

Teildruck

Die Verkaufsausgabe erscheint als Hardcover unter der ISBN 978-3-12-735380-8.

Lambacher Schweizer

Mathematik für Gymnasien

Kurstufe
Leistungsfach



Baden-Württemberg



Dr. Theophil Lambacher (13.04.1899 – 14.12.1981) und **Wilhelm Schweizer** (11.11.1901 – 23.07.1990) lehrten beide Mathematik an der Schule. Theophil Lambacher wurde danach Oberschulamtspräsident und Ministerialrat am Kultusministerium, Wilhelm Schweizer arbeitete als Schulleiter, Fachleiter am Seminar und Dozent an der Universität. Der erste Band des Lambacher Schweizer erschien 1946: Lambacher Schweizer Mathematik für höhere Schulen, Mittelstufe 1. Teil enthielt auf 91 Seiten Algebra und Geometrie für die Klasse 7.

Quellennachweis

Abbildungen: Alamy stock photo, Abingdon (Images & Stories), **00.1**; Getty Images Plus, München (E+/vgajic), **370.1**; Getty Images Plus, München (The Image Bank/Joe McDonald), **67.1**; Getty Images, München (AFP PHOTO / JOHANNES EISELE), **70.1**; Hungreder, Rudolf, Leinfelden-Echterdingen, **303.2**; Image Professionals GmbH/ Science Photo Library, München (EUROPEAN SPACE AGENCY/CNES/ARIANESPACE-CSG), **10.2**; imprint, Zusmarshausen, ; iStockphoto, Calgary, Alberta (hsvrs), **305.2**; Malz, Anja, Taunusstein, **68.2**; Shutterstock.com RF, New York (ArtMediaFactory), **305.1**; Shutterstock.com RF, New York (Bachkova Natalia), **00.2**; stock.adobe.com, Dublin (Andrea Wilhelm), **33.1**; stock.adobe.com, Dublin (antikarium), **374.4**; stock.adobe.com, Dublin (auremar), **304.2**; stock.adobe.com, Dublin (cmfotoworks), **369.2**; stock.adobe.com, Dublin (Dasha Petrenko), **302.1**; stock.adobe.com, Dublin (freshidea), **77.1**; stock.adobe.com, Dublin (itardiusz), **32.2**; stock.adobe.com, Dublin (pattilabelle), **370.2**; Thinkstock, München (iStock/Igor Dutina), **304.1**; Uwe Alfer, Kråksmåla, Alsterbro, **10.1**; **10.3**; **10.4**; **11.1**; **11.2**; **12.1**; **12.2**; **12.3**; **12.4**; **13.1**; **13.2**; **13.3**; **13.4**; **30.1**; **30.2**; **30.3**; **30.4**; **30.5**; **31.1**; **31.2**; **32.1**; **32.2**; **32.3**; **32.4**; **64.1**; **64.2**; **65.1**; **66.1**; **66.2**; **66.3**; **66.4**; **66.5**; **66.6**; **67.2**; **68.1**; **70.2**; **77.2**; **77.3**; **78.1**; **141.1**; **141.2**; **142.1**; **142.2**; **142.3**; **142.4**; **143.1**; **143.2**; **143.3**; **143.4**; **143.5**; **143.6**; **143.7**; **143.8**; **143.9**; **143.10**; **143.11**; **144.1**; **144.2**; **144.3**; **189.1**; **191.1**; **191.2**; **191.3**; **191.4**; **302.2**; **302.3**; **302.4**; **302.5**; **303.1**; **305.3**; **305.4**; **305.5**; **368.1**; **368.2**; **368.3**; **368.4**; **369.1**; **372.1**; **372.2**; **372.3**; **372.4**; **372.5**; **373.1**; **373.2**; **374.1**; **374.2**; **374.3**;

Die Reihenfolge und Nummerierung der Bild- und Textquellen im Quellennachweis erfolgt automatisch und entspricht u. U. nicht der Nummerierung der Bild- und Textquellen im Werk. Die automatische Vergabe der Positionsnummern erfolgt in der Regel von links oben nach rechts unten, ausgehend von der linken oberen Ecke der Abbildung.

1. Auflage

1 5 4 3 2 1 | 25 24 23 22 21

Alle Drucke dieser Auflage sind unverändert und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Druckes.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Fotomechanische oder andere Wiedergabeverfahren nur mit Genehmigung des Verlages.

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2021. Alle Rechte vorbehalten. www.klett.de

Das vorliegende Material dient ausschließlich gemäß § 60b UrhG dem Einsatz im Unterricht an Schulen.

Autoren: Manfred Baum, Martin Bellstedt, Dr. Dieter Brandt, Gerhard Brüstle, Heidi Buck (†), Günther Dopfer, Prof. Rolf Dürr, Prof. Hans Freudigmann, Inga Giersemehl, Herbert Götz, Dieter Greulich, Dr. Frieder Haug, Manfred Herbst, Maren Herrmann, Edmund Herd, Prof. Detlef Hoche, Thomas Jörgens, Thorsten Jürgensen-Engl, Christine Kestler, Dr. Michael Kölle, Andreas König, Hans-Georg Kosuch, Prof. Dr. Detlef Lind, Dr. Johannes Novotný, Marion Rauscher, Rolf Reimer, Dr. Wolfgang Riemer, Dr. Rebecca Roy, Rüdiger Sandmann, Prof. Dr. Torsten Schatz, Hartmut Schermuly (†), Prof. Reinhard Schmitt-Hartmann, Ulrich Schönbach, Dr. Maximilian Selinka, Raphaela Sonntag, Heike Spielmann, Jörg Stark, Andrea Stühler, Barbara Sy, Thomas Thiessen, Dr. Heike Tomaschek, Prof. Dr. Ingo Weidig, Alexander Wollmann, Dr. Peter Zimmermann, Prof. Manfred Zinser, Arnold Zitterbart

Entstanden in Zusammenarbeit mit dem Projektteam des Verlages.

Titelbilder: Gebäude: Alamy stock photo, Abingdon (Images & Stories); Vogel: Shutterstock.com RF, New York (Bachkova Natalia)

Satz: medienwerkstatt adrion, Bietigheim-Bissingen

Druck: Druckhaus Stil + Find, Leutenbach-Nellmersbach

Printed in Germany

ISBN 978-3-12-735380-8



Lambacher Schweizer

Mathematik für Gymnasien

Kurstufe
Leistungsfach

Baden-Württemberg

bearbeitet von

Dieter Greulich

Frieder Haug

Michael Kölle

Marion Rauscher

Rebecca Roy

Rüdiger Sandmann

Torsten Schatz

Ernst Klett Verlag
Stuttgart · Leipzig

I Grundlagen der Differenzialrechnung

Check-in	8
1 Ableitung und Ableitungsregeln	10
2 Verkettung von Funktionen	14
3 Kettenregel	17
4 Produktregel	20
5 Monotonie und Krümmung	23
6 Extrem- und Wendepunkte	26
7 Tangente und Normale	30
8 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen	34
GFS-Thema: Stetigkeit	38
Training	40
Rückblick	43
Test	44

II Exponential- und Logarithmusfunktionen

Check-in	48
1 Die natürliche Exponentialfunktion und die Euler'sche Zahl e	50
2 Exponentialgleichungen und natürlicher Logarithmus	53
3 Exponentialfunktionen und ihre Graphen	56
4 Exponentialfunktionen mit Parameter	60
5 Die Umkehrfunktion	64
6 Die Logarithmusfunktion und ihre Ableitung	68
7 Exponentielles Wachstum	71
GFS-Thema: Beschränktes Wachstum	75
GFS-Thema: Ausbreitung eines Virus modellieren	77
Training	79
Rückblick	83
Test	84

III Integralrechnung

Check-in	88
1 Rekonstruieren einer Größe	90
2 Das Integral als orientierter Flächeninhalt	94
3 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	98
4 Bestimmen von Stammfunktionen	102
5 Stammfunktionen und ihre Graphen	106
6 Integral und Flächeninhalt	110
7 Uneigentliche Integrale	114
8 Rotationskörper und ihr Volumen	117
9 Mittelwerte von Funktionen	121
GFS-Thema: Partielle Integration	124
Training	126
Rückblick	131
Test	132

Die blau unterlegten Lerneinheiten sind im Teildruck enthalten.

IV Funktionen und ihre Graphen

Check-in	136
1 Strecken, Verschieben und Spiegeln von Graphen	138
2 Linearfaktordarstellung – mehrfache Nullstellen	141
3 Lösen von Gleichungen	145
4 Trigonometrische Funktionen	149
5 Waagerechte und senkrechte Asymptoten	153
6 Graph und Funktionsterm	157
7 Untersuchen von Funktionenscharen	161
8 Näherungsweise Berechnen von Nullstellen	165
GFS-Thema: Symmetrie von Graphen	169
Training	171
Rückblick	175
Test	176

V Lineare Gleichungssysteme

Check-in	180
1 Das Gauß-Verfahren	182
2 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme	185
3 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern auf der rechten Seite	189
4 Bestimmen ganzrationaler Funktionen	192
GFS-Thema: Struktur der Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme	196
GFS-Thema: Kubische Splines	198
Training	200
Rückblick	203
Test	204

VI Geraden und Ebenen

Check-in	208
1 Vektoren im Raum	210
2 Geraden im Raum	214
3 Ebenen im Raum – Parameterform	218
4 Zueinander orthogonale Vektoren – Skalarprodukt	222
5 Normalengleichung und Koordinatengleichung einer Ebene	225
6 Ebenengleichungen umformen – das Vektorprodukt	228
7 Ebenen veranschaulichen	232
8 Gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden	236
9 Gegenseitige Lage von Ebenen	240
GFS-Thema: LGS mit Parameter auf der linken Seite	244
GFS-Thema: Kugeln	245
Training	247
Rückblick	251
Test	252

VII Abstände und Winkel

Check-in	256
1 Abstand eines Punktes von einer Ebene – HNF	258
2 Abstand eines Punktes von einer Geraden	262
3 Abstand zueinander windschiefer Geraden	265
4 Winkel zwischen Vektoren	268
5 Schnittwinkel	271
6 Anwendungen des Vektorprodukts	275
7 Spiegelung und Symmetrie	278
8 Modellieren von geradlinigen Bewegungen	281
9 Vektorielle Beweise	285
GFS-Thema: Orthogonale Projektion – Skalarprodukt	288
GFS-Thema: Anwendungen von Skalar- und Vektorprodukt in der Physik	290
Training	292
Rückblick	295
Test	296

VIII Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Check-in	300
1 Elementare Kombinatorik	302
2 Pfadregeln und Erwartungswert	306
3 Bedingte Wahrscheinlichkeit	309
4 Stochastische Unabhängigkeit	313
5 Formel von Bernoulli und Binomialverteilung	316
6 Erwartungswert und Histogramm	320
7 Problemlösen mit der Binomialverteilung	324
GFS-Thema: Die geometrische Verteilung	328
GFS-Thema: Der Satz von Bayes	330
Training	332
Rückblick	335
Test	336

IX Testen mit der Binomialverteilung

Check-in	340
1 Einseitiger Hypothesentest	342
2 Fehler beim Testen von Hypothesen	346
3 Wahl der Nullhypothese	350
4 Zweiseitiger Hypothesentest	353
GFS-Thema: Der Chi-Quadrat-Test	356
Training	358
Rückblick	361
Test	362

Die blau unterlegten Lerneinheiten sind im Teildruck enthalten.

X Normalverteilung

Check-in 366

1 Die Normalverteilung 368

2 Die Gauß'sche Glockenfunktion 372

3 Sigma-Regeln 376

4 Umkehraufgaben zur Normalverteilung 379

5 Stetige Zufallsgrößen 382

GFS-Thema: Die Exponentialverteilung 385

GFS-Thema: Der Satz von de Moivre-Laplace 387

Training 389

Rückblick 391

Test 392

Grundwissen 394

Lösungen 414

Register 506

Bild- und Textquellen 510

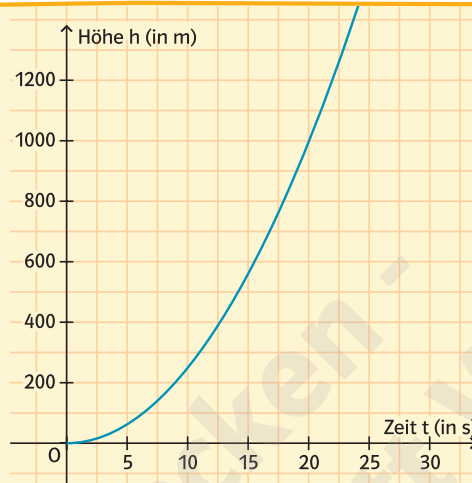
Operatorenliste 511

Mathematische Begriffe und Bezeichnungen 512

1 Ableitung und Ableitungsregeln

Der Graph zeigt die Höhe h (in m) einer Rakete über dem Erdboden in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) seit dem Start.

- Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit der Rakete in den Zeitintervallen $[5; 15]$, $[5; 10]$ und $[5; 7,5]$.
- Erläutern Sie, wie Sie die momentane Geschwindigkeit der Rakete zu einem vorgegebenen Zeitpunkt bestimmen können. Wie groß ist diese 10s nach dem Start?
- Wodurch unterscheiden sich mittlere und momentane Geschwindigkeit?



Mithilfe von Funktionen kann man Abhängigkeiten zwischen Größen beschreiben. Wenn man sich für das Änderungsverhalten solcher Größen interessiert, kann man dieses mithilfe der Ableitungsfunktion untersuchen.

Ist eine Funktion f mit der Definitionsmenge D_f gegeben, so beschreibt der **Differenzenquotient** $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ das Änderungsverhalten von f in einem Bereich um die Stelle $a \in D_f$. Strebt dieser Differenzenquotient für $h \rightarrow 0$ gegen einen festen Wert, so nennt man die Funktion **differenzierbar** an der Stelle a . Der Grenzwert heißt **Ableitung** von f an der Stelle a und man schreibt dafür $f'(a)$.

Den Differenzenquotienten kann man auch in der Form $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ schreiben. Den Grenzwert bildet man dann für $x \rightarrow a$.

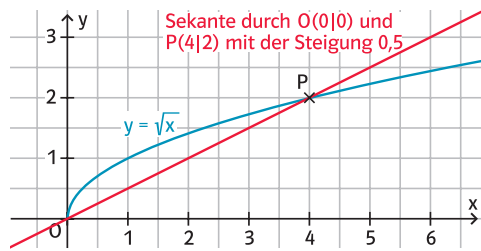
Definition	Grafische Interpretation	Bedeutung im Anwendungskontext
Differenzenquotient: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	Steigung der Sekante durch $P(a f(a))$ und $Q(a+h f(a+h))$: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.	mittlere Änderungsrate von f im Intervall $I = [a; a+h]$
Ableitung: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	Eine Gerade mit der Steigung $f'(a)$ durch $P(a f(a))$ nennt man Tangente an den Graphen von f in P.	momentane Änderungsrate von f an der Stelle a

limes (lat.): Grenze

Die **Ableitungsfunktion** f' ist diejenige Funktion, die jeder Stelle $x \in D_f$, an der f differenzierbar ist, den Wert $f'(x)$ zuordnet. Leitet man die Ableitungsfunktion f' wieder ab, erhält man die 2. Ableitungsfunktion oder 2. Ableitung f'' von f usw. Die n -te Ableitung von f bezeichnet man mit $f^{(n)}$.

Es gibt Funktionen, die nicht an jeder Stelle ihrer Definitionsmenge differenzierbar sind. Beispielsweise ist die Wurzelfunktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $0 \in D_f = \mathbb{R}_0^+$ nicht differenzierbar, denn es gilt $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$.

Für $h \rightarrow 0$ besitzt $\frac{1}{\sqrt{h}}$ aber keinen Grenzwert. Für die Ableitungsfunktion f' gilt daher $D_f = \mathbb{R}^+$.



vgl. auch Aufgabe 16

Definition: Gegeben ist eine Funktion f auf dem Intervall I . Wenn an einer Stelle $a \in I$ der

Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existiert, so nennt man **f an der Stelle a differenzierbar**.

Der Grenzwert heißt **Ableitung von f an der Stelle a** und wird mit **$f'(a)$** bezeichnet.

Man sagt, der Graph von f hat an der Stelle a die Steigung $f'(a)$.

Ist f an jeder Stelle $a \in I$ differenzierbar, so nennt man die **Funktion f differenzierbar**.

Tangenten und Winkel

Ist eine Funktion f mit dem Graphen G_f gegeben, so erhält man eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $P(a | f(a))$ mittels $y = f'(a) \cdot x + c$, wobei c durch eine Punktprobe mit P bestimmt wird.

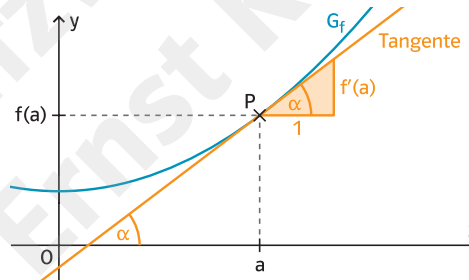
Um den Winkel zu bestimmen, den der Graph G_f in P mit der Horizontalen einschließt, berechnet man die Größe des **Steigungswinkels α** der Tangente.

Für diesen gilt $\tan(\alpha) = f'(a)$.

Hat die Tangente eine negative Steigung $f'(a) < 0$, so ergibt sich eine negative Gradzahl für den Steigungswinkel α .

Es ist stets $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Haben die Graphen G_f und G_g zweier Funktionen f und g den gemeinsamen Punkt $P(a | f(a))$, d.h. $f(a) = g(a)$, und in P eine gemeinsame Tangente, d.h. $f'(a) = g'(a)$, so sagt man, dass sie sich in P **berühren**.



G_f und G_g berühren sich in $P(a | f(a))$:
 $f(a) = g(a)$ und
 $f'(a) = g'(a)$

Wichtige Ableitungen und Ableitungsregeln

Die Bestimmung von Ableitungsfunktionen mithilfe des Grenzwertes von Differenzenquotienten ist aufwendig. Man kann damit aber die Ableitungen wichtiger Funktionen sowie Ableitungsregeln herleiten, mit denen sich zusammengesetzte, differenzierbare Funktionen viel einfacher ableiten lassen.

$f(x)$	$c \ (c \in \mathbb{R})$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x^r \ (r \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$	$c \cdot g(x)$	$g(x) + h(x)$
$f'(x)$	0	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$r \cdot x^{r-1}$	$c \cdot g'(x)$	$g'(x) + h'(x)$
						Potenzregel	Faktorregel	Summenregel

Beispiel 1 Ableitungen berechnen

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion f' . Geben Sie die maximalen Definitionsmengen D_f und $D_{f'}$ an.

a) $f(x) = 3 \cdot \cos(x) + \sqrt[6]{x}$

b) $f(t) = -\frac{2}{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$

c) $f_a(x) = 2ax^2 - \frac{x}{a} + \sqrt{a}; \ a > 0$

Lösung

a) $f(x) = 3 \cdot \cos(x) + x^{\frac{1}{6}}$
 $f'(x) = -3 \cdot \sin(x) + \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$
 $D_f = \mathbb{R}_0^+; \ D_{f'} = \mathbb{R}^+$

b) $f(t) = -2t^{-1} + t^{-\frac{1}{2}}$
 $f'(t) = 2t^{-2} - \frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$
 $D_f = \mathbb{R}^+; \ D_{f'} = \mathbb{R}^+$

c) $f'_a(x) = 4ax - \frac{1}{a}; \ a > 0$
 $D_f = \mathbb{R}; \ D_{f'} = \mathbb{R}$

Die **maximale Definitionsmenge** einer Funktion f umfasst alle Zahlen x , für die man $f(x)$ berechnen kann.

Spricht man von der Definitionsmenge, so meint man meist die maximale Definitionsmenge.

Beispiel 2 Tangentengleichung und Steigungswinkel bestimmen

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 5x$. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(-1|f(-1))$. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den der Graph von f in P mit der Horizontalen einschließt.

Lösung

Ableitung: $f'(x) = 3x^2 - 5$, also $f'(-1) = -2$.

Ansatz: $y = -2x + c$. Mit $P(-1|4)$ folgt $4 = -2 \cdot (-1) + c$, d.h. $c = 2$.

Tangentengleichung: $y = -2x + 2$.

Winkel: $\tan(\alpha) = f'(-1) = -2$, also $\alpha \approx -63,4^\circ$.

Aufgaben

- 1 Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion f . Geben Sie D_f , $D_{f'}$ und $D_{f''}$ an.

a) $f(x) = 2\sin(x) + x^{-3}$

b) $f(t) = -4\sqrt[4]{t} - 3t$

c) $f(t) = t^4 - \sqrt[4]{t}$

d) $f(s) = \frac{2}{\sqrt{s}} - 3s^5$

e) $f(x) = -\cos(x) + \frac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 3\cos(x)$

- 2 Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion f . Formen Sie den Funktionsterm gegebenenfalls zuerst um. Geben Sie die maximalen Definitionsmengen D_f und $D_{f'}$ an.

a) $f(x) = (x + 4)^2$

b) $f(t) = \frac{6t^3 - t^2}{2t}$

c) $f(x) = x \cdot \left(x + \frac{1}{x^2}\right)$

d) $f(s) = (2s - 3)^2$

e) $f(s) = (2s - 4) \cdot (4 - s)$

f) $f(t) = \frac{4t^3 + 8t}{2t^2}$

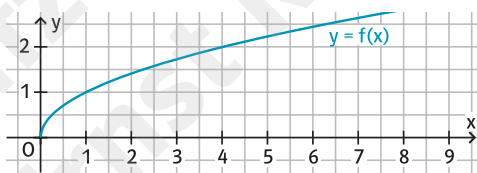
- 3 Bestimmen Sie mithilfe des abgebildeten Graphen folgende Werte. Interpretieren Sie die Werte bei (3) und (4) grafisch.

