt{104{,}04}$

$a_1 = 10{,}2 \quad a_2 = -10{,}2$

$L = \{10{,}2; -10{,}2\}$

Ⓓ $17x^2 + 65 = 12x^2 + 110$

$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{9}$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$

$L = \{3; -3\}$

b) $180 = a \cdot a + 2a \cdot 2a$

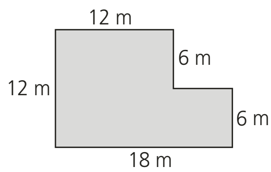
$180 = a^2 + 4a^2$

$180 = 5a^2$

$\Rightarrow a_{1/2} = \pm\sqrt{36}$

$a = 6$ (cm)

Außenmaße:



Z

Selbsteinschätzungsbogen

Erhältlich unter www.ccbuchner.de/medien (60009-07)

Diese beiden Seiten dienen dem Üben und Vertiefen der neuen Lerninhalte. Dabei sollen die Lernenden überwiegend eigenständig arbeiten. Um das zu ermöglichen, wird zum einen das Merkwissen „Auf einen Blick“ nochmals in der linken Spalte zusammengefasst, zum anderen stehen die Lösungen am Ende des Buches zur Selbstkontrolle zur Verfügung.

L

1 a) $9x - 2 + 17 - 8x - 12x - 19$
$= -11x - 4$

b) $9y - 5 - 7y - 18 + 12y - 12 - 23y$
$= -9y - 35$

c) $2\,(3x - 2) - (2 + 4x) \cdot 3$
$= 6x - 4 - 6 - 12x$
$= -6x - 10$

d) $(2{,}8y - 4{,}2) \cdot 3 - (-4{,}9 + 2{,}2y)$
$= 5{,}4y - 12{,}6 + 4{,}9 - 2{,}2y$
$= 6{,}2y - 7{,}7$

e) $4\left(1{,}5 + \frac{3}{4}x\right) - (2 - x) \cdot 4 - \frac{3}{5}$
$= 6 + 3x - 8 + 4x - 0{,}6$
$= 7x - 2{,}6$

f) $(12x - 18) \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{9} \cdot (27x - 36)$
$= 2x - 3 + 6x - 8$
$= 8x - 11$

2 a) $(x + 3) \cdot (y + 2)$
$= xy + 2x + 3y + 6$

b) $(4 + a) \cdot (3 + b)$
$= 12 + 4b + 3a + ab$

c) $(x - 4) \cdot (y + 2)$
$= xy + 2x - 4y - 8$

d) $(6 + a) \cdot (b - 5)$
$= 6b - 30 + ab - 5a$

e) $(a - 7) \cdot (9 - b)$
$= 9a - ab - 63 + 7b$

f) $(8 - x) \cdot (1{,}5 - y)$
$= 12 - 8y - 1{,}5x + xy$

g) $(2x - 3) \cdot (3y + 6)$
$= 6xy + 12x - 9y - 18$

h) $(7x + 2) \cdot (7y - 3)$
$= 49xy - 21x + 14y - 6$

3

		–3	–2	–1	0	1	2
a)	$\frac{5}{x}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{2}$	–5	–	5	$\frac{5}{2}$
b)	$\frac{2}{x-2}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	–1	–2	–
c)	$\frac{6}{2x-8}$	$-\frac{6}{14}$	$-\frac{6}{12}$	$-\frac{6}{10}$	$-\frac{6}{8}$	–1	$-\frac{6}{4}$
d)	$\frac{3}{(x-1)(x+1)}$	$\frac{3}{8}$	1	–	–3	–	1

4 a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{9}{x} + \frac{6}{2x} = -4 \quad | \cdot x$

$\frac{^1\cancel{x} \cdot 9}{\cancel{x}_1} + \frac{^1\cancel{x} \cdot \cancel{6}^3}{\cancel{2x}_1} = -4 \cdot x$

$9 + 3 = -4x$

$\Rightarrow -3 = x$

b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{7}{3x} - \frac{5}{6x} = -\frac{1}{4} \quad | \cdot 6x$

$\frac{^2\cancel{6x} \cdot 7}{\cancel{3x}_1} - \frac{^1\cancel{6x} \cdot 5}{\cancel{6x}_1} = -\frac{^{1,5}\cancel{6}x \cdot 1}{\cancel{4}_1}$