(1) $f(5)$ und $f(3)$

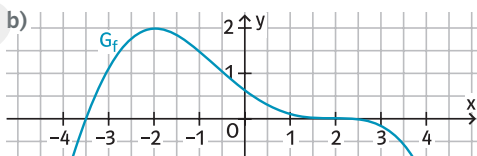
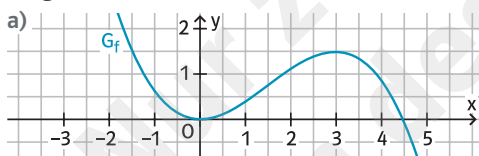
(2) $f(5) - f(3)$

(3) $\frac{f(5) - f(3)}{5 - 3}$

(4) $f'(5)$



- 4 In der Abbildung ist der Graph einer Funktion f dargestellt. Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' .



- 5 Berechnen Sie die Koordinaten aller Punkte, in denen der Graph der Funktion f mit $f(x) = 2x^2 + 2$

a) eine Tangente mit der Steigung 4 hat,

b) dieselbe Steigung wie der Graph von g mit $g(x) = x^3 - 4x - 1$ hat.

- 6 Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f_a .

a) $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^2 + ax$

b) $f_a(x) = a \cdot \cos(x) + a$

c) $f_a(x) = -a \cdot \sin(x) + ax^2$

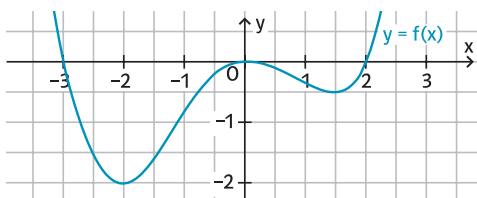
Beim Ableiten kann man sich den Parameter wie eine feste Zahl vorstellen.

Test

- 7 Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion f . Geben Sie die maximalen Definitionsmengen D_f , $D_{f'}$ und $D_{f''}$ an.

a) $f(x) = \sqrt[4]{x} - 2x$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$



- 8 In der Abbildung ist der Graph einer Funktion f dargestellt. Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' .

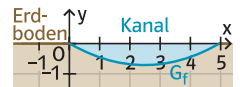
Hier sind jeweils die maximalen Definitionsmengen gemeint.

Beim Ableiten kann man sich den Parameter wie eine feste Zahl vorstellen.

→ Lösungen | Seite 414

- 9 Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f_a und berechnen Sie $f'_2(1)$.
- a) $f_a(x) = a^2 - a \cdot \sqrt{x}$ b) $f_a(x) = ax^5 - \frac{x}{a^5}$ c) $f_a(x) = a \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{ax}$
d) $f_a(x) = \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}$ e) $f_a(x) = \frac{a}{x} + \frac{x^2}{a^2}$ f) $f_a(x) = (ax - 1)^2$
- 10 Ein Pkw beschleunigt aus dem Stand. In den ersten 10 Sekunden vergrößert sich seine Geschwindigkeit v (in $\frac{m}{s}$) gleichmäßig. Zwischen 10 Sekunden und 20 Sekunden nimmt die Geschwindigkeit immer weniger stark zu, danach ändert sie sich nicht mehr.
- a) Skizzieren Sie einen möglichen Graphen von v .
b) Untersuchen Sie das Vorzeichen von v' .
c) Interpretieren Sie die Aussagen $v(2) = 3$, $\frac{v(15) - v(12)}{15 - 12} = 1,2$ und $v'(15) = 1$ im Sachkontext.
- 11 Gegeben sind die Funktion f und der Punkt P auf dem Graphen G_f von f . Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an G_f in P und berechnen Sie die Größe ihres Steigungswinkels.
- a) $f(x) = \sin(x) + x^2$; $P(0|f(0))$ b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$; $P(3|f(3))$ c) $f(x) = 2 \cdot \cos(x) - x$; $P(\frac{\pi}{2}|f(\frac{\pi}{2}))$
- 12 Untersuchen Sie, ob sich die Graphen der Funktionen f und g an den angegebenen Stellen berühren.
- a) $f(x) = x^3 - 3x$; $g(x) = x^2 - 2x - 1$ b) $f(x) = 0,5x^4$; $g(x) = x^4 - 2x^2$
 $x_1 = 1$; $x_2 = -1$ $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2$
- 13 Ein 5 m breiter Kanal wird durch den Graphen G_f einer Funktion f mit $f(x) = ax^2 + abx$ ($a, b \in \mathbb{R}$) in einem Koordinatensystem dargestellt (alle Längenangaben in Metern). Bestimmen Sie Werte für a und b , sodass die Ränder des Kanals im Modell den Punkten $P(0|0)$ und $Q(5|0)$ entsprechen und der Kanal dort mit dem Erdboden einen Winkel von 30° einschließt.

Die mittlere und die momentane Änderungsrate haben immer die gleiche Einheit.



Test

Lösung | Seite 414

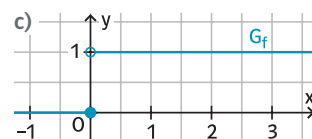
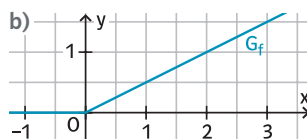
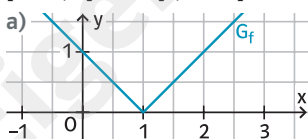
- 14 Gegeben sind zwei Funktionen f und g mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ und $g(x) = \frac{1}{x^2} + 2x$.
- a) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den der Graph von f im Punkt $P(1|f(1))$ mit der Horizontalen einschließt.
b) Untersuchen Sie, ob sich die Graphen von f und g im Punkt $P(1|f(1))$ berühren.
- 15 Gegeben sind zwei Funktionen f und g mit den Graphen G_f und G_g . Als Schnittwinkel zwischen den Graphen versteht man den Winkel zwischen den Tangenten an G_f und G_g im Schnittpunkt. Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels zwischen G_f und G_g im angegebenen Schnittpunkt S . Fertigen Sie dazu zunächst eine Skizze an.
- a) $f(x) = 2x^2 - 1$; $g(x) = 0,25x^2 + 0,75$; $S(1|1)$ b) $f(x) = 2x^4$; $g(x) = -x^2 + 3$; $S(1|2)$
- 16 Gegeben ist der Graph einer Funktion f . Begründen Sie, dass f nicht differenzierbar ist, indem Sie für eine geeignete Stelle a die Differenzenquotienten von f auf verschiedenen Intervallen $[a - h; a]$ und $[a; a + h]$ für $h > 0$ untersuchen.

Lösungen zu Aufgabe 15:

33,7°

49,4°

Man legt fest, dass für den Schnittwinkel β zwischen zwei Graphen stets $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ ist.



Grundwissen Test

- 17 Vereinfachen Sie den Term.

a) $2(x + 1) - 3x + 2$

b) $4x^2 - 7x + 1 - (1 - 8x - 3x^2)$

c) $(2x + 1)(x - 3) - (x^2 - 2x - 5)$

d) $\frac{4x + 2}{6x + 3}$

e) $\frac{x^2 + 1 - (x - 2)(x + 3)}{x - 7}$

f) $\frac{(x + 1)(x + 2) - x^2 + 3x}{3x + 1}$

Grundwissen

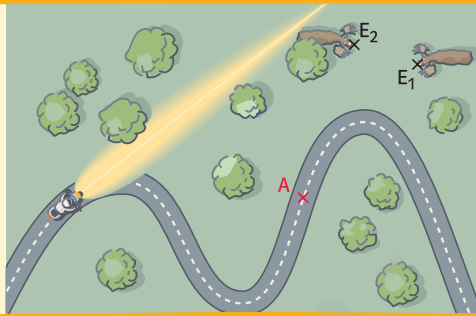
Seite 394

Lösung | Seite 414

7 Tangente und Normale

Anke ist bei Nacht mit ihrem Motorrad auf einer kurvigen Straße unterwegs. Abseits der Straße stehen friedlich zwei Elche (E_1 und E_2).

- Welcher der beiden Elche wird von den Scheinwerfern des Motorrads erfasst, wenn sich dieses im Punkt A befindet?
- An welchen Punkten der Straße trifft das Scheinwerferlicht den anderen Elch?



In einigen Anwendungssituationen ist es nicht möglich, eine gesuchte Tangentengleichung mithilfe der Punktprobe zu bestimmen. Deshalb wird nun eine allgemeine Tangentengleichung hergeleitet, die man generell einsetzen kann, um eine Gleichung einer Tangente an den Graphen einer Funktion f im Punkt $P(u|f(u))$ zu ermitteln.

Die Ursprungsgerade $y = f'(u) \cdot x$ (Fig. 1) hat die gleiche Steigung wie die gesuchte Tangente. Verschiebt man diese Gerade um u in x -Richtung und um $f(u)$ in y -Richtung, so verläuft die verschobene Gerade durch den Punkt P und entspricht somit der gesuchten Tangente.

Sie hat die Gleichung $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$.

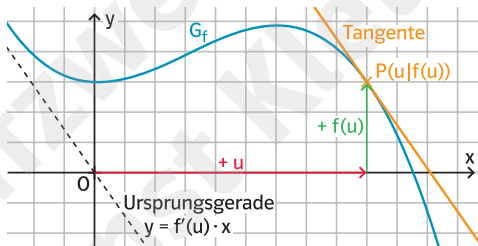


Fig. 1

Die Gerade, die orthogonal zur Tangente durch den Punkt P verläuft, bezeichnet man als **Normale**.

Für ihre Steigung muss $m = -\frac{1}{f'(u)}$ ($f'(u) \neq 0$) gelten, wie Fig. 2 exemplarisch zeigt.

Die allgemeine Normalengleichung ermittelt man analog zur Tangentengleichung.

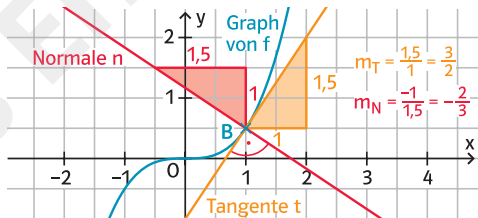
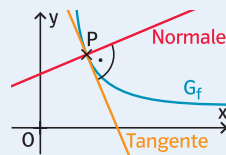


Fig. 2

Falls $f'(u) = 0$ ist, ist die Normale die Gerade mit der Gleichung $x = u$.

Satz: Gegeben sind eine Funktion f und eine Stelle $u \in D_{f'}$, an der f differenzierbar ist. Eine Gleichung für die Tangente bzw. Normale an den Graphen G_f im Punkt $P(u|f(u))$ erhält man mit der **allgemeinen Tangentengleichung** $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$ bzw. **allgemeinen Normalengleichung** $y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$ ($f'(u) \neq 0$).



Man kann auch Tangenten an einen Graphen G_f ermitteln, die durch einen Punkt Q verlaufen, der nicht auf G_f liegt. Man spricht von der **Tangente von außen**.

Die Berührungspunkte $B_1, B_2, \dots$ sind dann zunächst unbekannt. Um deren Koordinaten und die Tangentengleichungen zu bestimmen, geht man wie auf der nächsten Seite beschrieben vor.

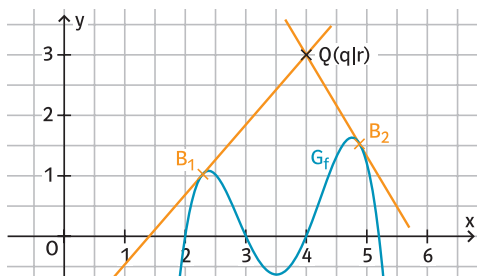


Fig. 3

Es gibt auch Fälle, in denen die Tangente von außen nicht existiert (vgl. Aufgaben 3 und 15).

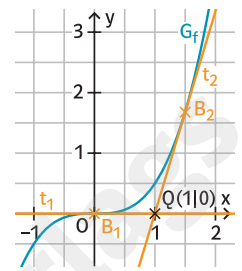
Bestimmung einer Gleichung der Tangente von außen**Allgemein**

1. Terme $f(u)$ und $f'(u)$ bestimmen.
2. Allgemeine Tangentengleichung im Punkt $B(u|f(u))$ aufstellen.
3. Punktprobe mit $Q(q|r)$ durchführen.
4. Lösungen $u_1, u_2 \dots$ und Koordinaten der Berührungspunkte $B_1, B_2 \dots$ ermitteln.
5. In die allgemeine Tangentengleichung einsetzen.

Beispiel: f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3$ und $Q(1|0)$

1. $f(u) = \frac{1}{2} \cdot u^3$; $f'(u) = \frac{3}{2} \cdot u^2$
2. $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$
 $= \frac{3}{2} u^2 \cdot (x - u) + \frac{1}{2} u^3$
3. $Q(1|0)$, also $0 = \frac{3}{2} u^2 \cdot (1 - u) + \frac{1}{2} u^3$ bzw.
 $0 = -u^3 + \frac{3}{2} u^2 = u^2 \cdot \left(-u + \frac{3}{2}\right)$
4. Satz vom Nullprodukt: $u_1 = 0$; $u_2 = \frac{3}{2}$
 $B_1(0|0)$; $B_2\left(\frac{3}{2} \mid \frac{27}{16}\right)$
5. Tangente t_1 : $y = 0$
Tangente t_2 : $y = \frac{27}{8} \left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{27}{16} = \frac{27}{8} x - \frac{27}{8}$

Zur Veranschaulichung:



Unter einer **Normalen von außen** versteht man eine Normale an den Graphen G_f einer Funktion f , die durch einen vorgegebenen Punkt Q verläuft, der nicht auf G_f liegt. Um eine Gleichung einer solchen Normalen zu bestimmen, geht man in den gleichen fünf Schritten wie oben vor, ersetzt dabei allerdings in Schritt 2 die Tangenten- durch die Normalengleichung.

Beispiel 1 Normalengleichung in einem Punkt des Graphen bestimmenGegeben sind die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ und der Punkt $P(2|f(2))$.

- a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Normalen an G_f im Punkt P .
- b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Normalen und der x -Achse. Bestimmen Sie die Größe des Steigungswinkels der Normalen.

Lösung

- a) Ableitung: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$. Es ist $f(2) = 1$ und $f'(2) = 8$.
Normalengleichung: $y = -\frac{1}{f'(2)} \cdot (x - 2) + f(2) = -\frac{1}{8} \cdot (x - 2) + 1 = -\frac{1}{8}x + \frac{5}{4}$.
- b) Ansatz: $y = 0$, d.h. $-\frac{1}{8}x + \frac{5}{4} = 0$. Lösung: $x_1 = 10$. Koordinaten des Schnittpunktes: $S(10|0)$.
Steigungswinkel: $\tan(\alpha) = -\frac{1}{8}$, also $\alpha \approx -7,1^\circ$.

Beispiel 2 Tangente von außen im Anwendungskontext nutzen

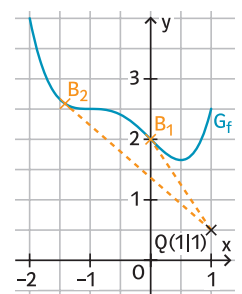
Der Verlauf eines Flusses wird in einem Koordinatensystem näherungsweise durch den Graphen G_f der Funktion f mit $f(x) = 0,5x^4 + x^3 - x + 2$, $-2 \leq x \leq 1$, beschrieben (alle Angaben in km). Der Punkt $Q(1|1)$ beschreibt den Standort eines Kraftwerks, das mit dem Fluss durch einen geradlinigen Kanal verbunden werden soll. Der Kanal soll dabei ohne Knick an den Fluss anschließen. Bestimmen Sie die Orte, an denen der Kanal an den Fluss gebaut werden kann.

Lösung

1. $f(u) = 0,5u^4 + u^3 - u + 2$; $f'(u) = 2u^3 + 3u^2 - 1$
2. $y = (2u^3 + 3u^2 - 1) \cdot (x - u) + 0,5u^4 + u^3 - u + 2$
3. $1 = (2u^3 + 3u^2 - 1) \cdot (1 - u) + 0,5u^4 + u^3 - u + 2 \Leftrightarrow 0 = u^2 \cdot (-1,5u^2 + 3)$
4. Satz vom Nullprodukt: $u_1 = 0$; $u_2 = -\sqrt{2}$; $u_3 = \sqrt{2}$ (u_3 irrelevant, da $u_3 > 1$)
Mit $f(0) = 2$ und $f(-\sqrt{2}) = 0,5(-\sqrt{2})^4 + (-\sqrt{2})^3 - (-\sqrt{2}) + 2 \approx 2,59$ folgt $B_1(0|2)$ und $B_2(-\sqrt{2}|2,59)$.

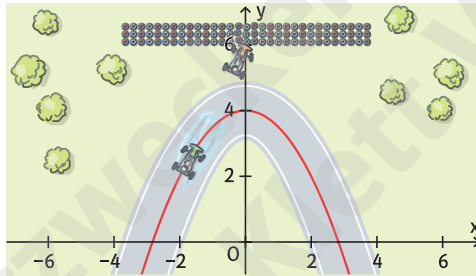
Der Kanal kann an den Orten gebaut werden, die im Modell durch die Punkte $B_1(0|2)$ und $B_2(-\sqrt{2}|2,59)$ dargestellt werden.

Zum Vergleich:

**Aufgaben**

- 1 Gegeben ist die Funktion f . Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Tangente und der Normalen an den Graphen von f im Punkt $P(-1|f(-1))$. Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels der Tangente.
- a) $f(x) = x^5 - 3x^3$ b) $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ c) $f(x) = \sqrt{2x + 4}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

- 2 Gegeben ist der Graph G_f der Funktion f mit $f(x) = 0,5x^2$. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Tangenten an G_f durch den Punkt Q und die Koordinaten der zugehörigen Berührungspunkte.
- a) $Q(0|-2)$ b) $Q(0|-4,5)$ c) $Q(3|2,5)$ d) $Q(-1|0)$
- 3 Gegeben ist der Graph G_f der Funktion f mit $f(x) = 2x^2 - 3$. Bestimmen Sie – falls möglich – je eine Gleichung der Tangenten an G_f durch den Punkt Q .
- a) $Q(0|-21)$ b) $Q(0|0)$ c) $Q(-3|15)$ d) $Q(1|2)$
- 4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0,5x^4 - 2x^2 - x$.
- a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Normalen an G_f im Punkt $P(-1|f(-1))$.
- b) Die Normale schneidet G_f in drei weiteren Punkten. Berechnen Sie die x-Koordinaten dieser Schnittpunkte.
- 5 Die Mittellinie einer von oben betrachteten Rennstrecke wird modellhaft durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2$ dargestellt. Bei Aquaplaning wird ein Rennwagen geradlinig, tangential aus der Kurve getragen und landet an dem Punkt in den Reifen, der durch $Q(0|6)$ beschrieben wird. Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des Punktes, an dem der Wagen die Strecke verlassen hat.

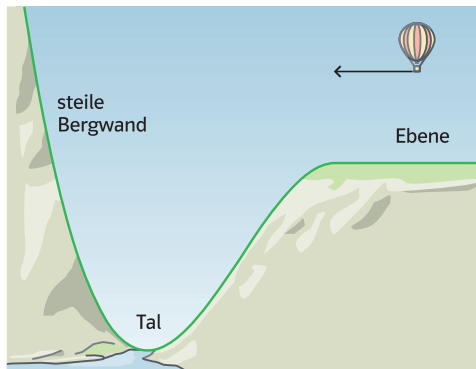


- 6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$.
- a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Normalen an G_f im Punkt $P(0|1)$.
- b) Die Normale begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

○ Test

→ Lösung | Seite 416

- 7 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^4 + x^2 + 8$.
- a) Bestimmen Sie je eine Gleichung der Tangenten an den Graphen von f , die durch den Punkt $A(0|1)$ verlaufen.
- b) Geben Sie für die Normalen in den Berührungspunkten jeweils eine Gleichung an.
- 8 Die Form des Ufers einer Landzunge und ein Boot werden im Modell durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -2x^2 + 3x + 10$ und den Punkt $Q(3|5,5)$ beschrieben. Gesucht sind alle Orte am Ufer, die man vom Boot aus sehen kann. Berechnen Sie die Koordinaten der zugehörigen Punkte im Modell.
- 9 Die Abbildung zeigt den Querschnitt eines Geländeverlaufs. In einem Koordinatensystem kann dieser durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4$ für $-3 \leq x \leq 4$ und durch eine waagerechte Gerade für $x > 4$ näherungsweise dargestellt werden (eine Einheit entspricht 100 m). Ein Ballon bewegt sich in konstanter Höhe 200 m über der Ebene in negativer x-Richtung. Berechnen Sie im Modell die Koordinaten des Punktes auf der Ballonbahn, von dem aus man erstmals den tiefsten Punkt des Tals sehen kann.