$14 - 5 = -1{,}5x$

$\Rightarrow -6 = x$

c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{9}{2x} - 2 = \frac{3}{2x} + 4 \quad | \cdot 2x$

$\frac{^1\cancel{2x} \cdot 9}{\cancel{2x}_1} - 2x \cdot 2 = \frac{^1\cancel{2x} \cdot 3}{\cancel{2x}_1} + 2x \cdot 4$

$9 - 4x = 3 + 8x$

$\Rightarrow x = 0{,}5$

d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{7}{3} + \frac{1 - 12x}{3x} = \frac{7}{x} \quad | \cdot 3x$

$\frac{^1\cancel{3}x \cdot 7}{\cancel{3}_1} + \frac{^1\cancel{3x} \cdot (1 - 12x)}{\cancel{3x}_1} = \frac{3\cancel{x}^1 \cdot 7}{\cancel{x}_1}$

$7x + 1 - 12x = 21$

$-5x + 1 = 21$

$\Rightarrow x = -4$

e) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$

$\frac{100}{x + 2} - 1 = 9 \quad | \cdot (x + 2)$

$\frac{^1\cancel{(x + 2)} \cdot 100}{\cancel{x + 2}_1} - (x + 2) \cdot 1 = (x + 2) \cdot 9$

$100 - x - 2 = 9x + 18$

$98 - x = 9x + 18$

$\Rightarrow x = 8$

f) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-4; 3\}$

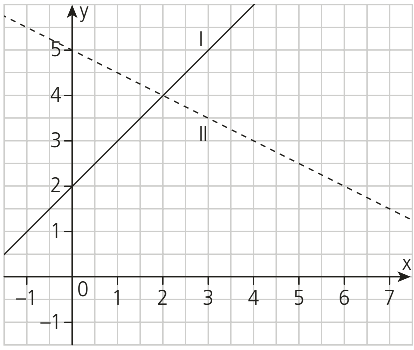
$\frac{4}{4 + x} = \frac{2}{x - 3}$

$4 \cdot (x - 3) = 2 \cdot (4 + x)$

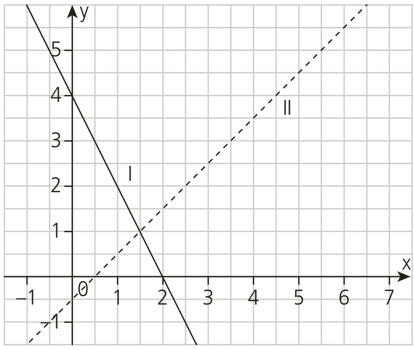
$4x - 12 = 8 + 2x$

$\Rightarrow x = 10$

5 a) I $y - x = 2$
II $y - 5 = -0{,}5x$
I $y = x + 2$
II $y = -0{,}5x + 5$
Schnittpunkt:
$S(2|4)$



b) I $y - 4 = -2x$
II $-0{,}5 - y = -x$
I $y = -2x + 4$
II $y = x - 0{,}5$
Schnittpunkt:
$S(1{,}5|1)$



6 a) I $y = 8x - 4$
II $y = 14 + 3x$
I = II:
$8x - 4 = 14 + 3x$
$\Rightarrow x = 3{,}6$
$x = 3{,}6$ in I:
$y = 8 \cdot 3{,}6 - 4$
$\Rightarrow y = 24{,}8$
L: $(3{,}6|24{,}8)$

b) I $2y + 3x = 12$
II $y = 2x - 15$
II in I:
$2 \cdot (2x - 15) + 3x = 12$
$\Rightarrow x = 6$
$x = 6$ in I:
$2y + 3 \cdot 6 = 12$
$\Rightarrow y = -3$
L: $(6|-3)$

c) I $0{,}5x + y = 10$
II $-2x - y = -13$
I + II:
$-1{,}5x = -3$
$\Rightarrow x = 2$
$x = 2$ in I:
$0{,}5 \cdot 2 + y = 10$
$\Rightarrow y = 9$
L: $(2|9)$

d) I $22 = 4y + 2x$
II $4y + 5x = 31$
I $-4y = 2x - 22$
II $4y = -5x + 31$
I + II:
$0 = -3x + 9$
$\Rightarrow x = 3$
$x = 3$ in I:
$22 = 4y + 2 \cdot 3$
$\Rightarrow 4 = y$
L: $(3|4)$

7 a) $x^2 = 169$
$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{169}$
$x_1 = 13 \qquad x_2 = -13$
$L = \{13; -13\}$

b) $4x^2 = 225$
$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{56{,}25}$
$x_1 = 7{,}5 \qquad x_2 = -7{,}5$
$L = \{7{,}5; -7{,}5\}$

c) $5y^2 - 38 = 682$
$\Rightarrow y_{1/2} = \pm\sqrt{144}$
$y_1 = 12 \qquad y_2 = -12$
$L = \{12; -12\}$

d) $3y^2 + 4 = 5y^2 - 68$
$\Rightarrow y_{1/2} = \pm\sqrt{36}$
$y_1 = 6 \qquad y_2 = -6$
$L = \{6; -6\}$

8 a) $A_R = 8 \cdot 6$
$= 48\ (cm^2)$

b) $A_R = (8 - x) \cdot (6 + y)$
$= 48 + 8y - 6x - xy$

c) $A_R = 6 \cdot 9$
$= 54\ (cm^2)$

9 a)
$$\begin{aligned} -9 \cdot (1 - x) + 15x &= 16 \cdot (x + 4{,}5) - 65 \\ -9 + 9x + 15x &= 16x + 72 - 65 \\ -9 + 24x &= 16x + 7 && \mid -16x \\ -9 + 8x &= 7 && \mid +9 \\ 8x &= 16 && \mid :8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 28y - (3 - 4y) \cdot 10 &= -40 + 6 \cdot (y - 7) - 42y \\ 28y - 30 + 40y &= -40 + 6y - 42 - 42y \\ 68y - 30 &= -82 - 36y && \mid +36y \\ 104y - 30 &= -82 && \mid +30 \\ 104y &= -52 && \mid :104 \\ y &= -0{,}5 \end{aligned}$$

c) $82 - (44{,}5 + 0{,}625x) : 0{,}25 = (-2) \cdot (-6{,}5x + 17)$

$$\begin{aligned} 82 - 178 - 2{,}5x &= 13x - 34 & & \\ -96 - 2{,}5x &= 13x - 34 & &\mid -13x \\ -96 - 15{,}5x &= -34 & &\mid +96 \\ -15{,}5x &= 62 & &\mid : (-15{,}5) \\ x &= -4 & & \end{aligned}$$

d) $\frac{x}{2} - 4 \cdot (7 - x) = \frac{1}{5} \cdot (75 - 3x) + 8$

$$\begin{aligned} 0{,}5x - 28 + 4x &= 0{,}2\,(75 - 3x) + 8 & & \\ 4{,}5x - 28 &= 15 - 0{,}6x + 8 & & \\ 4{,}5x - 28 &= 23 - 0{,}6x & &\mid +0{,}6x \\ 5{,}1x - 28 &= 23 & &\mid +28 \\ 5{,}1x &= 51 & &\mid : 5{,}1 \\ x &= 10 & & \end{aligned}$$

e) $\frac{7x - 18}{2} - 3x = \frac{2x - 4}{6} - \frac{1}{8} \cdot (4x - 16) + 3 \qquad \mid \cdot 24$

$$\begin{aligned} \frac{^{12}\cancel{24} \cdot (7x - 18)}{\cancel{2}_1} - 24 \cdot 3x &= \frac{^{4}\cancel{24} \cdot (2x - 4)}{\cancel{6}_1} - \frac{^{3}\cancel{24} \cdot 1}{\cancel{8}_1} \cdot (4x - 16) + 24 \cdot 3 & & \\ 12 \cdot (7x - 18) - 72x &= 4 \cdot (2x - 4) - 3 \cdot (4x - 16) + 72 & & \\ 84x - 216 - 72x &= 8x - 16 - 12x + 48 + 72 & & \\ 12x - 216 &= -4x + 104 & &\mid +4x \\ 16x - 216 &= 104 & &\mid +216 \\ 16x &= 320 & &\mid : 16 \\ x &= 20 & & \end{aligned}$$

f) $\frac{3}{8} \cdot (12x - 16) - \frac{x}{2} - 12 = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot (4 - x) \qquad \mid \cdot 8$