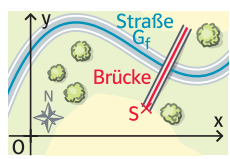




- 10 Eine Pflanze ist von Blattläusen befallen. Die Funktion f mit $f(t) = \frac{300}{0,1t + 1}$ ($0 \leq t \leq t_0$, t in Tagen seit Beobachtungsbeginn) beschreibt die Anzahl der Blattläuse auf einem Stängel bis zu einem Zeitpunkt t_0 , an dem Marienkäfer zur Bekämpfung der Läuse eingesetzt werden. Ab diesem Zeitpunkt bleibt die momentane Änderungsrate der Anzahl der Läuse konstant.
- Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die Blattläuse ausgestorben sind, wenn man 15 Tage nach Beobachtungsbeginn Marienkäfer auf die Blattläuse ansetzt.
 - Bestimmen Sie rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt man die Marienkäfer einsetzen muss, damit die Läuse 30 Tage nach Beobachtungsbeginn ausgestorben sind.
- 11 Den Abstand eines Punktes P zum Graphen einer Funktion f kann man mithilfe der Normalen von außen durch P an G_f und der zugehörigen Schnittpunkte bestimmen. Der Abstand von P zu G_f entspricht dann dem kleinsten Abstand von P zu einem der Schnittpunkte.
- Bestimmen Sie zeichnerisch den Abstand von $P(0|2)$ zum Graphen von f mit $f(x) = 0,25x^3$.
 - Bestimmen Sie rechnerisch den Abstand von $Q(0|0)$ zum Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
- 12 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ beschreibt modellhaft den Verlauf einer von oben betrachteten Straße. Zwei Höfe, die im Modell durch die Punkte $P(16|0,5)$ und $Q(0|12,75)$ dargestellt werden, sollen jeweils über einen möglichst kurzen, geradlinigen Weg an die Straße angeschlossen werden (alle Angaben in km).
- Veranschaulichen Sie die Situation anhand einer Skizze.
 - Berechnen Sie mithilfe von Normalen, wie lang die beiden Wege jeweils werden.

Test

Lösung | Seite 416

- 13 Der Verlauf eines von oben betrachteten Straßenstücks kann modellhaft durch den Graphen G_f von f mit $f(x) = 0,1x^2 - 0,6x + 2,9$ für $-1 \leq x \leq 6$ beschrieben werden (alle Angaben in 100 m).
- Die Straße soll für $x < -1$ geradlinig ohne Knick fortgesetzt werden. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die dieses Straßenstück beschreibt.
 - Es soll eine weitere geradlinige Straße gebaut werden, die knickfrei in die vorhandene Straße einmündet. Im Modell wird diese Straße durch eine Gerade dargestellt, die durch den Punkt $P(-1|0)$ verläuft. Berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes dieser Geraden mit G_f .
- 14 Eine 200 m lange Brücke führt orthogonal zur Fahrbahn über eine Straße, deren Verlauf modellhaft durch den Graphen G_f der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 11x + 15)$ dargestellt wird (alle Angaben in 100 m). G_f und die Strecke, die die Brücke darstellt, schneiden sich im Mittelpunkt $P(3|1,5)$ der Strecke.
- 
- Erläutern Sie, dass man mit $d(R; P) = \sqrt{(3 - r)^2 + (1,5 - (2r - 4,5))^2}$ den Abstand eines beliebigen Punktes $R(r|t)$ auf der Normalen zu P berechnen kann.
 - Bestimmen Sie mit dem Ansatz $d(S; P) = 1$ die Koordinaten des Punktes S , der im Modell dem südlichsten Punkt der Brücke entspricht.
- 15 Gegeben sind der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ und ein Punkt $P(p_1|p_2)$ mit $p_2 > p_1^2$.
- Beschreiben Sie die Lage des Punktes P im Vergleich zum Graphen von f .
 - Zeigen Sie: Es gibt keine Tangente von außen an G_f durch den Punkt P .
 - Begründen Sie, dass es für jeden Punkt $Q(q_1|q_2)$ mit $q_2 < q_1^2$ zwei Tangenten von außen an G_f durch Q gibt.

Grundwissen Test

- 16 Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

- | | | | |
|------------------|----------------|--------------------------|-----------------------|
| a) $\log_2(2^5)$ | b) $\log_2(8)$ | c) $\log_2(0,25)$ | d) $\log_2(\sqrt{2})$ |
| e) $\log_4(1)$ | f) $\log_7(7)$ | g) $\log_3(\frac{1}{9})$ | h) $\log_4(2)$ |

Grundwissen

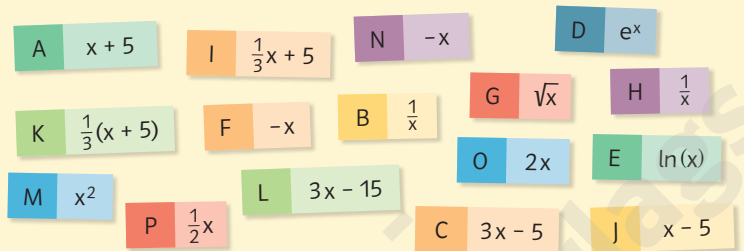
Seite 395

Lösung | Seite 417

5 Die Umkehrfunktion

Ersetzt man im Term $\frac{1}{3}x$ die Variable x durch $3x$, so ergibt sich $\frac{1}{3} \cdot (3x) = x$. Man kehrt also zurück zu x .

$\frac{1}{3}x$ ist somit die „Umkehrung“ von $3x$. Ordnen Sie ebenso den Kärtchen jeweils ihre Umkehrung auf einem anderen Kärtchen zu.



Eine Funktion f ordnet jeder Zahl x aus einer Definitionsmenge D_f genau einen Funktionswert $f(x)$ zu. Die Menge der Funktionswerte heißt Wertemenge W_f . Nun wird untersucht, unter welchen Bedingungen man diese Zuordnung umkehren kann.

In Fig. 1 und Fig. 2 ist jeweils der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ dargestellt. Die maximale Definitionsmenge von f ist die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, denn man kann jede reelle Zahl in den Funktionsterm $f(x)$ einsetzen.

In Fig. 1 ist der Graph von f mit der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ dargestellt. Es gibt zwei verschiedene Zahlen, die der 4 zugeordnet werden, denn es ist $f(2) = f(-2) = 4$. Also kann man die Zuordnung nicht umkehren.

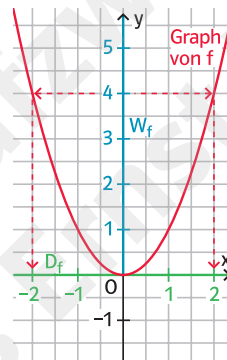


Fig. 1

In Fig. 2 ist der Graph von f mit der eingeschränkten Definitionsmenge $D_f = [0; \infty[$ abgebildet. Zu jeder Zahl y der Wertemenge $W_f = [0; \infty[$ gibt es genau ein x aus D_f mit $f(x) = y$.

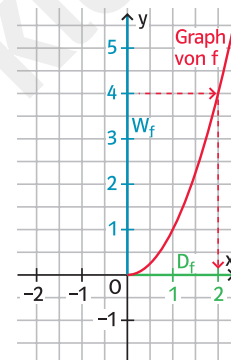


Fig. 2

Daher kann man die Funktion f mit dieser Definitionsmenge umkehren: Man kann jedem y aus der Wertemenge von f das eindeutig bestimmte x mit $f(x) = y$ zuordnen. Diese Funktion nennt man die **Umkehrfunktion** $\bar{f}$ von f . Es gilt somit $\bar{f}(f(x)) = \bar{f}(y) = x$ für alle x aus D_f und $f(\bar{f}(y)) = f(x) = y$ für alle y aus W_f .

Die Umkehrfunktion zur Funktion f mit $f(x) = x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f = [0; \infty[$ ist die Wurzelfunktion $\bar{f}$ mit $\bar{f}(x) = \sqrt{x}$, denn $(\sqrt{x})^2 = x$ und $\sqrt{x^2} = x$ für alle $x \geq 0$. Die Funktion f hat die Wertemenge $W_f = [0; \infty[$. Also hat $\bar{f}$ die Definitionsmenge $D_{\bar{f}} = [0; \infty[$.

Hier wurde die Umkehrfunktion für den rechten Ast der Parabel bestimmt. Man kann auch den linken Parabelast umkehren. Dann ist $D_{\bar{f}} =]-\infty; 0]$ und $\bar{f}(x) = -\sqrt{x}$.

Der Graph von $\bar{f}$

Für $y = f(x)$ gilt $\bar{f}(y) = x$. Falls der Punkt $P(a|b)$ auf dem Graphen von f liegt, so ist $f(a) = b$ und somit $\bar{f}(b) = a$. Folglich liegt der Punkt $\bar{P}(b|a)$ auf dem Graphen von $\bar{f}$. Der Punkt $P(a|b)$ geht in den Punkt $\bar{P}(b|a)$ über, indem man die x -Koordinate und y -Koordinate vertauscht, den Punkt $P(a|b)$ also an der 1. Winkelhalbierenden spiegelt (vgl. Fig. 3). Der Graph von $\bar{f}$ entsteht somit aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden.

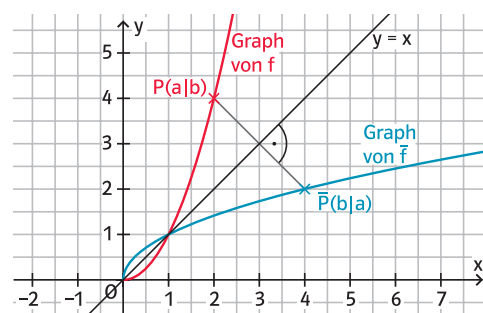


Fig. 3

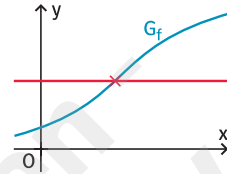
Die 1. Winkelhalbierende ist die Gerade mit der Gleichung $y = x$.

Definition: Eine Funktion f mit Definitionsmenge D_f und Wertemenge W_f heißt **umkehrbar**, falls es zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit $f(x) = y$ gibt.

Bei einer umkehrbaren Funktion f heißt die Funktion $\bar{f}$ mit $\bar{f}(y) = x$ (wobei $f(x) = y$ ist) die **Umkehrfunktion** von f . Sie hat die Definitionsmenge W_f und die Wertemenge D_f .

Es gilt $\bar{f}(f(x)) = x$ für alle $x \in D_f$ und $f(\bar{f}(x)) = x$ für alle $x \in D_{\bar{f}} = W_f$.

Am Graphen G_f einer Funktion f lässt sich die Umkehrbarkeit von f daran erkennen, dass jede Parallele zur x -Achse G_f höchstens einmal schneidet. Dies ist sicher dann der Fall, wenn f streng monoton wachsend oder fallend ist. Nach dem Monotoniesatz gilt dies für eine differenzierbare Funktion f , wenn D_f ein Intervall ist und wenn $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ für alle x gilt, die im Inneren von D_f liegen.



Die strenge Monotonie ist auch erfüllt, wenn für ein $x \in D_f$, das am Rand von D_f liegt, entweder $f'(x) = 0$ gilt oder f' nicht definiert ist.

Bestimmung des Funktionsterms der Umkehrfunktion

Allgemein	Beispiel
Gegeben ist eine Funktion f , die auf der Definitionsmenge D_f umkehrbar ist.	f mit $f(x) = (x+1)^2$; $D_f = [-1; \infty[$; $W_f = [0; \infty[$
1. $y = f(x)$ setzen.	1. $y = (x+1)^2$
2. Gleichung nach x auflösen.	2. $x = \sqrt{y} - 1$ oder $x = -\sqrt{y} - 1$ Da $x \in [-1; \infty[$ ist, trifft der erste Fall zu.
3. x und y vertauschen.	3. $y = \sqrt{x} - 1$
4. y durch $\bar{f}(x)$ ersetzen.	4. $\bar{f}(x) = \sqrt{x} - 1$

Für $x = -\sqrt{y} - 1$ wäre $x \in]-\infty; -1]$. Es würde sich der Funktionsterm für die Umkehrung des linken Asts der Parabel ergeben.

Beispiel Eine Funktion auf Umkehrbarkeit prüfen und Umkehrfunktion bestimmen

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4x-2} + 1$.

- Geben Sie die maximale Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f an.
- Zeigen Sie mithilfe der Ableitung, dass f auf ihrer Definitionsmenge D_f umkehrbar ist.
- Bestimmen Sie einen Term von $\bar{f}$ und geben Sie ihre Definitions- und Wertemenge an.

Lösung

- $D_f = [0,5; \infty[$; $W_f = [1; \infty[$
- $f'(x) = 2 \cdot (4x-2)^{-\frac{1}{2}} > 0$ für $x > 0,5$.
Somit ist f streng monoton wachsend auf $[0,5; \infty[$ und damit umkehrbar.
1. $y = \sqrt{4x-2} + 1$
2. $x = \frac{1}{4} \cdot ((y-1)^2 + 2)$
3. $y = \frac{1}{4} \cdot ((x-1)^2 + 2)$
4. $\bar{f}(x) = \frac{1}{4} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{2}$
 $D_{\bar{f}} = [1; \infty[$; $W_{\bar{f}} = [0,5; \infty[$

Aufgaben

- Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ umkehrbar. Bestimmen Sie einen Funktionsterm für die Umkehrfunktion $\bar{f}$.
 - $f(x) = x - 4,5$
 - $f(x) = \frac{1}{7}x$
 - $f(x) = 3x - 4$
 - $f(x) = -5x + 3$
- Die Funktion f ist auf der angegebenen Definitionsmenge umkehrbar. Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Umkehrfunktion $\bar{f}$.
 - $f(x) = (4x-3)^2$
 $D_f = [0,75; \infty[$
 - $f(x) = \frac{1}{3} \cdot (x-1)^2 + 3$
 $D_f = [1; \infty[$
 - $f(x) = x^3$
 $D_f = [0; \infty[$
- Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f .
 - $f(x) = \sqrt{2x-7}$
 - $f(x) = \frac{4}{\sqrt{5x-2}}$
 - $f(x) = 3 \cdot \sqrt{3-7x} - 5$
 - $f(x) = -(3-2x)^2$
 - $f(x) = \frac{7x}{4-3x}$
 - $f(x) = \frac{4x^2-3}{e^{2x}-5}$

- 4 Die Funktion f ist auf ihrer maximalen Definitionsmenge umkehrbar. Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_f und einen Funktionsterm für die Umkehrfunktion $\bar{f}$.

a) $f(x) = \sqrt{5x - 2}$

b) $f(x) = \frac{2}{3-x}$

c) $f(x) = 3 \cdot \sqrt{-2x + 1} + 2$

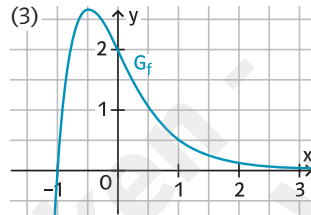
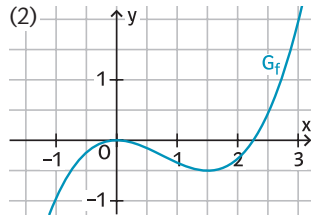
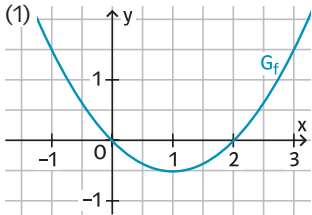
- 5 Zeichnen Sie den Graphen von f und den Graphen der Umkehrfunktion $\bar{f}$.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

c) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$

- 6 Abgebildet ist jeweils der Graph G_f einer Funktion f .



- a) Begründen Sie, dass die Funktion auf dem Bereich $[-1; 3]$ nicht umkehrbar ist.
b) Geben Sie jeweils ein möglichst großes Intervall an, auf dem die Funktion umkehrbar ist.

Test

Lösung | Seite 424

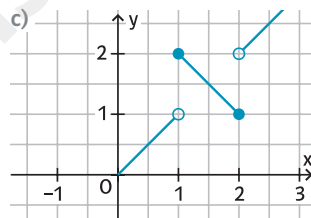
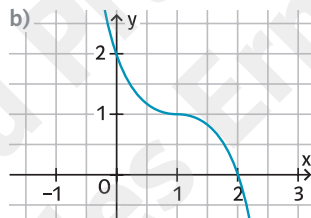
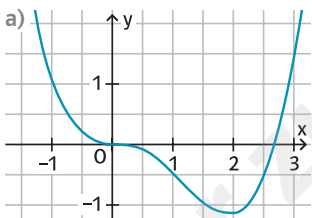
- 7 Die Funktion f ist auf der Definitionsmenge D_f umkehrbar. Bestimmen Sie einen Term von $\bar{f}$.

a) $f(x) = \frac{1}{5}x - 6$
 $D_f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = (2x + 4)^2$
 $D_f = [-2; \infty[$

c) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3x + 4,5} - 2$
 $D_f = [-1,5; \infty[$

- 8 Könnte der Graph zu einer umkehrbaren Funktion gehören? Begründen Sie.



- 9 Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Umkehrfunktion von f .

a) $f(x) = -x^2$; $D_f = [0; \infty[$

b) $f(x) = x^2$; $D_f =]-\infty; 0]$

- 10 Zeigen Sie mithilfe der Ableitung, dass die Funktion f auf D_f umkehrbar ist.

a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (2x + 3)^2 - 4$
 $D_f = [-1,5; \infty[$

b) $f(x) = 5 \cdot e^{-x+4} - 7$
 $D_f = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \left(x^2 + \frac{3}{16}\right) \cdot e^{-2x}$
 $D_f = [0,25; 0,75]$

- 11 Bestimmen Sie ein möglichst großes Intervall, auf dem die Funktion f umkehrbar ist.

a) $f(x) = 0,5 \cdot x^3 + 1$

b) $f(x) = 2 \cdot x^4$

c) $f(x) = -x \cdot e^{-x}$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x$

e) $f(x) = \sin(x)$

f) $f(x) = e^{3x} - 6x$

- 12 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D_f =]0; \infty[$. Bestimmen Sie Gleichungen der Tangenten an G_f und $G_{\bar{f}}$ im Schnittpunkt $S(1|1)$ der beiden Graphen und bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels der beiden Graphen.

- 13 a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f an.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f umkehrbar ist.

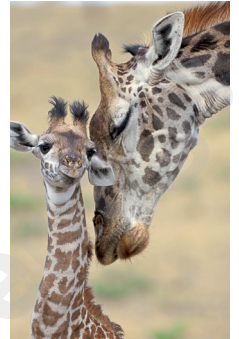
c) Bestimmen Sie einen Term von $\bar{f}$ und geben Sie ihre Definitions- und Wertemenge an.

(1) $f(x) = \sqrt{x - 3}$

(2) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2x - 1}$

(3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$

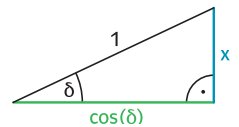
- 14 Die Funktion f mit $f(t) = 5 \cdot \sqrt{t+1}$ beschreibt für $t \geq 0$ die jährlichen Verkaufszahlen eines Elektroauto-Modells (in Tausend Stück, t in Jahren nach Markteinführung).
- Nach wie vielen Jahren werden jährlich 11000 Stück dieses E-Autos verkauft?
 - Beschreiben Sie in Worten, was man in diesem Sachzusammenhang mithilfe der Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f berechnen kann, und bestimmen Sie einen Funktionsterm von $\bar{f}$.
 - Formulieren Sie im Sachzusammenhang eine Frage zur Gleichung $\bar{f}(2y) - \bar{f}(y) = 6$. Drücken Sie diese Frage durch eine Gleichung mit f statt $\bar{f}$ aus.
- 15 Die Funktion h mit $h(t) = 8,5 \cdot \sqrt{0,01t + 0,04}$ beschreibt die Größe einer Giraffe nach der Geburt ($h(t)$ in m, $0 \leq t \leq 20$ in Monaten). Bestimmen Sie einen Term der Funktion k in Abhängigkeit von x , mit dem man berechnen kann, nach welcher Zeit diese Giraffe eine bestimmte Größe x erreicht.
- 16 Bestimmen Sie ein möglichst großes Intervall, auf dem die Funktion f umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Funktionsterm der Umkehrfunktion $\bar{f}$ für diese Definitionsmenge.
- $f(x) = \frac{1}{x-1}$
 - $f(x) = x^2 + 6x + 9$
 - $f(x) = x^2 - 2x$



Test

→ Lösungen | Seite 425

- 17 Gegeben ist Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \sqrt{4x-8} + 5$.
- Geben Sie die maximale Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f an.
 - Zeigen Sie, dass die Funktion f umkehrbar ist.
 - Bestimmen Sie einen Term von $\bar{f}$ und geben Sie ihre Definitions- und Wertemenge an.
- 18 Die Funktion g mit $g(x) = 5 \cdot \sqrt{2x+1}$ beschreibt die Herstellungskosten (in Euro) in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x einer Schraubensorte. Beschreiben Sie, was man hier mit der Umkehrfunktion $\bar{g}$ berechnen kann, und bestimmen Sie einen Term von $\bar{g}$.
- 19 Gegeben ist eine auf einem Intervall I differenzierbare und umkehrbare Funktion f mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Dann ist die Umkehrfunktion $\bar{f}$ differenzierbar auf W_f .
- Leiten Sie mithilfe von $f(\bar{f}(x)) = x$ die Ableitungsregel $\bar{f}'(x) = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))}$ her.
 - Leiten Sie die Funktion g mit $g(x) = \sqrt{x}$ mit der Regel aus Teilaufgabe a) ab.
 - Die Umkehrfunktion $\bar{f}$ der Sinusfunktion f mit $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist die Arkussinusfunktion $\bar{f}$ mit $\bar{f}(x) = \arcsin(x)$. Zeigen Sie mithilfe des abgebildeten Dreiecks, dass $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ gilt, und folgern Sie daraus $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für alle $x \in]-1; 1[$.
- 20 Bestimmen Sie ein möglichst großes Intervall, auf dem die Funktion f umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Funktionsterm der Umkehrfunktion $\bar{f}$ für diese Definitionsmenge.
- $f(x) = x^3$
 - $f(x) = (2x-1)^5$
 - $f(x) = \frac{3x-2}{4x-1}$
 - $f(x) = \frac{3x}{2x^2-18}$
- 21
- Die Funktion f ist umkehrbar und differenzierbar. Angenommen, ihr Graph G_f hat im Schnittpunkt $S(a|a)$ von G_f und $G_{\bar{f}}$ den Steigungswinkel $\alpha \geq 45^\circ$. Begründen Sie, dass G_f und $G_{\bar{f}}$ in S den Schnittwinkel $2\alpha - 90^\circ$ haben. Finden Sie eine ähnliche Formel für $0 < \alpha < 45^\circ$.
 - Geben Sie Terme zweier verschiedener umkehrbarer Funktionen f an mit $A(2|1) \in G_f \cap G_{\bar{f}}$.
 - Geben Sie Terme für fünf umkehrbare Funktionen f an, für die $f(x) = \bar{f}(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt.



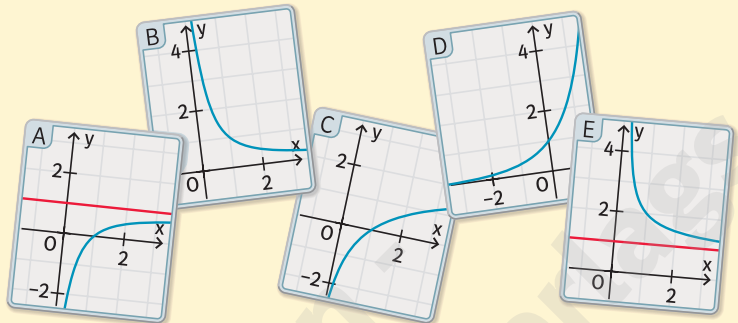
Grundwissen Test

- 22
- Skizzieren Sie die Parabeln mit der Gleichung $y = ax^2$ für $a = 1; 2; 0,5$. Beschreiben Sie wie sich die Form der Parabel verändert, wenn der Wert des Parameters a erhöht wird.
 - Skizzieren Sie die Parabeln mit der Gleichung $y = (x-b)^2$ für $b = 1; 2; 3$. Beschreiben Sie, wie eine Erhöhung des Parameters b die Lage der Parabel verändert.
 - Geben Sie die Gleichung einer Parabel in der Form $y = ax^2 + bx + c$ an, die den Scheitel (1|2) und den Punkt P(4|-7) enthält, (2) $S(-2|-3)$ und den Punkt $P(-5|2)$ enthält.

→ Grundwissen
Seite 396
Lösung | Seite 425

6 Die Logarithmusfunktion und ihre Ableitung

Drei der fünf Abbildungen zeigen die Graphen der natürlichen Exponentialfunktion f , ihrer Umkehrfunktion $\bar{f}$ und der Ableitungsfunktion $\bar{f}'$. Ordnen Sie zu.



Die Funktion f mit $f(x) = e^x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und damit also umkehrbar. Es soll nun die Umkehrfunktion von f und deren Ableitung untersucht werden.

Bestimmung der Umkehrfunktion $\bar{f}$:

1. $y = f(x)$
2. Gleichung nach x auflösen.
3. x und y vertauschen.
4. y durch $\bar{f}(x)$ ersetzen.

$$\begin{aligned} y &= e^x & | \ln \\ \ln(y) &= x \\ y &= \ln(x) \\ \bar{f}(x) &= \ln(x) \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion $\bar{f}$ heißt **natürliche Logarithmusfunktion** $\ln$. Der Graph der natürlichen Logarithmusfunktion entsteht aus dem Graphen der natürlichen Exponentialfunktion durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden mit der Gleichung $y = x$ (Fig. 1).

Die Definitionsmenge der natürlichen Logarithmusfunktion ist $D_{\bar{f}} = W_{\bar{f}} = \mathbb{R}^+$, die Wertemenge ist $W_{\bar{f}} = D_{\bar{f}} = \mathbb{R}$. Es gilt $\ln(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $e^{\ln(x)} = x$ für alle $x > 0$.

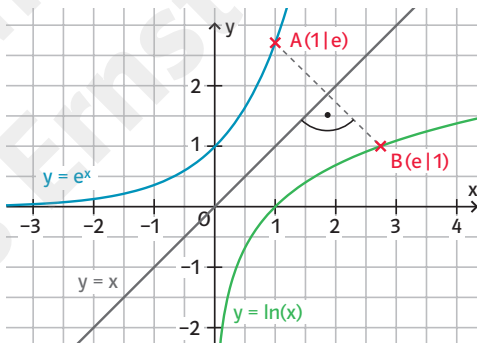


Fig. 1

Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion $\bar{f}(x) = \ln(x)$; $x > 0$:

Ansatz:

$$x = e^{\bar{f}(x)}$$

Auf beiden Seiten ableiten und Kettenregel beachten:

$$1 = e^{\bar{f}(x)} \cdot \bar{f}'(x)$$

$e^{\bar{f}(x)}$ durch x ersetzen:

$$1 = x \cdot \bar{f}'(x)$$

Division durch x , da $x > 0$:

$$\bar{f}'(x) = \frac{1}{x}$$

Die **natürliche Logarithmusfunktion** $\bar{f}$ mit $\bar{f}(x) = \ln(x)$ ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$. Sie hat die maximale Definitionsmenge $D_{\bar{f}} =]0; \infty[$ und die Wertemenge $W_{\bar{f}} = \mathbb{R}$. Für die Ableitungsfunktion von $\bar{f}$ gilt $\bar{f}'(x) = \frac{1}{x}$.

Beispiel 1 Natürliche Logarithmusfunktion ableiten

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f und vereinfachen Sie, wenn möglich.

a) $f(x) = x + \ln(x)$

b) $f(x) = \ln(ax)$, $a \neq 0$

c) $f(x) = x \cdot \ln(2x)$

Lösung

a) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$

b) $f'(x) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$

c) $f'(x) = 1 \cdot \ln(2x) + x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2$
 $= \ln(2x) + 1$

Beispiel 2 Logarithmusfunktion umkehren

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln(2x - 6)$.

- Geben Sie die maximale Definitionsmenge und die Wertemenge von f an.
- Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion $\bar{f}$.
- Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge von $\bar{f}$ an.

Lösung

- $D_f =]3; \infty[$; $W_f = \mathbb{R}$
- $f'(x) = \frac{2}{3 \cdot (2x - 6)} > 0$ für $x > 3$. Also ist f streng monoton wachsend und damit umkehrbar.
Aus $y = \frac{1}{3} \cdot \ln(2x - 6)$ folgt $x = \frac{1}{2} \cdot e^{3y} + 3$. Also ist $\bar{f}(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{3x} + 3$.
- $D_{\bar{f}} = \mathbb{R}$; $W_{\bar{f}} =]3; \infty[$

Aufgaben

- Bestimmen Sie die Ableitung von f .
 - $f(x) = 3 + \ln(x)$
 - $f(x) = 2x + \ln(x)$
 - $f(x) = 3 \cdot \ln(x + 1)$
 - $f(x) = x^2 + \ln(x)$
 - $f(x) = 3x^2 + \ln(x - 1)$
 - $f(x) = \ln(x - 2) - \frac{1}{x}$
- Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = \ln(2x)$.
 - Zeichnen Sie mithilfe einer Wertetabelle die Graphen von f und g .
 - Spiegeln Sie die Graphen von f und g an der 1. Winkelhalbierenden und beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen den beiden gespiegelten Graphen.
- ☒ Geben Sie die Nullstellen der Funktion f an.
 - $f(x) = \ln(x)$
 - $f(x) = \ln(x) - 2$
 - $f(x) = \ln(x) + 3$
 - $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}$
 - $f(x) = \ln(x^2 - 3)$
 - $f(x) = \ln(x - 5) - 2$
- Gegeben ist die natürliche Logarithmusfunktion f mit $f(x) = \ln(x)$.
 - Bestimmen Sie den x -Wert, für den f den Funktionswert 3 hat.
 - Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist, und geben Sie einen Term der Umkehrfunktion $\bar{f}$ an.
 - Zeigen Sie, dass der Graph von f rechtsgekrümmt ist.
 - Begründen Sie, dass sich der Graph von f für $x \rightarrow 0$ an die y -Achse annähert.
 - Begründen Sie, dass für $x \rightarrow +\infty$ auch $\ln(x) \rightarrow +\infty$ gilt.
- Bestimmen Sie die Ableitung für $a \neq 0$ und vereinfachen Sie, wenn möglich.
 - $f(x) = \ln(4x)$
 - $f(x) = \ln(x^3)$
 - $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 9)$
 - $f(x) = \ln(x^a)$
 - $f(x) = \ln(a \cdot (x - 2)^3)$
 - $f(x) = \ln\left(\frac{a}{x - 4}\right)$
- Bestimmen Sie die Ableitung und vereinfachen Sie, wenn möglich.
 - $f(x) = 3x \cdot \ln(x)$
 - $f(x) = x^2 \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$
 - $f(x) = x \cdot \ln(\sqrt{x})$
 - $f(x) = 4 \cdot \ln\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$
 - $f(x) = (x^2 - 1) \cdot \ln(x + 1)$
 - $f(x) = (\ln(3x))^2$

Test

Lösung | Seite 425

- Leiten Sie ab und vereinfachen Sie, wenn möglich.
 - $f(x) = 4 \cdot \ln(3x^2)$
 - $f(x) = e^{2x} + x \cdot \ln(x^2)$
 - $f(x) = x^3 \cdot \ln(2x^2)$
- Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \ln(4x + 6)$.
 - Geben Sie die maximale Definitionsmenge und die Wertemenge von f an.
 - Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion $\bar{f}$.
 - Geben Sie die Definitionsmenge und Wertemenge von $\bar{f}$ an.

- 9 Gegeben ist die Funktion f mit
- (1) $f(x) = e^{3x}$, (2) $f(x) = e^{-2x+1}$, (3) $f(x) = 4 \cdot e^{3x-2} + 1$.
- a) Geben Sie jeweils die maximale Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f an.
 b) Zeigen Sie jeweils, dass f umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion $\bar{f}$.
 c) Geben Sie jeweils die Definitionsmenge und Wertemenge der Funktion $\bar{f}$ an.
- 10 Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f .
- a) $f(x) = x - \ln(x)$ b) $f(x) = x \cdot \ln(x) - 2x$ c) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$
- 11 Die Funktion h mit $h(t) = 4 \cdot \frac{1}{(t+1)^2} \cdot \ln(t+1)$ beschreibt die Höhe des Hochwassers in einem Ort (t in Tagen nach Beginn des Regens, $h(t)$ in m über Normal).
- a) Bestimmen Sie den höchsten Wasserstand über Normal.
 b) Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt das Hochwasser am stärksten abnimmt.
 c) Interpretieren Sie die Gleichung $h(t+2) - h(t) = 0,2$ im Sachzusammenhang.
 d) Nach vier Tagen geht die Abnahme des Hochwassers ohne Knick in eine lineare Abnahme über. Berechnen Sie, wann wieder die normale Wasserhöhe erwartet wird.
- 12 Durch die Funktion f mit $f(t) = \ln(t+1)$ werden die täglichen Verkaufszahlen einer neuen Schokoladentafel nach Markteinführung beschrieben (t in Monaten, $f(t)$ in Hundert).
- a) Zeigen Sie, dass die täglichen Verkaufszahlen ständig zunehmen.
 b) Geben Sie einen Term der Umkehrfunktion von f an und beschreiben Sie ihre Bedeutung im Kontext.
 c) Bestimmen Sie für einen beliebigen Wert von a mit $0 < a \leq \ln(3)$ einen Zwei-Monate-Zeitraum, in dem die täglichen Verkaufszahlen um a zunehmen.



Test

Lösung | Seite 425

- 13 Bestimmen Sie die Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(x)$.
- 14 Es ist g eine differenzierbare Funktion, die auf einem Intervall I definiert ist und nur positive Funktionswerte annimmt. Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = \ln(g(x))$.
- a) Bestimmen Sie $f'(x)$ und geben Sie einen Term der Funktion f mit $f'(x) = \tan(x)$ an.
 b) Angenommen, es ist $g'(x) > 0$ für alle $x \in I$. Dann ist g auf I umkehrbar mit der Umkehrfunktion $\bar{g}$. Zeigen Sie, dass f ebenfalls umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Term von $\bar{f}$.
- 15 a) Zeigen Sie, dass die Funktion h mit $h(x) = x \cdot e^x$ auf $[-1; \infty[$ umkehrbar ist.
 b) Die Umkehrfunktion von h heißt Lambert'sche W-Funktion, die Zahl $\Omega = W(1)$ heißt Omega-Konstante. Der Graph der natürlichen Exponentialfunktion soll so in x -Richtung verschoben werden, dass der verschobene Graph den Graphen der natürlichen Logarithmusfunktion in einem Punkt berührt. Geben Sie die Größe dieser Verschiebung mithilfe von Ω an.
 c) Es sei $\eta = \frac{1}{\Omega}$. Berechnen Sie η^η .
- 16 a) Beurteilen Sie ohne Taschenrechner, ob $\pi^e < e^\pi$ oder $e^\pi < \pi^e$ gilt.
 b) Gegeben ist $a > 0$. Zeigen Sie: Es gilt $x^a \leq a^x$ für alle $x > 0$ genau dann, wenn $a = e$ ist.

$\Omega = 0,56714329 \dots$



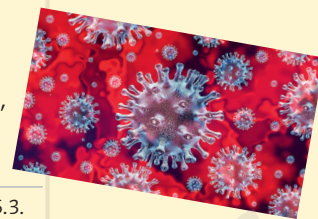
Grundwissen Test

- 17 Gegeben ist eine Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2 + 4x - 4$.
- a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden mit der Gleichung $y = 3x - 4$.
 b) Bestimmen Sie b so, dass die Gerade mit der Gleichung $y = 3x + b$ nur einen Schnittpunkt mit der Parabel hat.

Grundwissen
 Seite 396
 Lösung | Seite 425

Ausbreitung eines Virus modellieren

Im Frühjahr 2020 stieg die Zahl der Infizierten mit dem Coronavirus SARS-CoV2 sehr schnell an, auch in Baden-Württemberg. In der dritten Zeile der Tabelle findet sich die Gesamtzahl der bis zu diesem Tag Infizierten in Baden-Württemberg im März 2020.



Datum	3.3.	5.3.	7.3.	9.3.	11.3.	13.3.	15.3.	17.3.	19.3.	21.3.	23.3.	25.3.
Tag t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
i(t)	50	89	182	232	335	569	977	1641	2748	3818	5333	7252
$\frac{i(t+2)}{i(t)}$	1,78	2,04	1,27	1,44	1,70	1,72	1,68	1,67	1,39	1,94	1,36	
$\ln(i(t))$	3,91	4,49	5,20	5,45	5,81	6,34	6,88	7,40	7,92	8,25	8,58	8,89

Problem 1

Handelte es sich damals um exponentielles Wachstum?
Welche Funktion beschreibt die Infiziertenzahlen am besten?

Erarbeitung 1

Das schnelle Anwachsen lässt ein exponentielles Wachstum vermuten (vgl. Fig. 1). Berechnet man den zugehörigen Wachstumsfaktor $\frac{i(t+2)}{i(t)}$ (vierte Zeile der Tabelle), so beobachtet man, dass dieser stark um den Mittelwert 1,64 schwankt. Die Schwankungen entstehen u.a. dadurch, dass nicht alle Gesundheitsämter jeden Tag ihre Infiziertenzahlen meldeten. Es ist daher zunächst schwer zu beurteilen, ob annähernd exponentielles Wachstum vorliegt.

Folgende Idee hilft weiter: Liegt exponentielles Wachstum mit

$i(t) = c \cdot e^{kt}$ vor, so gilt für den Logarithmus von $i(t)$:

$$\ln(i(t)) = \ln(c \cdot e^{kt}) = \ln(e^{\ln(c)} \cdot e^{kt}) = \ln(e^{\ln(c) + kt}) = \ln(c) + kt.$$

Der Graph der Funktion g mit $g(t) = \ln(i(t))$ ist also eine Gerade mit Steigung k und y -Achsenabschnitt $\ln(c)$. In der fünften Zeile der Tabelle wurde $\ln(i(t))$ berechnet. Fig. 2 zeigt, dass die zugehörigen Datenpunkte $(t | \ln(i(t)))$ annähernd auf einer Geraden liegen. Man trägt eine Gerade durch die Punkte so ein, dass sich die Abstände zu den Datenpunkten nach oben und unten ungefähr ausgleichen. Man erhält eine Gerade mit der Gleichung $y = d + kt$, wobei $d \approx 4,1$ und $k \approx \frac{5}{22} \approx 0,227$ ist. Da die Datenpunkte $(t | \ln(i(t)))$ annähernd auf der Geraden mit der Gleichung $y = d + kt$ liegen, liegen die Punkte $(t | i(t))$ annähernd auf dem Graphen der Exponentialfunktion f mit $f(t) = e^{4,1} \cdot e^{0,227t} \approx 60 \cdot e^{0,227t}$.

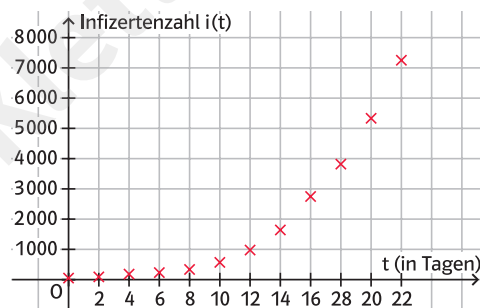


Fig. 1

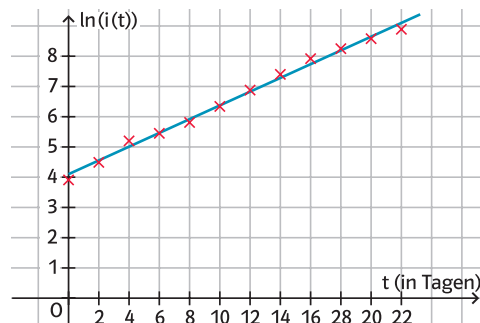


Fig. 2

Die Ausgleichsgerade für die logarithmierten Messwerte wurde allerdings nur nach Augenmaß gezeichnet. Mit vielen Tabellenkalkulationsprogrammen oder wissenschaftlichen Taschenrechnern kann man Daten in eine Tabelle eingeben und dann die Gleichung einer optimalen Geraden durch die sogenannte „lineare Regression“ bestimmen. Man nennt sie **Regressionsgerade**. Für die Infiziertenzahlen ergibt sich die Regressionsgerade mit der Gleichung $y = 4,08 + 0,228 \cdot t$. Damit erhält man $i(t) \approx e^{4,08} \cdot e^{0,228t} \approx 59 \cdot e^{0,228t}$.

Manche Taschenrechner erlauben auch die sogenannte „exponentielle Regression“. Diese ergibt hier

$$i(t) \approx 59,38 \cdot 1,256^t \\ \approx e^{4,08} \cdot e^{0,228t}$$

Ergebnis 1

Die Infiziertenzahlen in Baden-Württemberg stiegen im März 2020 annähernd exponentiell an. Die Exponentialfunktion f mit $f(t) = 59 \cdot e^{0,228t}$ beschreibt ungefähr den Verlauf der Infiziertenzahlen.

Problem 2

Wie kann man die Regressionsgerade zu gegebenen Messwerten berechnen?

Erarbeitung 2

Allgemein sind n Datenpunkte $P_1(x_1|y_1), P_2(x_2|y_2), \dots, P_n(x_n|y_n)$ gegeben. Zur besseren Übersicht wird ein Verfahren für drei Datenpunkte beschrieben, deren x -Werte nicht alle gleich sind.

Fig. 1 enthält drei Datenpunkte und eine Ausgleichsgerade, beschrieben durch die Funktion f mit $f(x) = bx + a$. Die Ausgleichsgerade ist „optimal“, wenn die grün markierten Abstände (die „Fehler“) zwischen $f(x_i)$ und y_i in einem bestimmten Sinn insgesamt möglichst klein sind.