$$\begin{aligned} \frac{^{1}\cancel{8} \cdot 3}{\cancel{8}_1} \cdot (12x - 16) - \frac{^{4}\cancel{8} \cdot x}{\cancel{2}_1} - 8 \cdot 12 &= \frac{^{2}\cancel{8} \cdot 3}{\cancel{4}_1} - \frac{^{2}\cancel{8} \cdot 5}{\cancel{4}_1} \cdot (4 - x) & & \\ 3 \cdot (12x - 16) - 4x - 96 &= 6 - 10 \cdot (4 - x) & & \\ 36x - 48 - 4x - 96 &= 6 - 40 + 10x & & \\ 32x - 144 &= -34 + 10x & &\mid -10x \\ 22x - 144 &= -34 & &\mid +144 \\ 22x &= 110 & &\mid : 22 \\ x &= 5 & & \end{aligned}$$

10 a) $V_{Qu} = a \cdot b \cdot c$
$88 = 5{,}5 \cdot 4 \cdot c$
$\Rightarrow 4\ (cm) = c$

b) $V_Z = r^2 \cdot 3{,}14 \cdot h_K$
$141{,}3 = r^2 \cdot 3{,}14 \cdot 5$
$\Rightarrow 3\ (cm) = r$

c) $V_P = \frac{g \cdot h}{2} \cdot h_K$
$101{,}4 = \frac{g \cdot 4}{2} \cdot 7{,}8$
$\Rightarrow 6{,}5\ (cm) = g$

11 Beispiel Rechenfrage:
Wie viel Gewinn erzielte jede der drei größten Attraktionen?
Beispiel:
Westernarena: x

Attraktion	Westernarena	Wildwasserbahn	Drachenlooping
Gewinn pro Attraktion (€)	x	3x + 2 400	(x + 3x + 2 400) : 2
Gewinn insgesamt (€)	97 200		

Gleichung: $x + 3x + 2\,400 + (4x + 2\,400) : 2 = 97\,200$

$$\begin{aligned} x + 3x + 2\,400 + 2x + 1\,200 &= 97\,200 \\ 6x + 3\,600 &= 97\,200 \\ \Rightarrow x &= 15\,600 \end{aligned}$$

Gewinn pro Attraktion:
Westernarena: 15 600 € Wildwasserbahn: 49 200 € Drachenlooping: 32 400 €

12 Gleichungssystem:
Beispiel:
Alter Junge: x Alter Mutter: y
I $x + y = 62$
II $(x + 3) \cdot 3 = y + 3$
I $x + y = 62$
$\Rightarrow x = 62 - y$
$x = 62 - y$ in II:
$(62 - y + 3) \cdot 3 = y + 3$
$\Rightarrow y = 48$
$y = 48$ in I:
$x + 48 = 62$
$\Rightarrow x = 14$
Alter Sohn: 14 Jahre
Alter Mutter: 48 Jahre

13 Beispiel Gleichungssystem:
I $x - y = 15$
II $3x + 5y = 29$
I $x - y = 15$
$\Rightarrow x = 15 + y$
$x = 15 + y$ in II:
$3 \cdot (15 + y) + 5y = 29$
$\Rightarrow y = -2$
$y = -2$ in I:
$x - (-2) = 15$
$\Rightarrow x = 13$
L: $(13 | -2)$

14 Beispiel Gleichungssystem:
Anzahl Zweibettzimmer: x
Anzahl Vierbettzimmer: y
I $x + y = 25$
II $2x + 4y = 60$
I $x + y = 25$
$\Rightarrow x = 25 - y$
$x = 25 - y$ in II:
$2(25 - y) + 4y = 60$
$\Rightarrow y = 5$
$y = 5$ in I:
$x + 5 = 25$
$\Rightarrow x = 20$
L: $(20 | 5)$
Anzahl Zweibettzimmer: 20
Anzahl Vierbettzimmer: 5