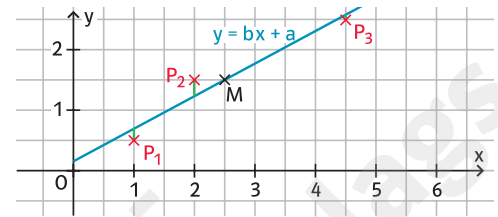


Fig. 1

Häufig wird dazu die **Methode der kleinsten Quadrate** benutzt. Bei dieser Methode wird die Summe der Quadrate der Abstände $(f(x_i) - y_i)^2$ minimiert. Es ist zunächst b beliebig und $q(a) = (bx_1 + a - y_1)^2 + (bx_2 + a - y_2)^2 + (bx_3 + a - y_3)^2$ die Summe der Fehlerquadrate für diese Steigung b als Funktion von a . Die notwendige Bedingung für die Minimalität von q ist $q'(a) = 0$, d.h. $q'(a) = 2 \cdot (bx_1 + a - y_1) + 2 \cdot (bx_2 + a - y_2) + 2 \cdot (bx_3 + a - y_3) = 0$. Es ergibt sich $a = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) - b \cdot \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$ mit $\bar{x} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ (Mittelwert der x -Werte) und $\bar{y} = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$ (Mittelwert der y -Werte). Daraus folgt, dass unabhängig von b der Punkt $M(\bar{x}|\bar{y})$ auf jeden Fall auf der Regressionsgeraden liegen muss. Nun muss noch die optimale Steigung b der Regressionsgeraden bestimmt werden. Das bedeutet, dass für $a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$ ein Minimum der Funktion r bestimmt werden muss mit

$$\begin{aligned} r(b) &= (bx_1 + a - y_1)^2 + (bx_2 + a - y_2)^2 + (bx_3 + a - y_3)^2 \\ &= (\bar{y} - b \cdot \bar{x} + bx_1 - y_1)^2 + (\bar{y} - b \cdot \bar{x} + bx_2 - y_2)^2 + (\bar{y} - b \cdot \bar{x} + bx_3 - y_3)^2 \\ &= (b(x_1 - \bar{x}) - (y_1 - \bar{y}))^2 + (b(x_2 - \bar{x}) - (y_2 - \bar{y}))^2 + (b(x_3 - \bar{x}) - (y_3 - \bar{y}))^2. \end{aligned}$$

Aus der notwendigen Bedingung $r'(b) = 0$ für Minimalität folgt

$$b = \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + (x_3 - \bar{x})(y_3 - \bar{y})}{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2} = \frac{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) - 3 \bar{x} \bar{y}}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3 \bar{x}^2}.$$

Ergebnis 2

Für die Regressionsgerade mit der Gleichung $y = bx + a$ durch drei Datenpunkte $P_1(x_1|y_1)$,

$P_2(x_2|y_2)$ und $P_3(x_3|y_3)$ gelten die Formeln $b = \frac{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) - 3 \bar{x} \bar{y}}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3 \bar{x}^2}$ und $a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$.

- 1 In der Tabelle sind die Infiziertenzahlen einer Stadt im Oktober 2020 angegeben.
 - a) Zeichnen Sie ein Diagramm 1 mit den Datenpunkten $(t|i(t))$ und ein weiteres Diagramm 2 mit den logarithmierten Werten $(t|\ln(i(t)))$. Zeichnen Sie nach Augenmaß in Diagramm 2 eine Ausgleichsgerade ein und geben Sie eine Gleichung dieser Geraden an.
 - b) Bestimmen Sie aus der Ausgleichsgeraden von Diagramm 2 eine Gleichung für eine Exponentialfunktion, die das Wachstum der Infiziertenzahlen beschreibt. Zeichnen Sie den Graphen dieser Exponentialfunktion in Diagramm 1 ein und berechnen Sie die prozentuale Abweichung von den beobachteten Infiziertenzahlen. Beurteilen Sie, ob es sich näherungsweise um exponentielles Wachstum handelt.
 - c) Bestimmen Sie die Verdopplungszeit für die in Teilaufgabe b) berechnete exponentielle Näherung der Infiziertenzahlen.
 - d) Am zehnten Tag zählt man 345 Infizierte. Beurteilen Sie, ob die Modellierung von Teilaufgabe b) noch passt.

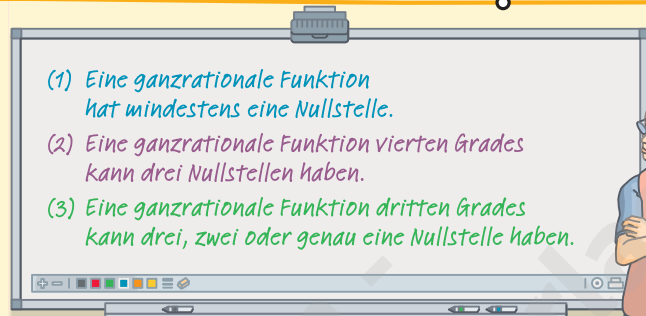
→ Lösungen | Seite xxx

Tag t	$i(t)$
0	35
1	42
2	59
3	65
4	97
5	126
6	177

- 2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ausgleichsgeraden von Diagramm 2 aus Aufgabe 1 durch lineare Regression mit den Formeln von Ergebnis 2 und mit einem Taschenrechner oder Tabellenkalkulationsprogramm. Bestimmen Sie aus dieser linearen Regression einen Term einer Exponentialfunktion, die die Datenpunkte $(t|i(t))$ annähert, und zeichnen Sie deren Graphen in Diagramm 1 ein.

2 Linearfaktordarstellung – mehrfache Nullstellen

Beurteilen Sie, ob die Aussagen auf der Tafel wahr oder falsch sind. Erläutern Sie mithilfe von Skizzen.



Liegt der Term einer ganzrationalen Funktion f faktorisiert vor, wie z. B. bei der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)$, kann man mithilfe des Satzes vom Nullprodukt die Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 1$ ohne Rechnung ablesen. Faktoren wie $(x-1)$ oder $(x+2)$ heißen **Linearfaktoren**.

Multipliziert man den Funktionsterm von f aus, ergibt sich

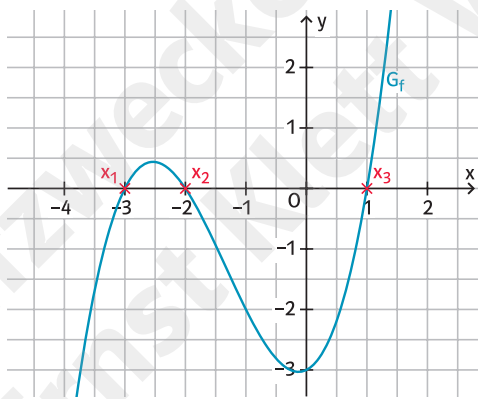
$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+2)(x+3),$$

$$= \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x - 3$$

mit x^3 als höchster x -Potenz.

Besteht ein Funktionsterm einer Funktion f aus n Linearfaktoren, so ist

$f(x) = a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)$. Somit hat f höchstens n Nullstellen. In der ausmultiplizierten Form ist x^n die höchste Potenz. Sind $x_1, x_2, \dots, x_n$ alle voneinander verschieden, so hat die Funktion genau n Nullstellen.



Auch ein Term wie $2x-3$ heißt Linearfaktor.

Beachten Sie: Nicht bei jeder ganzrationalen Funktion kann man den Funktionsterm in Linearfaktordarstellung angeben, wie z. B. bei der Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1$.

Um zu zeigen, dass jede ganzrationale Funktion vom Grad n höchstens n Nullstellen hat, wird zunächst der folgende Satz bewiesen.

Satz 1: Es ist f eine ganzrationale Funktion vom Grad n und c eine Nullstelle von f . Dann gibt es eine ganzrationale Funktion g vom Grad $n-1$, sodass $f(x) = (x-c) \cdot g(x)$ ist.

Beweis:

Man verschiebt den Graphen von f um $-c$ in x -Richtung. Die zugehörige Funktion ist also die Funktion h mit $h(x) = f(x - (-c)) = f(x + c)$. Die Funktion h ist eine ganzrationale Funktion, die man auch in der Form $h(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ darstellen kann, wobei die a_i reelle Zahlen sind.

Die Stelle $x_0 = 0$ ist eine Nullstelle von h , denn es gilt $h(0) = f(0 + c) = f(c) = 0$. Somit ist $a_0 = 0$ und man kann im Term $h(x)$ den Faktor x ausklammern:

$$h(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x = x \cdot (a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1) = x \cdot k(x).$$

Die Funktion k ist ganzrational und hat den Grad $n-1$.

Verschiebt man den Graphen von h nun wieder um c in x -Richtung, so ergibt sich der Graph der Funktion f und es gilt $f(x) = h(x-c) = (x-c) \cdot k(x-c) = (x-c) \cdot g(x)$ und $g(x) = k(x-c)$.

Die Funktionen k und g haben beide den Grad $n-1$.

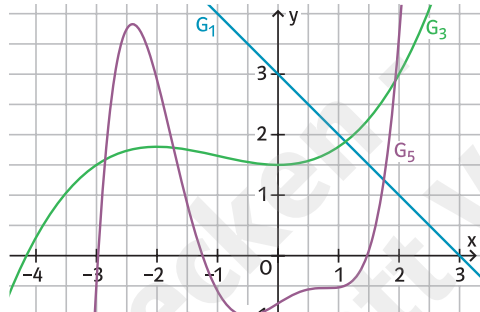
Auf die neue Funktion g kann man, falls eine weitere Nullstelle d existiert, Satz 1 wieder anwenden und einen weiteren Linearfaktor ausklammern. Dann ist $f(x) = (x - c)(x - d) \cdot i(x)$, wobei i vom Grad $n - 2$ ist. Der Grad verkleinert sich jedes Mal um eins. Diesen Schritt kann man insgesamt höchstens n -mal durchführen.

Satz 2: Eine ganzrationale Funktion f vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

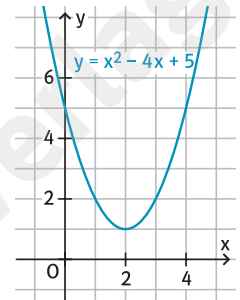
Aus Klasse 10 weiß man, dass für eine ganzrationale Funktion f mit ungeradem Grad n gilt:

- (1) Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $f(x) \rightarrow +\infty$ und
für $x \rightarrow -\infty$ gilt $f(x) \rightarrow -\infty$
oder
(2) für $x \rightarrow +\infty$ gilt $f(x) \rightarrow -\infty$ und
für $x \rightarrow -\infty$ gilt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Aufgrund dieses Verhaltens muss eine ganzrationale Funktion mit ungeradem Grad n mindestens eine Nullstelle besitzen.



G_i : Graph einer Funktion vom Grad i mit $i \in \{1; 3; 5\}$



Für gerades n muss das nicht der Fall sein.

Mehrfache Nullstellen

Die Funktion f mit

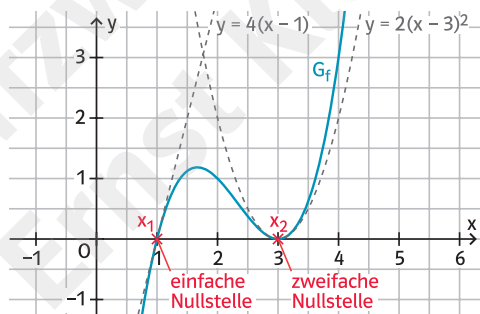
$$f(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 3) = (x - 1) \cdot (x - 3)^2$$

hat die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

Da der Linearfaktor $(x - 3)$ im Funktionsterm zweimal vorkommt, heißt $x_2 = 3$ **zweifache** bzw. **doppelte Nullstelle**.

Allgemein definiert man:

a ist eine **k -fache Nullstelle** einer Funktion f , wenn $f(x) = (x - a)^k \cdot g(x)$ mit $g(a) \neq 0$ gilt.



Statt k -facher Nullstelle sagt man auch Nullstelle k -ter Ordnung.

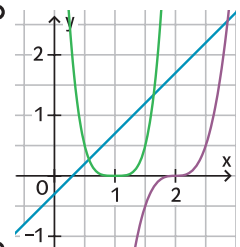
Der Graph von f zeigt bei der doppelten Nullstelle $x_2 = 3$ eine Besonderheit: Er berührt die x -Achse und schneidet sie nicht. Das kann man auch anhand des Funktionsterms begründen: In der Nähe der Stelle $x_2 = 3$ gilt $x - 1 \approx 2$, also $f(x) \approx 2 \cdot (x - 3)^2$. Der Graph von f verläuft in der Nähe der Stelle $x_2 = 3$ ungefähr wie eine nach oben geöffnete Parabel. Der Graph von f muss an dieser Stelle einen Tiefpunkt haben.

In der Nähe der Stelle $x_1 = 1$, also für $x \approx 1$, gilt hingegen $(x - 3)^2 \approx 4$ und somit $f(x) \approx 4 \cdot (x - 1)$. Der Graph von f verläuft in der Nähe der Stelle $x_1 = 1$ ungefähr wie die Gerade mit der Steigung 4; also schneidet der Graph von f die x -Achse.

Analoge Überlegungen wie beim Graphen der Funktion f zeigen, dass der Graph der Funktion i mit $i(x) = (x - a)^k \cdot g(x)$, k ungerade und $k \neq 1$, an der Stelle $x = a$ einen Sattelpunkt hat. Beispielsweise hat die Funktion i mit $i(x) = (x - 2)^3(x^2 + 1)$ an der Stelle $x = 2$ einen Sattelpunkt.

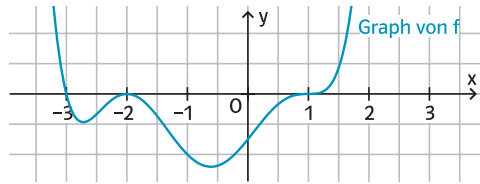
Satz 3: Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f der Form $f(x) = (x - a)^k \cdot g(x)$ mit $g(a) \neq 0$, und $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, wobei g eine ganzrationale Funktion ist. Dann gilt:

- Für $k = 1$ schneidet der Graph von f an der Stelle $x = a$ die x -Achse.
- Ist k gerade, so hat der Graph von f an der Stelle $x = a$ einen Extrempunkt auf der x -Achse.
- Ist k ungerade ($k \neq 1$), so hat der Graph von f an der Stelle $x = a$ einen Sattelpunkt auf der x -Achse.

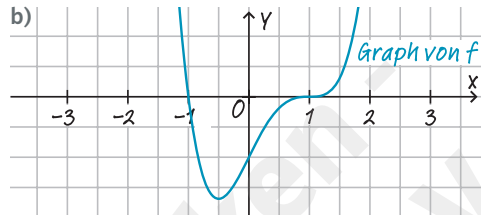


Beispiel 1 Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graphen erkennen

- a) Bestimmen Sie zum abgebildeten Graphen den Term einer ganzrationalen Funktion möglichst niedrigen Grades, der die Vielfachheit der Nullstellen berücksichtigt.
- b) Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$, $a > 0$.

**Lösung**

- a) Der Graph hat bei $x_1 = -3$ eine einfache Nullstelle, $x_2 = -2$ eine Nullstelle gerader Ordnung, $x_3 = 1$ eine Nullstelle ungerader Ordnung größer 1. Es gilt $f(x) = a \cdot (x+3) \cdot (x+2)^2 \cdot (x-1)^3$. Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $f(x) \rightarrow +\infty$ und somit $a > 0$.

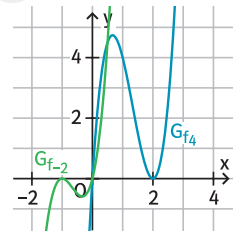
**Beispiel 2** Funktionenschar auf Nullstellen untersuchen

Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = x \cdot (2x - k)^2$, $k \in \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_{f_k} .

- a) Geben Sie die Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k an.
- b) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass einer der beiden Extrempunkte von G_{f_k} für alle Werte von k auf der x -Achse liegt.

Lösung

- a) $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2x - k)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $2x - k = 0$; Lösungen: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{k}{2}$.
- b) Da $x_2 = \frac{k}{2}$ eine doppelte Nullstelle von f_k ist, ist $E(\frac{k}{2} | 0)$ immer ein Extrempunkt von G_{f_k} .



Die Abbildung zeigt die Graphen für $k = -2$ und $k = 4$.

Aufgaben

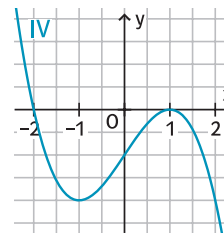
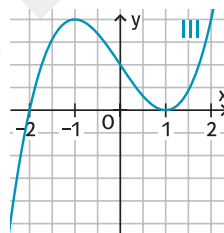
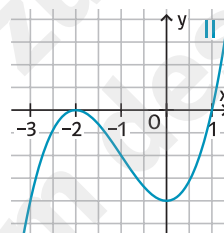
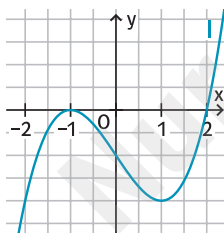
- 1 Ordnen Sie jeder Funktion den passenden Graphen zu. Begründen Sie.

$$f(x) = (x-1)^2(x+2)$$

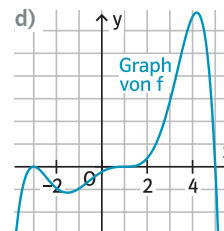
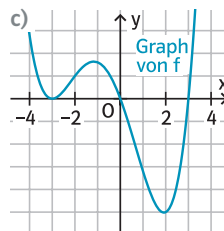
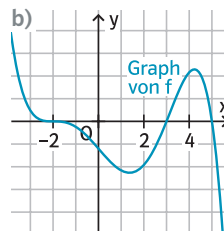
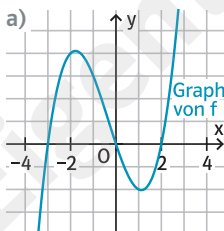
$$g(x) = (x+1)^2(x-2)$$

$$h(x) = -(x-1)^2(x+2)$$

$$i(x) = (x-1)(x+2)^2$$

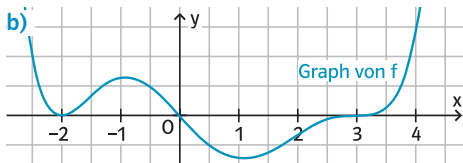
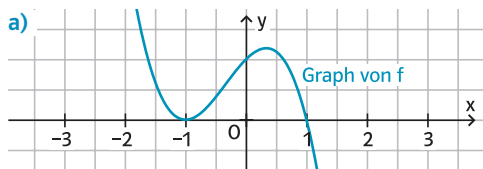


- 2 Bestimmen Sie zum abgebildeten Graphen den Term einer ganzrationalen Funktion möglichst niedrigen Grades, der die Vielfachheit der Nullstellen berücksichtigt.

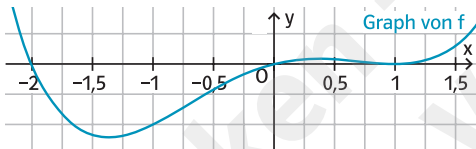


- 3 Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = -k(x+1)^2 \cdot (x-k)^3$, $k > 0$. Der Graph ist G_{f_k} . Beurteilen Sie, welche der folgenden Aussagen für alle k wahr oder falsch ist.
- (1) f_k hat genau zwei Nullstellen. (2) G_{f_k} hat bei $x_1 = -1$ einen Sattelpunkt,
- (3) G_{f_k} hat bei $x_2 = k$ einen Sattelpunkt, (4) G_{f_k} schneidet bei $S(0 | k^4)$ die y -Achse.

- 4 Bestimmen Sie zum abgebildeten Graphen den Term einer ganzrationalen Funktion möglichst niedrigen Grades, der die Vielfachheit der Nullstellen berücksichtigt.



- 5 Der Ausschnitt des Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f zeigt sämtliche Schnittpunkte mit der x -Achse. Bestimmen Sie einen geeigneten Funktionsterm möglichst niedrigen Grades.



- 6 Zerlegen Sie den Term der Funktion f mit $f(x) = x^5 - x^3$ in Linearfaktoren und skizzieren Sie den Verlauf des zugehörigen Funktionsgraphen.
- 7 Geben Sie den Term einer Funktion dritten Grades mit genau einer, zwei bzw. drei Nullstellen an.
- 8 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot (x - b) \cdot (x - c)$. Bestimmen Sie Werte für a , b und c so,
 a) dass f die Nullstellen -2 und 1 hat und der Graph von f durch den Punkt $P(0|4)$ verläuft,
 b) dass der Graph von f bei $T(2|0)$ einen Tiefpunkt hat und durch $P(0|2)$ verläuft.
- 9 Geben Sie geeignete Werte für a , b und c so an, dass der Graph G_f der Funktion f mit
 a) $f(x) = (x - b)^a \cdot (x - b + 1)^c$ bei $x_1 = 3$ einen Hoch- und bei $x_2 = 2$ einen Sattelpunkt hat,
 b) $f(x) = a \cdot (x - 2c)^b - 3$ bei $H(-2|-3)$ den einzigen Hochpunkt hat.

- 10 Geben Sie einen Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion f möglichst niedrigen Grades an, für die bzw. für deren Graphen gilt:

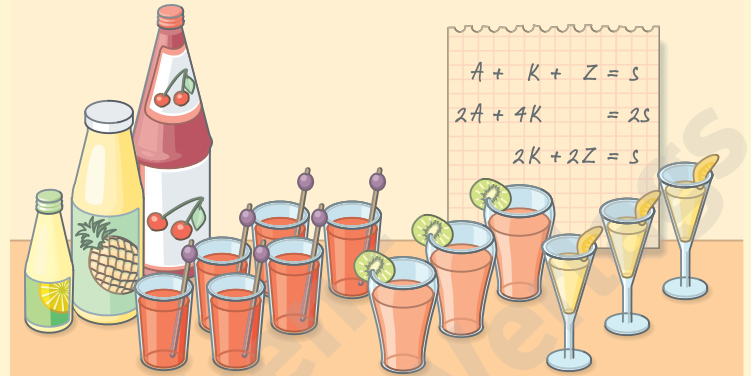
- a) Der Graph schneidet an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ die x -Achse und hat einen Tiefpunkt $T(-1|0)$. Begründen Sie, dass wirklich ein Tiefpunkt vorliegt.
 b) Der Graph hat einen Sattelpunkt $S(3|0)$ sowie einen Tiefpunkt $T(-1|0)$ und schneidet die y -Achse bei $P(0|27)$. Begründen Sie, dass wirklich ein Tiefpunkt vorliegt.

- 11 Es ist g eine ganzrationale Funktion. Für die Stelle $x = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ gilt $g(a) > 0$. Betrachtet wird die Funktion f mit $f(x) = g(x) \cdot (x - a)^2$. Zeigen Sie mithilfe der Ableitung, dass es sich bei $x = a$ um eine Minimumstelle handelt.
- 12 Zeigen Sie, dass eine k -fache Nullstelle einer ganzrationalen Funktion eine $(k - 1)$ -fache Nullstelle der Ableitung der Funktion ist.
- 13 Von der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ ist die Nullstelle $x = 1$ bekannt. Bestimmen Sie eine Linearfaktordarstellung von f , indem Sie den Graphen der Funktion zunächst um -1 in x -Richtung verschieben und dann weiter wie im Beweis des Satzes 1 vorgehen.

- 14 Lösen Sie die Gleichung $2 = x - \sqrt{2x - 4}$ und überprüfen Sie Ihre Lösung.

3 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern auf der rechten Seite

Für ein großes Fest möchte Chris drei alkoholfreie Cocktails aus Ananas-, Kirsch- und Zitronensaft mixen. Dabei ist einer der Cocktails erfahrungsgemäß beliebter als die beiden anderen, sodass er hiervon die doppelte Menge herstellen möchte. Erläutern Sie das nebenstehende LGS, wenn s für die Menge in Litern steht.



Es gibt lineare Gleichungssysteme, die neben den Variablen $x_1, x_2, x_3 \dots$ auch noch **Parameter** beinhalten. Stehen der Parameter r und die Variablen $x_1, x_2, x_3 \dots$ auf verschiedenen Seiten des Gleichheitszeichens – in der Regel der Parameter also rechts –, so lässt sich das zugehörige LGS ebenfalls mit dem Gauß-Verfahren lösen. Die Lösungsmenge ist dann abhängig vom Parameter r , wie im folgenden Beispiel gezeigt wird.

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2r \\ \text{II} \quad 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 \\ \text{III} \quad x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2r + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{IIa} = 3 \cdot \text{II} + (-5 \cdot \text{I}) \\ \text{IIIa} = 3 \cdot \text{III} + (-\text{I}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2r \\ \text{IIa} \quad -2x_2 - 8x_3 = 6 - 10r \\ \text{IIIa} \quad 11x_2 - 7x_3 = 4r + 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{IIb} = \text{IIa} : 2 \\ \text{IIIb} = 11 \cdot \text{IIa} + 2 \cdot \text{IIIa} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2r \\ \text{IIb} \quad -x_2 - 4x_3 = 3 - 5r \\ \text{IIIb} \quad -102x_3 = -102r + 102 \end{array}$$

Gleichung IIIb ist äquivalent zu $x_3 = r - 1$.

Setzt man dies in IIa ein, erhält man $-x_2 - 4 \cdot (r - 1) = 3 - 5r$.

Daraus ergibt sich $x_2 = r + 1$.

Dies in I eingesetzt liefert $3x_1 - 2 \cdot (r + 1) + (r - 1) = 2r$ und damit $3x_1 = 3r + 3$, also $x_1 = r + 1$.

Für jedes r besitzt dieses LGS genau eine Lösung, die vom Parameter r abhängt. Daher bezeichnet man die Lösungsmenge, die das von r abhängige Lösungstripel enthält, mit L_r .

Es ist $L_r = \{(r + 1; r + 1; r - 1)\}$. Beispielsweise ergibt sich für $r = 2$ die Lösungsmenge $L_2 = \{(3; 3; 1)\}$ und für $r = -3$ die Lösungsmenge $L_{-3} = \{(-2; -2; -4)\}$.

Stehen bei einem LGS auf der rechten Seite ein oder mehrere **Parameter**, so wird das LGS auf Stufenform gebracht und schrittweise nach $x_n, \dots, x_3, x_2$ und x_1 aufgelöst. Dabei ist die Lösungsmenge in der Regel abhängig von dem oder den Parametern.

Der Wert des Parameters kann die Lösungsmenge eines LGS beeinflussen. So hat zum Beispiel

das LGS $\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = r \end{array}$ für $r = 1$ unendlich viele Lösungen, für $r \neq 1$ aber keine Lösung.

Beispiel 1 LGS mit Parameter lösen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des in Matrixschreibweise gegebenen LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -1 & | & r+4 \\ 3 & -1 & 2 & | & 11r-5 \end{pmatrix}$$

Lösung

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -1 & | & r+4 \\ 3 & -1 & 2 & | & 11r-5 \end{pmatrix} \\ \text{II} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -1 & | & r+4 \\ 3 & -1 & 2 & | & 11r-5 \end{pmatrix} \\ \text{III} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -1 & | & r+4 \\ 3 & -1 & 2 & | & 11r-5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{II a} = \text{II} + (-\text{I}) \\ \text{III a} = 3 \cdot \text{II} + (-\text{III}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & r+1 \\ 0 & 7 & -5 & | & -8r+17 \end{pmatrix} \\ \text{II a} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & r+1 \\ 0 & 7 & -5 & | & -8r+17 \end{pmatrix} \\ \text{III a} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & r+1 \\ 0 & 7 & -5 & | & -8r+17 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aus II a folgt $x_2 = r + 1$. Eingesetzt in III a folgt $7r + 7 - 5x_3 = -8r + 17$ bzw. $x_3 = 3r - 2$. Setzt man diese Werte für x_2 und x_3 in I ein, so erhält man $x_1 = 2r$. Es ist also $L_r = \{(2r; r+1; 3r-2)\}$.

Beispiel 2 Lösungsvielfalt in Abhängigkeit eines Parameters bestimmen

$$2x_1 + x_2 - x_3 = r+1$$

Bestimmen Sie die Werte von r , für die das LGS $3x_1 + 3x_2 = 2r$ keine bzw. unendlich viele Lösungen hat.

$$x_1 + x_2 = r$$

Geben Sie im Fall unendlich vieler Lösungen die Lösungsmenge an.

Lösung

$$\text{I} \quad 2x_1 + x_2 - x_3 = r+1$$

$$\text{I} \quad 2x_1 + x_2 - x_3 = r+1$$

$$\text{II} \quad 3x_1 + 3x_2 = 2r$$

$$\text{II} \quad 3x_1 + 3x_2 = 2r$$

$$\text{III} \quad x_1 + x_2 = r$$

$$\text{III a} = 3 \cdot \text{III} + (-\text{II}) \quad \text{III a} \quad 0 = r$$

Aus III a folgt, dass das LGS für $r \neq 0$ keine Lösung besitzt. In diesem Fall ist $L_r = \{\}$.

$$\text{I} \quad 2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

Für $r = 0$ ergibt sich das LGS $\text{II} \quad 3x_1 + 3x_2 = 0$. Dieses hat unendlich viele Lösungen.

$$\text{III a} \quad 0 = 0$$

Setzt man z.B. $t = x_1$, dann folgt aus II: $x_2 = -t$. Damit erhält man aus I: $x_3 = t - 1$.

Das LGS besitzt für $r = 0$ also unendlich viele Lösungen mit der Lösungsmenge

$$L_0 = \{(t; -t; t-1) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgaben

- 1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit von r .

a) $x_1 - x_2 + x_3 = 0$

b) $x_1 + x_2 - x_3 = 2r$

c) $-x_1 - x_2 + x_3 = -5$

$$x_2 - 2x_3 = 4$$

$$x_2 - x_3 = r - 1$$

$$x_2 + x_3 = r + 3$$

$$x_3 = r - 2$$

$$3x_3 = 6r$$

$$4x_3 = 3r$$

- 2 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit des Parameters.

a) $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3r$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8r$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & t+2 \\ 1 & -1 & 1 & | & t+2 \\ 2 & -1 & 2 & | & 2t+6 \end{pmatrix}$

c) $x_1 + x_2 - x_3 = 3$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = s+4$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 11s - 5$$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3r \\ 1 & 0 & 1 & | & 2r+2 \\ 0 & -1 & 1 & | & -r \end{pmatrix}$

e) $x_1 - 3x_3 = -3$

$$2x_2 + 4x_3 = 4$$

$$5x_1 + x_3 = 4s + 1$$

f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2r+5 \\ 3 & 0 & -2 & | & -r-5 \\ 1 & 2 & 0 & | & 3r+13 \end{pmatrix}$

- 3 Bestimmen Sie für die Werte $r = -1$, $r = 2$ und $r = 5$ jeweils das Lösungstriple des LGS.

a) $3x_1 - 2x_2 = 2$

b) $2x_1 + x_2 + x_3 = 2r + 8$

$$x_1 + x_2 - 5x_3 = -21$$

$$-2x_2 + x_3 = 5$$

$$3x_1 + x_2 = 10r + 1$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -6,5r - 11$$

O Test

Lösung | Seite 453

- 4 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit des Parameters.

a) $2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$

$$x_1 - x_2 - x_3 = r - 3$$

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = 4r - 5$$

b) $2x_1 + 2x_3 = 2s + 1$

$$3x_2 + x_3 = -7$$

$$x_1 + x_2 = 3s - \frac{5}{2}$$

- 5 Bestimmen Sie den Wert von r so, dass das LGS die angegebene Lösung besitzt.

a) $2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = r - 2$$

$$4x_1 + x_2 - x_3 = 3,5r$$

Lösung:

(1; 2; -1)

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & r+2 \\ 2 & 0 & 1 & | & 2r+1 \\ 0 & 3 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

(2; 0; 3)

- 6 Untersuchen Sie, ob es Werte von r gibt, sodass das LGS keine oder unendlich viele Lösungen besitzt. Geben Sie im Fall unendlicher vieler Lösungen die Lösungsmenge an.

a) $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$$-x_2 + x_3 = 2$$

$$3x_2 - 3x_3 = r$$

b) $x_1 + x_2 + x_3 = r$

$$2x_1 - x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

- 7 Geben Sie je ein LGS zu den beiden Lösungsmengen $A = \{(2s; s+1; s-2)\}$ und $B = \{(2s; s+1; s-2) | s \in \mathbb{R}\}$ an. Beschreiben Sie den Unterschied zwischen A und B.

- 8 Der tägliche Nahrungsbedarf einer Schülerin bzw. eines Schülers beträgt pro Hauptmahlzeit und kg Körpergewicht etwa 0,35 g Eiweiß, 0,4 g Fett und 2 g Kohlenhydrate.

a) Erläutern Sie mithilfe der Abbildung auf I $16,5x_1 + 2x_2 + 0,8x_3 = 0,35 \cdot r$

dem Rand die Bedeutung der Gleichungen II $0,4x_1 + 0,2x_2 + 82x_3 = 0,4 \cdot r$

des LGS im Sachzusammenhang. III $0,0x_1 + 20,9x_2 + 0,7x_3 = 2 \cdot r$

- a) Die Lösungsmenge des LGS in Teilaufgabe a) ist $L_r = \{(0,0094 \cdot r; 0,0955 \cdot r; 0,0046 \cdot r)\}$. Anna wiegt 58 kg, Alex 71 kg und Mia 64 kg. Bestimmen Sie die Menge an Kabeljau, Kartoffeln und Butter, die die drei für eine ausgewogene Hauptmahlzeit zu sich nehmen sollten.

Ernährungslehre 54	
Die Nährstoffe	
100 g Kabeljau:	
Eiweiß 16,5 g	
Fett 0,4 g	
Kohlenhydrate 0,0 g	
100 g Kartoffeln:	
Eiweiß 2,0 g	
Fett 0,2 g	
Kohlenhydrate 20,9 g	
100 g Butter:	
Eiweiß 0,8 g	
Fett 82,0 g	
Kohlenhydrate 0,7 g	

O Test

Lösung | Seite 453

9 $3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4r + 1$

Bestimmen Sie die Werte von r , sodass das LGS $x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 2r + 1$ keine bzw. unendlich viele Lösungen besitzt. Geben Sie im Falle unendlich vieler Lösungen die Lösungsmenge an.

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -r + 3$$

- 10 Gegeben ist das LGS mit Parameter auf der linken und rechten Seite. Bestimmen Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von k .

a) $k \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$

$$2k \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2k \cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 = k - 1$$

b) $2x_1 - k \cdot x_2 + k \cdot x_3 = 0$

$$4x_1 - k \cdot x_2 + k \cdot x_3 = 2$$

$$2x_1 - k \cdot x_2 + k \cdot x_3 = k \cdot (k - 2)$$

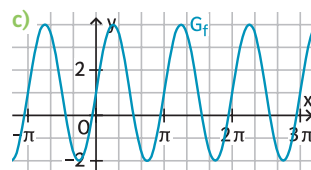
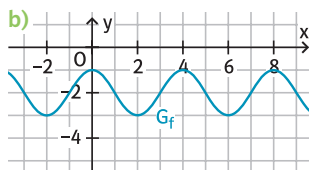
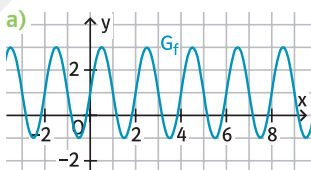
Grundwissen Test

Grundwissen

Seite 401

Lösung | Seite 454

- 11 Bestimmen Sie anhand des Graphen die Werte der Parameter a , b , c und d der Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$.



1 Elementare Kombinatorik

In der Eisdiele gibt es 24 Eissorten. Katharina will drei Kugeln kaufen. Wie viele Möglichkeiten hat sie, ihr Eis zusammenzustellen, wenn sie

- auch mehr als eine Kugel pro Sorte kaufen würde und für sie die Position der Eiskugel auf der Waffel einen Unterschied macht,
- drei verschiedene Sorten wählt (Position der Eiskugel wichtig),
- drei verschiedene Sorten wählt (Position der Eiskugel egal)?



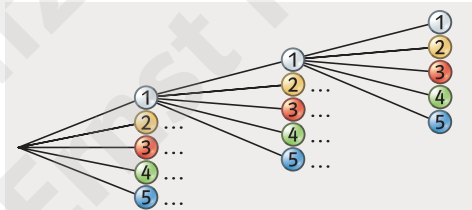
Wenn alle Ergebnisse eines Zufallsexperiments gleich wahrscheinlich sind (Laplace-Experiment), liegt eine Gleichverteilung vor. In diesem Fall kann man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch Abzählen bestimmen. Sie ist der Quotient $\frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$.

Die **Kombinatorik** beschäftigt sich mit der Bestimmung von Anzahlen. Als Grundmodell dient das Ziehen aus einer Urne. Im Folgenden wird beispielhaft eine Urne mit fünf Kugeln betrachtet, die mit den Zahlen von 1 bis 5 nummeriert sind. Es werden drei Kugeln gezogen. Dabei sind vor allem folgende drei Fälle wichtig.

Ziehen mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Wenn man die Reihenfolge notiert und die gezogene Kugel nach jeder Ziehung wieder zurücklegt, gibt es bei jedem Zug fünf mögliche Kugeln. Somit gibt es $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ Möglichkeiten.

Wenn die Urne n Kugeln enthält und man k Kugeln zieht, gibt es also n^k Möglichkeiten.



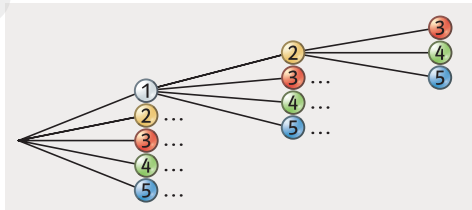
Ziehen ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Wenn man die gezogene Kugel nicht zurücklegt, verringert sich bei jedem Zug die Anzahl der möglichen Kugeln um eins. Somit gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten.

Wenn die Urne n Kugeln enthält und man k Kugeln zieht, gibt es $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ Möglichkeiten.

Es ist $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (vgl. Aufgabe 11).

Beim Ziehen von n Kugeln ergibt sich $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.



Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Wenn man die Reihenfolge außer Acht lässt, gehören von obigen 60 Möglichkeiten jeweils 6 zum gleichen Ergebnis, denn 3 Kugeln können auf $3! = 6$ verschiedene Arten angeordnet werden. Die Anzahl der Möglichkeiten ist also $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$.

Enthält die Urne n Kugeln und zieht man k Kugeln, so gibt es $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten (Binomialkoeffizient, „ n über k “).

Es ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ (vgl. Aufgabe 11).



$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
„ n Fakultät“

Diesen Fall bezeichnet man auch als „Ziehen mit einem Griff“.

Eselsbrücke:

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

↑ k Faktoren ↓ k Faktoren

Satz: Aus einer Urne mit n Kugeln werden nacheinander k Kugeln gezogen. Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt

mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

$$n^k.$$

ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

$$\binom{n}{k}.$$

Beispiel 1 Anzahlen durch Abzählen bestimmen

Eine Tastatur verfügt über 26 Kleinbuchstaben, 26 Großbuchstaben, zehn Ziffern und 21 Sonderzeichen. Bestimmen Sie die Anzahl der

- möglichen Passwörter aus fünf Zeichen,
- möglichen Passwörter aus fünf Zeichen, wenn kein Zeichen doppelt vorkommen soll,
- Möglichkeiten, fünf verschiedene Zeichen daraus auszuwählen.

Lösung

- Insgesamt sind es 83 Zeichen, also $83^5 = 3\,939\,040\,643$ mögliche Passwörter.
- $83 \cdot 82 \cdot 81 \cdot 80 \cdot 79 = 3\,484\,127\,520$ mögliche Passwörter
- $\binom{83}{5} = \frac{83 \cdot 82 \cdot 81 \cdot 80 \cdot 79}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 29\,034\,396$ Möglichkeiten

Beispiel 2 Wahrscheinlichkeit für vier Richtige beim Lotto bestimmen

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto „6 aus 49“ genau vier Richtige zu tippen.

Lösung

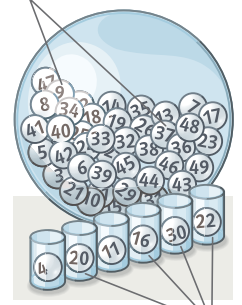
Anzahl der Möglichkeiten:

- 6 aus 49 Zahlen zu tippen (mögliche Ergebnisse): $\binom{49}{6}$
- 4 der 6 gezogenen Zahlen zu tippen: $\binom{6}{4}$
- 2 der 43 nicht gezogenen Zahlen zu tippen: $\binom{43}{2}$
- 4 Richtige und 2 Falsche zu tippen (günstige Ergebnisse): $\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}$

Die Wahrscheinlichkeit für vier Richtige beträgt also $\frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{15 \cdot 903}{13\,983\,816} = \frac{645}{665\,896} \approx 0,097\%$

Mit dem WTR lassen sich Binomialkoeffizienten auch direkt berechnen. Der Befehl lautet meist nCr (n choose r).

Zwei der nicht gezogenen Zahlen wurden getippt.



Vier der gezogenen Zahlen wurden getippt.

Aufgaben

- Fünf Freunde gehen Pizza essen. Auf der Speisekarte gibt es zwölf verschiedene Varianten an Pizza. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten,

 - wenn jeder eine beliebige Pizza auswählt,
 - wenn jeder eine andere Variante auswählt,
 - wenn die Freunde gemeinsam fünf verschiedene Varianten bestellen, die sie sich teilen.
- Abgebildet ist ein Kfz-Kennzeichen aus Stuttgart. Es enthält das S für die Stadt Stuttgart und danach eine Erkennungsnummer. Diese besteht aus einem oder zwei Buchstaben und einer bis vier Ziffern (ohne führende Null). Bestimmen Sie die Anzahl der theoretisch möglichen Kfz-Kennzeichen in Stuttgart.
- Bei einem Rennen mit acht Pferden werden zwei Wetten angeboten.

 - Man wettet auf den Einlauf der ersten drei Pferde in der richtigen Reihenfolge.
 - Man wettet auf den Einlauf der ersten drei Pferde, wobei die Reihenfolge egal ist.
 - Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten bei den beiden Wetten.
 - Berechnen Sie jeweils die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn man annimmt, dass alle Pferde gleiche Gewinnchancen haben.



- 4 In einer Urne befinden sich zehn Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 10 beschriftet sind. Man zieht dreimal eine Kugel. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man
- dreimal dieselbe Kugel erhält, wenn man mit Zurücklegen zieht,
 - dreier verschiedene Kugeln erhält, wenn man mit Zurücklegen zieht,
 - die drei Kugeln mit den höchsten Zahlen erhält, wenn man ohne Zurücklegen zieht,
 - dreier Kugeln mit Zahlen größer als 6 erhält, wenn man mit einem Griff zieht.