15 a) Länge senkrechte Diagonale: x
Länge waagrechte Diagonale: y
I $x + y = 160$
II $1{,}5x = y$
y in I:
$x + 1{,}5x = 160$
$\Rightarrow x = 64$
$x = 64$ in I:
$64 + y = 160$
$\Rightarrow y = 96$
L: $(64 | 96)$
Länge Diagonale x: 64 cm
Länge Diagonale y: 96 cm

b) Gleichungssystem:
I $a = b - 26{,}3$
II $2a + 2b = 233{,}8$
I in II:
$2(b - 26{,}3) + 2b = 233{,}8$
$\Rightarrow b = 71{,}6$
$b = 71{,}6$ in I:
$a = 71{,}1 - 26{,}3$
$\Rightarrow a = 45{,}3$
L: $(45{,}3 | 71{,}6)$
Länge Seite a: 45,3 cm
Länge Seite b: 71,6 cm

Die Abschlussrunde bietet die Möglichkeit, am Ende einer Einheit den Lernstand zu erheben und gegebenenfalls Maßnahmen zu ergreifen, um Defizite zu beheben. Sollte die Lehrkraft eine Testung unabhängig vom Schulbuch wünschen, stehen in click & teach Klassenarbeiten zur Verfügung.

L

1 a) $24x + 13 - 9x - 22 - 16x + 8$
$= 24x - 9x - 16x + 13 - 22 + 8$
$= -x - 1$

b) $8(4x - 2x) - (3x + 12) \cdot 2$
$= 32x - 16x - 6x - 24$
$= 10x - 24$

c) $(x - 5) \cdot (7 + y) - 8 + 6z$
$= 7x + xy - 35 - 5y - 8 + 6z$
$= xy + 7x - 5y + 6z - 43$

d) $4\left(\frac{4}{5y} + 6\right) - \left(\frac{3}{10}y - 6\right) \cdot 5$
$= 3{,}2y + 24 - 1{,}5y + 30$
$= 1{,}7y + 54$

2 a) $42y - (3 + 21y) \cdot 3 + 6 = 6 - y - 4$
$42y - 9 - 63y + 6 = 2 - y$
$-5 = 20y$
$\Rightarrow y = 0{,}25$

b) $\frac{2x-3}{2} + 3{,}5 = \frac{4}{3}(2x + 3) - x - \frac{x+6}{2} \quad | \cdot 6$
$\frac{^3\cancel{6}(2x-3)}{\cancel{2}_1} + 6 \cdot 3{,}5 = \frac{^2\cancel{6} \cdot 4}{\cancel{3}_1}(2x + 3) - 6 \cdot x - \frac{^3\cancel{6}(x+6)}{\cancel{2}_1}$
$3(2x - 3) + 21 = 8(2x + 3) - 6x - 3(x + 6)$
$6x - 9 + 21 = 16x + 24 - 6x - 3x - 18$
$6x + 12 = 7x + 6$
$\Rightarrow x = 6$

3 a) $8x^2 - 3{,}5 = 14{,}5$
$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2{,}25}$
$x_1 = 1{,}5 \quad x_2 = -1{,}5$
$L = \{1{,}5; -1{,}5\}$

b) $4y^2 + 8 = 8$
$\Rightarrow y^2 = 0$
$y = \pm\sqrt{0}$
$L = \{0\}$

c) $2x^2 + 20 = -108$
$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{-64}$
$L = \emptyset$

4 a) $A_P = g \cdot h$
$49{,}5 = 5{,}5 \cdot h$
$9\ (cm) = h$

b) $A_D = \frac{g \cdot h}{2}$
$20{,}52 = \frac{g \cdot 5{,}4}{2}$
$7{,}6\ (cm) = g$

c) $A_T = \frac{a + c}{2} \cdot h$
$40{,}5 = \frac{a + 5}{2} \cdot 3$
$22\ (cm) = a$

5 a) $V_{Qu} = a \cdot b \cdot c$
$120 = a \cdot 5 \cdot 4$
$\Rightarrow 6\ (cm) = a$

b) $V_P = \frac{g \cdot h}{2} \cdot h_k$
$120 = \frac{8 \cdot h}{2} \cdot 7{,}5$
$4\ (cm) = h$

6

	Metal	Rock	Hip Hop	Techno
Anzahl	$\frac{1}{6}x$	$\frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3}x + 28$	38
insgesamt	x			

Gleichung: $\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + 28 + 38 = x$
$\frac{5}{6}x + 66 = x$
$\Rightarrow x = 396$