○ Test

→ Lösung | Seite 480

- 5 Samantha wählt aus einer Playlist mit 60 Titeln fünf Songs für eine Joggingrunde aus. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, wenn
- die Reihenfolge berücksichtigt wird und Songs auch mehrfach abgespielt werden können,
 - die Reihenfolge berücksichtigt wird und kein Song mehrfach gespielt werden soll,
 - die Reihenfolge egal ist und kein Song mehrfach gespielt werden soll.

- 6 In einer Bar gibt es 26 Tapas, wovon 16 vegetarisch sind. Begründen Sie, dass $\binom{16}{7} \cdot \binom{10}{3}$ Möglichkeiten existieren, zehn Tapas zu bestellen, von denen genau sieben vegetarisch sind.



- 7 Eine Urne enthält sechs rote und vier schwarze Kugeln. Es werden fünf Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass davon
- drei rot sind,
 - vier rot sind,



- 8 Paco, Emil, Sebastian und Felix setzen sich zufällig nebeneinander auf eine Bank.
- Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Reihenfolgen.
 - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Paco neben seinem Freund Emil und Sebastian neben seinem Freund Felix sitzt.

- 9 In einem Hotel sind noch vier Zimmer frei, aber am Empfang stehen sechs Gäste, die alle ein Einzelzimmer haben wollen.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Gast ein Zimmer erhält.
 - Das Zimmermädchen tippt zufällig auf vier Gäste, denen der Empfangschef ihrer Meinung nach ein Zimmer gibt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie richtig rät.

- 10 Davina hat zwölf Heidelbeer-, zehn Zitronen- und acht Himbeermuffins gebacken. Sie möchte ihrer Nachbarin sechs Muffins bringen und wählt diese zufällig aus. Ordnen Sie jedem Ereignis die richtige Wahrscheinlichkeit zu. Formulieren Sie zur übrig bleibenden Wahrscheinlichkeit ein passendes Ereignis im Sachzusammenhang und begründen Sie Ihre Zuordnung.

(A) Die Nachbarin erhält 4 Heidelbeer-, 1 Himbeer- und 1 Zitronenmuffin.

(1)
$$\frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{30}{6}}$$

(B) Die Nachbarin erhält von jeder Sorte 2 Muffins.

(2)
$$\frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{30}{6}}$$

(C) Die Nachbarin erhält nur Heidelbeer- und Zitronenmuffins.

(3)
$$\frac{\binom{22}{6}}{\binom{30}{6}}$$

(4)
$$\frac{\binom{12}{4} \cdot 10 \cdot 8}{\binom{30}{6}}$$

- 11 Zeigen Sie.

a) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

b) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Test

Lösungen | Seite 481

- 12 Bestimmen Sie beim Lotto 6 aus 49 die Wahrscheinlichkeit für drei Richtige.

- 13 Die elf Spieler einer Fußballmannschaft stellen sich in einer Reihe auf. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Reihenfolgen,

- a) die es insgesamt gibt,
b) bei denen Benjamin an Position 3, Luca an Position 10 und Finn an Position 7 steht,
c) bei denen Benjamin, Luca und Finn in dieser Reihenfolge direkt hintereinanderstehen.

- 14 Eine Tüte mit Blumenzwiebeln enthält drei Krokus-, zwei Narzissen- und fünf Tulpenzwiebeln. Adam entnimmt der Tüte zufällig drei Zwiebeln. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens eine Krokus- und mindestens eine Narzissenzwiebel erhält.



- 15 Begründen Sie die Gleichheit mithilfe der Vorstellung „k Objekte aus n auswählen“.

a) $\binom{n}{1} = n$ und $\binom{n}{n-1} = n$ b) $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{n} = 1$ c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

- 16 Von einem „Vierling“ beim Lotto 6 aus 49 spricht man, wenn unter den sechs gezogenen Zahlen vier direkt aufeinanderfolgende Zahlen sind und es sich nicht um einen „Fünfling“ oder „Sechsling“ handelt.

- a) Begründen Sie, dass es $\binom{49-4-1}{2} = \binom{44}{2}$ verschiedene Vierlinge gibt, die die Zahlen (1; 2; 3; 4) enthalten, aber $\binom{49-4-2}{2} = \binom{43}{2}$ verschiedene Vierlinge, die (23; 24; 25; 26) enthalten.
b) Bestimmen Sie die Anzahl möglicher Vierlinge und die Wahrscheinlichkeit eines solchen.
c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Fünflings und die eines Sechslings.



Seit es das Lotto 6 aus 49 gibt, gab es noch nie einen Sechsling, aber schon 17 Vierlinge und zwei Fünflinge (Stand: August 2021).

- 17 Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, 65 Schülerinnen und Schüler mit Mathematik-Leistungsfach auf drei Kurse zu verteilen, von denen zwei aus 22 und einer aus 21 Personen bestehen.

Grundwissen Test

- 18 Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion f aus dem Graphen von g mit $g(x) = x^2$ entsteht. Geben Sie die Koordinaten des Scheitels an.

a) $f(x) = 2x^2 - 1$

b) $f(x) = 0,5(x+1)^2$

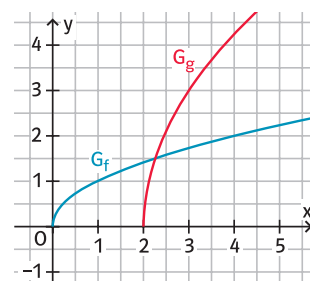
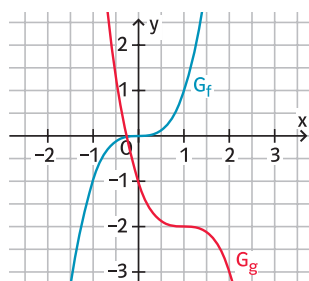
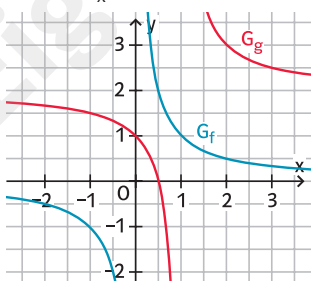
c) $f(x) = -(x-1)^2 - 2$

- 19 Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion g aus dem Graphen der Funktion f entsteht, und geben Sie einen Funktionsterm für g an.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = \sqrt{x}$



Grundwissen

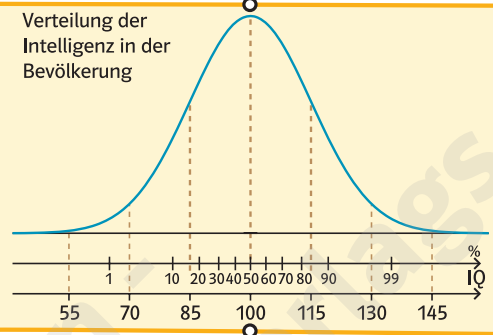
Seite 405

Lösungen | Seite 481

1 Die Normalverteilung

Als ein mögliches Maß für die menschliche Intelligenz wird der Intelligenzquotient (IQ) verwendet, dessen Wert mithilfe eines Tests ermittelt wird.

- Beschreiben Sie die Darstellung und erläutern Sie deren Bedeutung, insbesondere auch die der beiden waagerechten Skalierungen.
- Untersuchen Sie die Beziehung zwischen der oberen waagerechten Skalierung und der Kurve.
- Welche IQ-Werte würden Sie als durchschnittlich interpretieren?



Bei einer sehr großen Anzahl von 17-jährigen wurde die Körpergröße in cm gemessen und in Intervalle der Länge 5 cm eingeteilt. Aufgrund der hohen Anzahl gemessener Größen kann man die ermittelten relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretieren.

Fig. 1 zeigt die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten in einem Histogramm. Bei diesem entspricht der Flächeninhalt jeder Säule der zugehörigen Wahrscheinlichkeit. Der in Fig. 1 orange markierte Flächeninhalt gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein zufällig ausgewählter 17-Jähriger zwischen 170 cm und 180 cm groß ist.

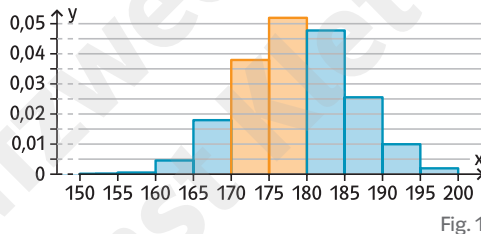


Fig. 1

Wenn man die Körpergröße in Intervalle der Länge 1 cm einteilt, erhält man das Histogramm in Fig. 2. Geht man zu Intervallen mit immer kleinerer Länge über, so nähern sich die zugehörigen Histogramme der rot gezeichneten Kurve an.

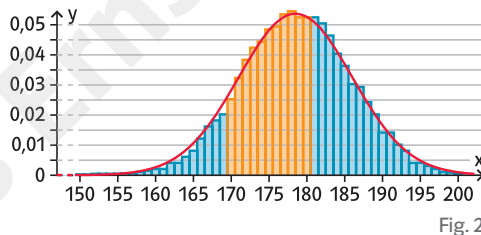


Fig. 2

Sie hat ein Maximum an der Stelle $x_0 = 178$, ist achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = 178$ und besitzt zwei Wendepunkte bei $x_1 = 170,5$ und $x_2 = 185,5$.

Die Kurve heißt **Gauß'sche Glockenkurve**. Man kann zeigen, dass sie der Graph der Funktion

$$\varphi_{178, 7,5} \text{ mit } \varphi_{178, 7,5}(x) = \frac{1}{7,5 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-178)^2}{2 \cdot 7,5^2}} \text{ ist.}$$

In der Tabelle sind Unterschiede zwischen Histogramm und Glockenkurve dargestellt:

Histogramm	Glockenkurve
y-Werte sind nur für endlich viele x-Werte gegeben. Die zugehörige Verteilung gehört zu den diskreten Verteilungen.	y-Werte sind für jeden reellen x-Wert gegeben. Die zugehörige Verteilung gehört zu den stetigen Verteilungen.
Wahrscheinlichkeiten entsprechen der Summe der Flächeninhalte zugehöriger Säulen.	Wahrscheinlichkeiten entsprechen dem Flächeninhalt zwischen x-Achse und Glockenkurve über dem zugehörigen Intervall.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter 17-Jähriger zwischen 170 cm und 180 cm groß ist, entspricht also dem Inhalt der orange markierten Fläche in Fig. 3, d.h.

$$\int_{170}^{180} \varphi_{178, 7,5}(x) dx \approx 0,462 \text{ (TR).}$$

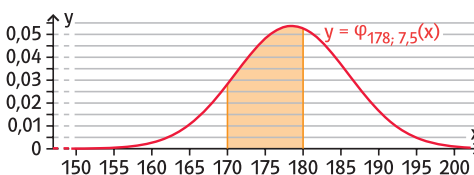


Fig. 3

Es gibt auch diskrete Verteilungen, bei denen für jede natürliche Zahl ein y-Wert gegeben ist.

Weitere stetige Verteilungen werden ab Seite 382 behandelt.

Allgemein nennt man die Funktion $\varphi_{\mu, \sigma}$ mit $\varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ **Gauß'sche Glockenfunktion**.

Sie hat ihr Maximum bei $x_0 = \mu$ und bei $x_{1,2} = \mu \pm \sigma$ Wendestellen.

Für Stammfunktionen von $\varphi_{\mu, \sigma}$ lässt sich kein integralfreier Term angeben. Das Integral kann daher nur näherungsweise mit Hilfsmitteln berechnet werden.

Eine Zufallsgröße, deren Verteilung mit der Gauß'schen Glockenfunktion beschrieben werden kann, nennt man **normalverteilt**, die Parameter μ und σ nennt man **Erwartungswert** und **Standardabweichung** der Zufallsgröße.

Definition: Eine Zufallsgröße X heißt **normalverteilt** mit den Parametern μ (Erwartungswert) und σ (Standardabweichung), wenn für zwei reelle Zahlen a und b mit $a \leq b$ gilt:

Die Wahrscheinlichkeit, dass X Werte zwischen a und b annimmt, ist

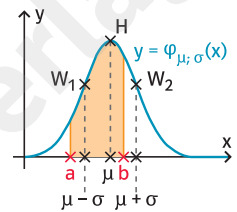
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi_{\mu, \sigma}(x) dx.$$

Man sagt kurz: X ist $N_{\mu, \sigma}$ -verteilt. Die Normalverteilung ist eine **stetige** Verteilung.

Man nennt $\varphi_{\mu, \sigma}$ **Gauß'sche Glockenfunktion**, ihren Graphen **Gauß'sche Glockenkurve**.

Die Funktion $\varphi_{\mu, \sigma}$ wird ab Seite 372 näher untersucht.

Der zugehörige Taschenrechner-Befehl heißt z.B. „normalcdf“ oder „normalcd“.



Funktionswerte von $\varphi_{\mu, \sigma}$ sind keine Wahrscheinlichkeiten, denn für jedes a ist zwar $\varphi_{\mu, \sigma}(a) > 0$, aber $P(X = a) = 0$.

Im Gegensatz zu diskreten Verteilungen hat bei stetigen Verteilungen ein einelementiges Ereignis die Wahrscheinlichkeit 0, denn es ist $P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a \varphi_{\mu, \sigma}(x) dx = 0$.

Das heißt, dass obwohl $P(X = a) = 0$ ist, das Eintreten von $X = a$ möglich ist. Weiterhin folgt, dass $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = \int_a^b \varphi_{\mu, \sigma}(x) dx$ gilt.

Mit der Normalverteilung lassen sich statistisch erhobene Daten modellieren, insbesondere dann, wenn sie gleichmäßig um einen Normwert schwanken. Sind n solche glockenförmig verteilten

Daten $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ gegeben, so nimmt man als Parameter μ das arithmetische Mittel $\bar{x}$ der

Daten: $\mu = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$. Für die Standardabweichung σ kann man die gemittelten quadratischen

Abweichungen der einzelnen Daten x_i zum Mittelwert $\bar{x}$ verwenden und zieht daraus die Wurzel.

$$\text{Es ist } \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x})^2}.$$

Zur Berechnung der Parameter μ und σ aus einem gegebenen Satz von Daten kann man spezielle Funktionen des Taschenrechners verwenden.

Beispiel 1 Wahrscheinlichkeiten mit Normal- und Binomialverteilung ermitteln

In einer großen Bäckerei werden maschinell Backwaren produziert. Die Masse (in Gramm) eines Vollkornbrötchens wird als normalverteilt angenommen mit $\mu = 73$ und $\sigma = 6$.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass für ein zufällig ausgewähltes Vollkornbrötchen gilt: Die Masse des Brötchens beträgt
 - weniger als 70 g,
 - auf Gramm gerundet 75 g,
 - exakt 75 g.
- Eine Filiale bezieht täglich 200 dieser Vollkornbrötchen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass darunter weniger als 50 Stück sind, deren Masse unter 70 g liegt.

Lösung

Die $N_{73, 6}$ -verteilte Zufallsgröße X beschreibt die Masse der produzierten Vollkornbrötchen.

- $P(X < 70) \approx 0,309$
 - $P(74,5 \leq X < 75,5) \approx 0,063$
 - $P(X = 75) = 0$

- Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Vollkornbrötchen in der Filiale mit einer Masse unter 70 g. Damit ist Y binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = P(X < 70) \approx 0,309$.

Also ist $P(Y < 50) = P(Y \leq 49) \approx 0,028$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass in die Filiale weniger als 50 Brötchen mit einer Masse unter 70 g geliefert werden, ist etwa 0,028.



Es ist $P(X < 70) = \int_{-\infty}^{70} \varphi_{73, 6}(x) dx$.

Bei der Berechnung mit dem Taschenrechner kann man $-\infty$ durch eine sehr kleine Zahl, z.B. -1000 , ersetzen.

Beispiel 2 μ und σ aus Datensatz ermitteln

Die Körpergrößen von 25 Volleyball-Spielerinnen einer Schulmannschaft wurden auf Zentimeter genau gemessen und die Ergebnisse in einer Tabelle dargestellt. Zur Modellierung der Daten wählt man die Normalverteilung.

Größe	165	168	169	170	172	174	175	177	179
Anzahl	1	1	3	3	7	4	3	1	2

- Nennen Sie Gründe, warum zur mathematischen Beschreibung dieser Daten die Normalverteilung verwendet werden kann.
- Ermitteln Sie mit einem digitalen Hilfsmittel je einen passenden Wert für μ und σ .
- Bestimmen Sie damit die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Spielerin kleiner als 170 cm ist, und vergleichen Sie dies mit der tatsächlichen relativen Häufigkeit.

Lösung

- Bei 172 ist ein Maximum erkennbar. Die weiteren Daten liegen näherungsweise symmetrisch um diesen Wert und werden mit zunehmendem Abstand zur Maximumstelle kleiner.
- Mit einem digitalen Hilfsmittel (TR) ergibt sich $\mu \approx 172,4$ und $\sigma = 3,26$.
- X steht für die Körpergröße einer Spielerin und ist $N_{172,4; 3,26}$ -verteilt: $P(X < 170) \approx 0,231$. Als relative Häufigkeit ergibt sich $\frac{1+1+3}{25} = \frac{1}{5} = 0,2$. Sie ist kleiner als $P(X < 170)$.

Aufgaben

- Die Zufallsgröße X beschreibt die Masse (in Gramm) einer Sorte von Walnusskernen. X ist normalverteilt mit $\mu = 3,5$ und $\sigma = 0,5$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Masse X eines zufällig ausgewählten Walnusskerns die entsprechende Bedingung erfüllt.
 - $P(X < 3,3)$
 - $P(X \geq 3,9)$
 - $P(X > 3,9)$
 - $P(X \in] - \infty; 3])$
 - $P(X = 3,5)$
 - $P(X \in [2,9; 3,5])$
 - $P(3 < X \leq 4)$
 - $P(X > 2,5)$
- Die Zufallsgröße Y beschreibt die Füllmenge (in Millilitern) einer Flasche mit Fruchtsaft. Sie ist normalverteilt mit $\mu = 202$ und $\sigma = 5$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse. Sie beziehen sich jeweils auf eine zufällig herausgegriffene Flasche.

A: „In der Flasche sind exakt 200 ml Saft.“ B: „In der Flasche sind mehr als 200 ml Saft.“
C: „In der Flasche sind mehr als 205 ml oder weniger als 195 ml Saft enthalten.“ D: „In der Flasche sind zwischen 196 ml und 210 ml Saft enthalten.“
- Die $N_{60, 5}$ -verteilte Zufallsgröße X gibt die Brenndauer einer Wunderkerze in Sekunden an. Formulieren Sie das gegebene Ereignis im Sachkontext und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit.
 - $20 \leq X \leq 35$
 - $X > 25$
 - $55 < X < 65$
 - $X \leq 33$
- Für die Bearbeitung einer Mathematik-Aufgabe benötigen Prüflinge unterschiedlich viel Zeit. Die Tabelle gibt den auf ganze Minuten gerundeten Zeitbedarf an.

Zeitbedarf (in min)	4	5	6	7	8	9	10	11
Anzahl der Prüflinge	2	3	6	9	7	4	2	2

- Erläutern Sie, warum man diese Daten mit einer Normalverteilung modellieren kann.
- Ermitteln Sie passende Werte für die Parameter μ und σ .
- Berechnen Sie mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe b) die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Prüfling für die Bearbeitung der Aufgabe weniger als 7,5 min benötigt.

Test

- Eine Zufallsgröße X ist normalverteilt mit $\mu = 10$ und $\sigma = 5$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(15 \leq X \leq 30)$, $P(X > 20)$ und $P(X < 0)$.



Hier muss die zugehörige Funktion des Taschenrechners genutzt werden.



- 6 In einer schwäbischen Bäckerei wird zur Herstellung von Brezeln Teig portioniert. Die 100 Portionen Teig werden gewogen und ihre Masse auf Gramm gerundet notiert.

Masse (in g)	51	52	53	54	55	56	57	58	59
Anzahl der Teigportionen	2	5	13	19	23	17	11	7	3

- a) Erläutern Sie, warum man die Messwerte mit einer Normalverteilung modellieren kann, und ermitteln Sie die zugehörigen Werte der Parameter μ und σ .
 b) Bestimmen Sie mit den Parametern μ und σ aus Teilaufgabe a) das Integral $\int_{54,5}^{55,5} \varphi_{\mu, \sigma}(x) dx$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.

- 7 Bei einer Umfrage hat jede Oberstufen-Schülerin ihre Schuhgröße als ganze Zahl zwischen 35 und 43 angegeben. Die Zufallsgröße X gibt die Schuhgröße an. Man nimmt an, dass sie $N_{38,5; 1,8}$ -verteilt ist. Bestimmen Sie damit näherungsweise, welcher Anteil der Schülerinnen
 a) die Schuhgröße 37 hat, b) die Schuhgröße 40 bis 42 hat.
 Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

Hier muss für Schuhgröße „37“ bzw. „40 bis 42“ ein geeignetes Intervall gewählt werden.

- 8 Gegeben ist eine $N_{5,3}$ -verteilte Zufallsgröße X . Zur Bestimmung von $P(1 \leq X \leq 5)$ rechnet Svenja „ $P(X \leq 5) - P(X \leq 0)$ “. Korrigieren Sie ihre Rechnung und erläutern Sie ihren Fehler.
- 9 Die Masse von Eiern (in Gramm) einer Hühnerart ist normalverteilt mit $\mu = 55$ und $\sigma = 5$.
 a) Bestimmen Sie den Anteil der Eier, deren Masse größer als 59 g ist.
 b) Ein Verkäufer kommt mit einer großen Anzahl solcher Eier auf den Wochenmarkt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Kauf von 20 Eiern mindestens acht erhält, deren Masse größer als 59 g ist.