Anzahl der befragten Gäste:
Metal: 66
Rock: 132
Hip Hop: 160
insgesamt: 396

7 a) I $x + 3y = 57 \quad | \cdot 2$
II $3x - 6y = -54$
I $2x + 6y = 114$
I + II:
$5x = 60$
$\Rightarrow x = 12$
$x = 12$ in I:
$12 + 3y = 57$
$\Rightarrow y = 15 \quad$ L: $(12|15)$

b) I $2x + 3y = 9$
II $-3x + 2y = 19$
I $2x + 3y = 9$
$\Rightarrow x = 4{,}5 - 1{,}5y$
$x = 4{,}5 - 1{,}5y$ in II:
$-3 \cdot (4{,}5 - 1{,}5y) + 2y = 19$
$\Rightarrow y = 5$
$y = 5$ in I:
$2x + 3 \cdot 5 = 9$
$\Rightarrow x = -3 \quad$ L: $(-3|5)$

c) I $3y = x + 16$
II $8y = 10x + 28$
I $3y = x + 16$
$\Rightarrow x = 3y - 16$
I in II:
$8y = 10 \cdot (3y - 16) + 28$
$\Rightarrow y = 6$
$y = 6$ in I:
$3 \cdot 6 = x + 16$
$\Rightarrow 2 = x$
L: $(2|6)$

8 a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{20}{x} - 13 = -9 \quad | \cdot x$

$\frac{20\cancel{x}^1}{\cancel{x}_1} - 13x = -9x$

$20 - 13x = -9x$

$\Rightarrow 5 = x \quad L = \{5\}$

b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{2}{x} + 2 = \frac{1}{2x} + 2{,}75 \quad | \cdot 2x$

$\frac{2\cancel{x}^1 \cdot 2}{\cancel{x}_1} + 2x \cdot 2 = \frac{{}^1\cancel{2x} \cdot 1}{\cancel{2x}_1} + 2x \cdot 2{,}75$

$4 + 4x = 1 + 5{,}5x$

$\Rightarrow x = 2 \quad L = \{2\}$

c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$

$\frac{4}{3x - 9} = \frac{13}{x - 3} + 1 \quad | \cdot 3(x - 3)$

$\frac{{}^1\cancel{3 \cdot (x - 3)} \cdot 4}{\cancel{3 \cdot (x - 3)}_1} = \frac{3 \cdot \cancel{(x - 3)}^1 \cdot 13}{\cancel{x - 3}_1} + 3 \cdot (x - 3) \cdot 1$

$4 = 39 + 3x - 9$

$\Rightarrow -8\frac{2}{3} = x \quad L = \left\{-8\frac{2}{3}\right\}$

9 a) Preis Äpfel: x
Preis Orangen: y
I $5x + 3y = 9{,}4$
II $2x + 1{,}5y = 4{,}15 \quad | \cdot (-2)$
II $-4x - 3y = -8{,}3$
I + II:
$x = 1{,}1$
$x = 1{,}1$ in I:
$5 \cdot 1{,}1 - 3y = 9{,}4$
$\Rightarrow y = 1{,}3$
L: $(1{,}1|1{,}3)$

Preis pro kg:
Äpfel: 1,10 €
Orangen: 1,30 €

b) Grundseite Dreieck: c
Höhe Dreieck: h

I $\frac{(c + 5) \cdot (h + 2)}{2} = \frac{c \cdot h}{2} + 65$

II $\frac{(c + 3) \cdot (h - 2)}{2} = \frac{c \cdot h}{2} - 7$

I $\frac{(c + 5) \cdot (h + 2)}{2} = \frac{c \cdot h}{2} + 65 \quad | \cdot 2$

$(c + 5) \cdot (h + 2) = c \cdot h + 130$

$ch + 2c + 5h + 10 = ch + 130$

$\Rightarrow c = 60 - 2{,}5h$

II $\frac{(c + 3) \cdot (h - 2)}{2} = \frac{c \cdot h}{2} - 7 \quad | \cdot 2$

$(c + 3) \cdot (h - 2) = ch - 14$

$ch - 2c + 3h - 6 = ch - 14$

$\Rightarrow c = 1{,}5h + 4$

I = II:
$60 - 2{,}5h = 1{,}5h + 4$
$\Rightarrow h = 14$
$h = 14$ in I:
$c = 60 - 2{,}5 \cdot 14$
$\Rightarrow c = 25$
L: $(25|14)$

Grundseite: 25 cm
Höhe: 14 cm

Die Seiten „Kreuz und quer“ greifen im Sinne einer permanenten Wiederholung Lerninhalte früher behandelter Kapitel auf und sichern so nachhaltig Basiskompetenzen.