- 10 Es ist X eine $N_{100; 25}$ -verteilte Zufallsgröße. Geben Sie zum gegebenen Intervall ein weiteres offenes Intervall an, das exakt dieselbe Wahrscheinlichkeit hat.
 a)]75; 100[b)]80; 130[c)] $-\infty$; 99[d)]20; 30[e)]25; ∞ [f)]95; 110[

Test

Lösung | Seite 492

- 11 Es wird angenommen, dass die Brenndauer Z (in Stunden) einer bestimmten Taschenlampe bei aufgeladenem Akku normalverteilt ist mit $\mu = 30$ und $\sigma = 5$. Eine Baumarktfiliale kauft 500 dieser Taschenlampen beim Hersteller. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 80% davon länger als 25 Stunden brennen.

- 12 Gegeben ist eine $N_{7,2}$ -verteilte Zufallsgröße Z . Betrachtet wird die Funktion $\Phi_{7,2}$, die einem x -Wert die Wahrscheinlichkeit $P(Z \leq x)$ zuordnet. Die Funktion $\Phi_{7,2}$ ist also gegeben durch

$$\Phi_{7,2}(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^x \varphi_{7,2}(t) dt.$$

Man nennt $\Phi_{7,2}$ die zu Z gehörige Verteilungsfunktion.

- a) Erstellen Sie eine Wertetabelle der Funktion $\Phi_{7,2}$ mit mindestens fünf x -Werten mit $0 < x < 13$ und skizzieren Sie damit die Graphen von $\varphi_{7,2}$ und $\Phi_{7,2}$ in das gleiche Koordinatensystem.
 b) Begründen Sie: Die Funktion $\Phi_{7,2}$ ist streng monoton steigend.
 c) Ermitteln Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_{7,2}(x)$ und erläutern Sie Ihre Antwort.

$\Phi_{7,2}$ ist die Integralfunktion zu $\varphi_{7,2}$ zur unteren Grenze $-\infty$.

Grundwissen Test

- 13 Gegeben sind die Punkte $P(2|-1|1)$ und $Q(3|2|-1)$ und die Ebene $E: 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 5$.
 a) Berechnen Sie jeweils den Abstand der Punkte P und Q zur Ebene E .
 b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunktes von P auf E .
 c) Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes R , der doppelt so weit von E entfernt ist wie P .

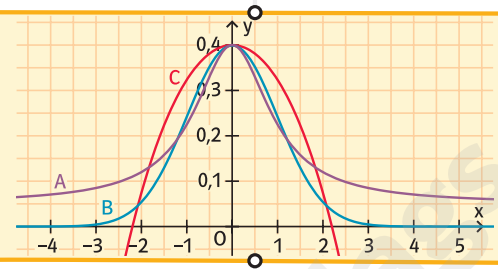
Grundwissen
 Seite 407
 Lösung | Seite 493

2 Die Gauß'sche Glockenfunktion

Ordnen Sie jedem der drei Graphen je einen Funktionsterm zu.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad g(x) = 1 - 0,3 \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) \quad h(x) = \frac{0,35}{1+x^2} + 0,05$$

Beschreiben Sie charakteristische Eigenschaften der Graphen bzw. der Funktionsterme.



In dieser Lerneinheit soll die Gauß'sche Glockenfunktion $\varphi_{\mu; \sigma}$ genauer untersucht werden.

Zunächst betrachtet man die Funktion $\varphi_{0;1}$

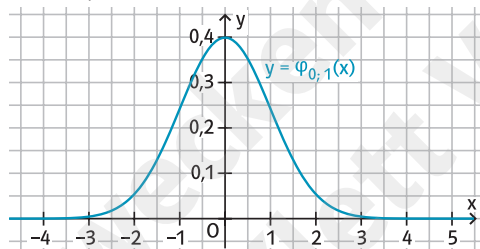
$$\text{mit } \varphi_{0;1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Man kann zeigen, dass sie bei $x_0 = 0$ ein Maximum und bei $x_{1,2} = \mu \pm \sigma = 0 \pm 1 = \pm 1$

Wendestellen hat (vgl. Aufgabe 14).

Ihr Graph verläuft symmetrisch zur y-Achse.

Es ist $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \varphi_{0;1}(x) = 0$ (vgl. Kapitel II).



Folgende Eigenschaften gelten für die Funktion $\varphi_{0;1}$:

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{0;1}(x) dx = 1,$$

$$(2) \varphi_{0;1}(x) \geq 0.$$

Dass $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{0;1}(x) dx = 1$ gilt, lässt sich beweisen.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $e^{-\frac{x^2}{2}} \geq 0$. Also ist auch stets $\varphi_{0;1}(x) \geq 0$.

Der Beweis ist jedoch nicht elementar.

(1) und (2) sind die Eigenschaften einer **Dichtefunktion** (oder Wahrscheinlichkeitsdichte).

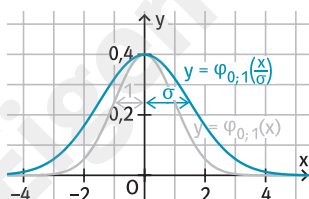
Für eine stetige Zufallsgröße X ist die Dichtefunktion die Funktion, die man über einem Intervall I integrieren muss, um die Wahrscheinlichkeit $P(X \in I)$ zu berechnen. Die Funktion $\varphi_{0;1}$ ist die Dichtefunktion der **Standardnormalverteilung**, d.h. der Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

Zur Transformation des Graphen von $\varphi_{0;1}$ zum Graphen einer beliebigen Gauß'schen Glockenfunktion $\varphi_{\mu; \sigma}$ bei der im Allgemeinen $\mu \neq 0$ und $\sigma \neq 1$ ist, wird der Graph von $\varphi_{0;1}$ mit σ in

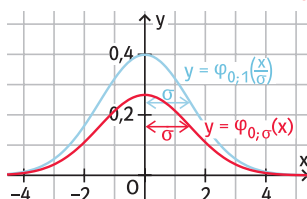
x-Richtung gestreckt. Um trotz der Streckung in x-Richtung die Bedingung $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\mu; \sigma}(x) dx = 1$ zu

erfüllen, wird mit $\frac{1}{\sigma}$ in **y-Richtung gestreckt**. Im letzten Schritt wird der Graph um μ in **x-Richtung verschoben**. Hierbei ändert sich der Flächeninhalt zwischen Kurve und x-Achse nicht.

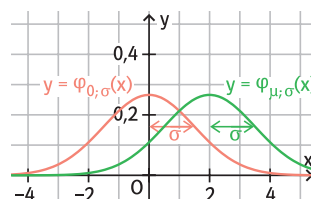
Streckung in x-Richtung mit σ **Streckung in y-Richtung mit $\frac{1}{\sigma}$** **Verschiebung in x-Richtung um μ**



$$\varphi_{0;1}\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



$$\varphi_{0;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



$$\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Bei allen drei Transformationen bleiben die Funktionswerte stets positiv.

Daher erfüllt die Funktion $\varphi_{\mu; \sigma}$ wie $\varphi_{0;1}$ die beiden Bedingungen einer Dichtefunktion.

Auch das Globalverhalten von $\varphi_{0;1}$ überträgt sich: Es ist $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \varphi_{\mu; \sigma}(x) = 0$.

Man kann zeigen, dass die Funktion $\varphi_{\mu, \sigma}$ bei μ ihr globales Maximum und bei $\mu \pm \sigma$ Wendestellen hat. Das Maximum hat den Wert $\varphi_{\mu, \sigma}(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0,4}{\sigma}$.

vgl. Aufgabe 15

Die y-Koordinate der Wendepunkte ergibt sich zu $\varphi_{\mu, \sigma}(\mu \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{2\sigma^2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0,24}{\sigma}$.

Definition: Die **Dichtefunktion** $\varphi_{\mu, \sigma}$ einer $N_{\mu, \sigma}$ -verteilten Zufallsgröße ist gegeben durch

$$\varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+).$$

Satz: Es gilt $\varphi_{\mu, \sigma}(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das globale Maximum von $\varphi_{\mu, \sigma}$ ist bei $x_0 = \mu$ und beträgt etwa $\frac{0,4}{\sigma}$, die Wendestellen sind $x_1 = \mu - \sigma$ und $x_2 = \mu + \sigma$. Es ist $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_{\mu, \sigma}(x) = 0$.

Beispiel Glockenkurve skizzieren

- Geben Sie den Funktionsterm der Dichtefunktion $\varphi_{4, 2}$ an.
- Geben Sie die Maximumstelle, das Maximum und die Wendestellen von $\varphi_{4, 2}$ an.
- Skizzieren Sie die Glockenkurve zu $\varphi_{4, 2}$ mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe b).
- Veranschaulichen Sie grafisch die Wahrscheinlichkeit $P(2 \leq X < 6)$ für eine $N_{4, 2}$ -verteilte Zufallsgröße X .

Lösung

a) $\varphi_{4, 2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{8}}$

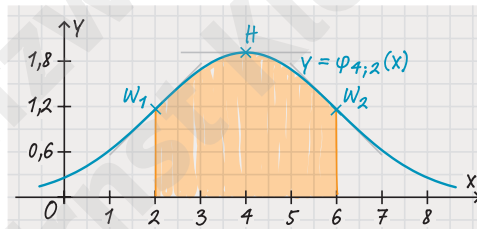
a) Maximumstelle: $x_0 = \mu = 4$.

Maximum: $\varphi_{\mu, \sigma}(4) \approx \frac{0,4}{\sigma} = 0,2$.

Wendestellen: $x_1 = \mu - \sigma = 4 - 2 = 2$ und

$x_2 = \mu + \sigma = 4 + 2 = 6$.

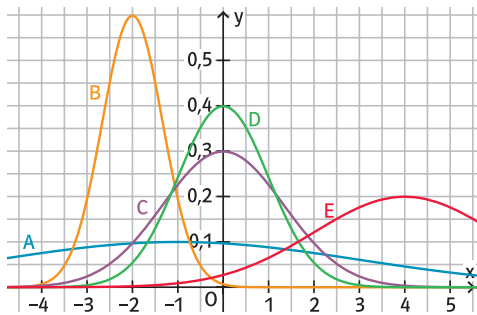
c), d) vgl. Grafik rechts



Aufgaben

- In der Abbildung sind Graphen zu Funktionen $\varphi_{\mu, \sigma}$ dargestellt.
 - Ermitteln Sie, welcher der dargestellten Graphen zur Funktion $\varphi_{0, 1}$ gehört.
 - Geben Sie für die anderen Graphen passende Werte für μ und σ an. Beschreiben Sie, wie diese Graphen durch Verschieben und Strecken des Graphen von $\varphi_{0, 1}$ entstehen.
 - Geben Sie die Bedeutung von μ und σ für eine $N_{\mu, \sigma}$ -verteilte Zufallsgröße X an.
- Die Zufallsgröße X ist normalverteilt mit der gegebenen Dichtefunktion. Geben Sie deren Term an und skizzieren Sie ihren Graphen mithilfe des Hochpunktes und der Wendepunkte. Markieren Sie die Fläche, deren Inhalt der Wahrscheinlichkeit $P(X \in [-1; 2])$ entspricht.

a) $\varphi_{0, 1}$	b) $\varphi_{-2, 1}$	c) $\varphi_{2, 1}$	d) $\varphi_{0, 2}$
e) $\varphi_{2, 4}$	f) $\varphi_{3, 0,5}$	g) $\varphi_{4, 2}$	h) $\varphi_{1, 0,1}$
- Eine Gauß'sche Glockenkurve hat die Wendestellen $x_1 = 11$ und $x_2 = 29$. Geben Sie den Term der zugehörigen Dichtefunktion an.
- Zeigen Sie: Die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung ist für $x < 0$ streng monoton wachsend und für $x > 0$ streng monoton fallend.



- 5 a) Zeigen Sie: Der Graph der Funktion $\varphi_{0,1}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
b) Begründen Sie: Der Graph der Funktion $\varphi_{\mu,\sigma}$ ist achsensymmetrisch zur Geraden $x = \mu$.

- 6 ☒ Gegeben ist die Funktion $\varphi_{30,20}$. Ordnen Sie die Funktionswerte mit dem Zeichen „ $\leq$ “.

A $\varphi_{30,20}(-10)$

C $\varphi_{30,20}(50)$

E $\varphi_{30,20}(30)$

G $\varphi_{30,20}(20)$

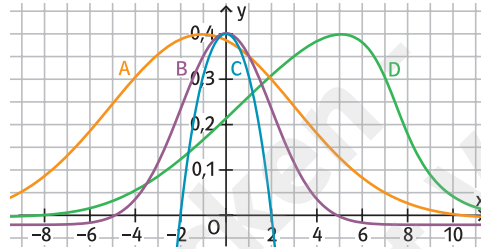
B $\varphi_{30,20}(80)$

D $\varphi_{30,20}(95)$

F $\varphi_{30,20}(40)$

- 7 Begründen Sie, warum die Graphen A, B, C und D keine Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße darstellen.

- 8 a) Berechnen Sie für eine $N_{50,20}$ -verteilte Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße einen Wert zwischen 30 und 70 annimmt.



- b) Erläutern Sie, wie sich die Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe a) ändert, wenn sich
(1) μ verkleinert, (2) μ vergrößert, (3) σ verkleinert, (4) σ vergrößert.

Test

Lösung | Seite 493

- 9 Gegeben ist die Funktion $\varphi_{5,2}$.

- a) Geben Sie ihren Term an und bestimmen Sie näherungsweise ihr Maximum.
b) Skizzieren Sie den Graphen von $\varphi_{5,2}$ mithilfe des Hochpunktes und der Wendepunkte.
c) Es ist X eine $N_{5,2}$ -verteilte Zufallsgröße. Veranschaulichen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(2 < X \leq 6)$ am Graphen aus Teilaufgabe c).

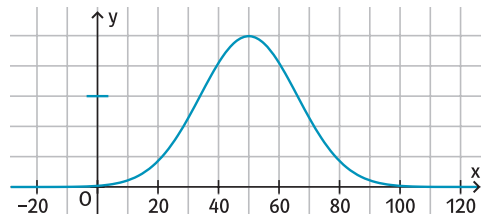
- 10 Zu einer normalverteilten Zufallsgröße X ist der Graph ihrer Dichtefunktion gegeben.

- a) Ermitteln Sie näherungsweise den Wert des Erwartungswertes und der Standardabweichung von X .
b) Geben Sie $P(X = 2)$ an.
c) Bestimmen Sie näherungsweise anhand der Grafik $P(X > 3)$ und $P(1,4 \leq X \leq 1,8)$.



- 11 Abhängig vom Nahrungsangebot wird eine Forelle in der Regel zwischen 20 cm und 80 cm lang. Fliegenfischer Thomas nimmt an, dass die $N_{50,16}$ -verteilte Zufallsgröße L die Länge einer zufällig gefischten Forelle beschreibt. Die Abbildung zeigt den Graphen der zu L gehörigen Dichtefunktion.

- a) Ermitteln Sie näherungsweise das Maximum der Dichtefunktion und bestimmen Sie den y-Wert, der der blauen Markierung auf der y-Achse entspricht.
b) Ermitteln Sie grafisch, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine zufällig gefischte Bachforelle länger als 70 cm ist.



- c) Interpretieren Sie die Gleichung $\int_x^{x+20} \varphi_{50,16}(x) dx \approx 0,24$ im Sachkontext und ermitteln Sie grafisch deren Lösung.
d) Thomas' Kollege Tobias sagt: „Die Modellierung der Bachforellen-Länge mit der Zufallsgröße L kann nicht stimmen, weil keine Bachforelle kleiner als 0 cm, aber $P(L < 0) \approx 0,1\%$ ist.“ Nehmen Sie Stellung zu dieser Aussage.



- 12 ☒ Gegeben sind Funktionswerte $\varphi_{\mu;3}(-1)$. Ordnen Sie diese mit dem Zeichen „ $\leq$ “.

A $\varphi_{5;3}(-1)$ B $\varphi_{0;3}(-1)$ C $\varphi_{3;3}(-1)$ D $\varphi_{-1;3}(-1)$ E $\varphi_{-5;3}(-1)$

- 13 Beurteilen Sie die Aussage: „Die Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße hat nie Funktionswerte, die größer als 1 sind.“
- 14 Bestimmen Sie mit Mitteln der Differenzialrechnung die Koordinaten des Hochpunktes und der Wendepunkte der Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.
- 15 Der Graph von $\varphi_{0;1}$ hat den Hochpunkt $H\left(0 \mid \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ und die Wendepunkte $W_{1,2}\left(\pm 1 \mid \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0,5}\right)$.
- Leiten Sie daraus mithilfe von Streckung und Verschiebung des Graphen von $\varphi_{0;1}$ her, dass $\varphi_{\mu;\sigma}$ seine Maximumstelle bei μ und seine Wendestellen bei $\mu \pm \sigma$ hat.
 - Ermitteln Sie die y-Werte des Hochpunktes und der Wendepunkte des Graphen von $\varphi_{\mu;\sigma}$.
 - Begründen Sie die beiden Faustregeln, dass das Maximum von $\varphi_{\mu;\sigma}$ etwa $\frac{0,4}{\sigma}$ beträgt und die y-Koordinate der Wendepunkte etwa dem 0,6-Fachen des Maximums entspricht.
- 16 Bestimmen Sie für eine normalverteilte Zufallsgröße X den Wert μ und ermitteln Sie durch Probieren einen ganzzahligen Wert für σ , sodass die gegebene Bedingung gilt.
- $P(X < 1,5) = P(X > 10,5) \approx 0,26$
 - $P(X \geq 33) \approx 0,369$ und $P(X \geq 27) \approx 0,631$

- 17 Für eine $N_{\mu;\sigma}$ -verteilte Zufallsgröße X gilt $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$. Bestimmen Sie damit den Wert des gegebenen Integrals.

a) $\int_{-\infty}^{\mu - \sigma} \varphi_{\mu;\sigma}(t) dt$

b) $\int_{-\infty}^{\mu + \sigma} \varphi_{\mu;\sigma}(t) dt$

c) $\int_{\mu - \sigma}^{\infty} \varphi_{\mu;\sigma}(t) dt$

Auf Seite 376 ff. werden weitere sogenannte Sigma-Regeln behandelt.

Test

→ Lösung | Seite 493

- 18 Für eine Funktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ wird $\int_5^7 \varphi_{\mu;\sigma}(x) dx$ bestimmt. Es gibt ein Integral $\int_a^b \varphi_{\mu;\sigma}(x) dx$, das exakt den gleichen Wert hat, wobei $a \neq 5$ und $b \neq 7$ ist. Bestimmen Sie ganze Zahlen a und b für die gegebenen Werte von μ und σ .

a) $\mu = 7, \sigma = 2$

b) $\mu = 10, \sigma = 3$

c) $\mu = 0, \sigma = 1$

- 19 Ermitteln Sie den Wert von σ in Abhängigkeit von $\mu (\neq 0)$, für den $\varphi_{\mu;\sigma}(0)$ maximal ist.
- 20 Gegeben sind die Funktionen g und h mit $g(x) = e^{-x^2}$ und $h(x) = e^{-x}$.
- Skizzieren Sie die Graphen von g und h in ein gemeinsames Koordinatensystem.
 - Die Graphen von g und h schneiden sich in zwei Punkten. Bestimmen Sie die Koordinaten dieser Punkte und untersuchen Sie, wo der Graph von g oberhalb des Graphen von h liegt.
 - Bestimmen Sie näherungsweise $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$. Verwenden Sie dazu geeignete Wahrscheinlichkeiten einer normalverteilten Zufallsgröße X .
Hinweis: Vergleichen Sie die Terme der Funktionen von g und $\varphi_{0;\sigma}$. Wählen Sie einen geeigneten Wert für σ .
 - Bestimmen Sie mit den Ergebnissen der Teilaufgaben a) bis c) den Inhalt der Fläche, die die Graphen von g und h einschließen.

Grundwissen Test

- 21 Gegeben sind der Punkt $P(10 \mid -8 \mid 5)$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$.
- Bestimmen Sie den Abstand von P zu g .
 - Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes Q , der von P und g gleich weit entfernt ist.

→ Grundwissen
Seite 407
Lösung | Seite 493

Lambacher Schweizer

Ein klares Konzept für differenziertes Lernen

Viele Aufgaben zum Üben, Vertiefen, Vernetzen

Zahlreiche Aufgaben für unterschiedliche Lernniveaus helfen beim Üben und Sichern des Lernstoffes.

Klare Kennzeichnung von Niveaustufen

Die Aufgaben des Lambacher Schweizer sind auf drei Niveaustufen mit Symbolen klar gekennzeichnet.

Klare Struktur

Die Kapitel und Lerneinheiten sind immer nach demselben Prinzip gegliedert. Das hilft bei der Orientierung.

Testelemente zum selbstständigen Lernen

Elemente wie *Test* und *Training* helfen, den Lernstoff zu festigen. Am Ende des Buches finden Sie das fürs Abitur notwendige *Grundwissen* zum Nachschlagen und Üben. Die dazugehörigen Lösungen im Buch bieten die Möglichkeit, selbstständig den Wissensstand zu überprüfen.