L

Zahlen und Operationen

1 a) Beispiel Rechenfrage
Wie hoch ist der Nachlass in Euro? oder Wie viel kostet das E-Bike jetzt?
$2\,180 : 1{,}19 = 414{,}20$ (€) | $2\,180 \cdot 0{,}81 = 1\,765{,}80$ (€)

b) Beispiel Rechenfrage
Wie viel Prozent der Strecke ist er schon gefahren? oder Wie viel Prozent der Strecke muss er noch fahren?
$68 : 0{,}8 = 85$ | $100 - 80 = 20$
Er ist schon 85 km gefahren. | Er hat noch 20 % der Strecke vor sich.

c) Beispiel Rechenfrage
Wie viel kostet die Sitzgarnitur jetzt? oder Wie viel spart Herr Prey?
$2\,024 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}97 \approx 1\,668{,}79$ € | $2\,024 - 1\,668{,}79 = 355{,}21$ (€)

2 a) $Z = 6\,500 \cdot 0{,}008 \cdot \frac{6}{12} = 26$ (€)
b) $Z = 1\,640 \cdot 0{,}005 \cdot \frac{9}{12} = 6{,}15$ (€)
c) $Z = 1\,932 \cdot 0{,}006 \cdot \frac{110}{360} \approx 3{,}54$ (€)
d) $Z = 7\,900 \cdot 0{,}009 \cdot \frac{315}{360} \approx 6{,}21$ (€)
e) $Z = 48\,000 \cdot 0{,}013 \cdot \frac{1}{2} = 312$ (€)
f) $Z = 25\,000 \cdot 0{,}011 : 4 \cdot 3 = 206{,}25$ (€)

3 $q = 1 + p = 1{,}0095$
$K_{18} = K_0 \cdot q^{18}$
$= 5\,000 \cdot 1{,}0095^{18}$
$= 5\,927{,}67$ (€)
Nach 18 Jahren beträgt das Guthaben 5 927,67 €.

Raum und Form

1 a) A $a^2 + b^2 = c^2$ B $u^2 + w^2 = v^2$

b) A $9^2 + 25^2 = 36^2$
$81 + 625 = 1\,296$
$726 \neq 1\,296$

B $4^2 + 3^2 = 5^2$
$16^2 + 9^2 = 25^2$
$25 = 25$

C $60^2 + 10^2 = 80^2$
$3\,600 + 100 = 6\,400$
$3\,700 \neq 6\,400$

2 Zu dem angegebenen Netz passt Körper C.

Größen und Messen

1 a) Größe der Weidefläche:
$A = A_R + A_D$
$= a \cdot b + \frac{g \cdot h}{2}$
$= 125 \cdot 40 + \frac{125 \cdot 20}{2}$
$= 6\,250$ (m^2)

b) Länge benötigtes Elektroband:
fehlende Seite c: Hypotenuse des Dreiecks
$25^2 + 20^2 = c^2$
$\Rightarrow c \approx 127$ (m)
(127 m + 60 m + 125 m + 40 m) · 2 = 704 m

2 Berechnungen zum Fünfeck
$u = 5 \cdot 70$ cm $= 350$ cm
$A = 5 \cdot \frac{70 \cdot 50}{2} = 8\,750$ cm^2

Berechnungen zum Achteck
$s = 80 : 8 = 10$ cm
$482{,}84 = 8 \cdot \frac{10 \cdot h}{2}$
$\Rightarrow h \approx 12{,}07$ cm

Funktionaler Zusammenhang

1

Fahrstrecke (km)	0	2	4	8
Kilometerkosten (€)	0	3	6	12
Gesamtkosten (€)	3	5	10	20

2

x	–5	0	1	4
y	–6	0	1,2	4,8

3 g: $y = -0{,}5x + 0{,}5$

h: $y = x + 2$

i: $y = 2x - 1$