# 4 Exponentialrechnung

## Auftaktseite — Seiten 84, 85

### Seite 84

**1** Stiftungsvermögen nach dem Tod von Alfred Nobel: 33 Mio. – 1,5 Mio. = 31,5 Mio. SEK
Alfred Nobel hat sich vorgestellt, dass dieses Vermögen von 31,5 Mio. SEK in sicheren Wertpapieren angelegt wird. Aus den jährlichen Zinsen sollen dann die jährlichen Nobel-Preise ausbezahlt werden.
Geld pro Preis: 150 000 SEK
Bei 5 Nobel-Preisen erhält man eine Gesamtsumme von $5 \cdot 150\,000 = 750\,000$ SEK.
Diese Summe sollte nun 60 % der jährlichen Zinsen betragen. Damit betragen die Zinsen:
$750\,000 : 0{,}6 = 1\,250\,000$ SEK
Berechnung des Zinssatzes:
$31\,500\,000 \cdot p\,\% = 1\,250\,000$
$p\,\% = \frac{1\,250\,000}{31\,500\,000} = 0{,}0397 \approx 4{,}0\,\%$
Der jährliche Zinssatz müsste 4 % betragen, wenn rund 60 % der Zinsen ausbezahlt wurden.

**2** In den Jahren 1994, 1999 bis 2002 sowie in den Jahren 2008 und 2011 ist das Stiftungsvermögen nicht gewachsen, sondern geschrumpft. Die Geldanlage kann also nicht so sicher gewesen sein, dass es noch einen Gewinn gegeben hätte. Ob auch in anderen Jahren abweichend von den Vorgaben investiert wurde (zum Beispiel in riskante Aktiengeschäfte), kann man aus der Grafik nicht erkennen.

### Seite 85

**3** Birte hat recht. Wenn man mit einem durchschnittlichen jährlichen Zuwachs von 7,1% rechnet, ergibt sich folgende Tabelle:

| Jahr | Kapital zu Jahresbeginn in SEK | Zinsen 7,1% | Kapital am Jahresende in SEK |
|---|---|---|---|
| 2011 | 2.973 000.000,00 | 211 083.000,00 | 3.184 083.000,00 |
| 2012 | 3.184 083.000,00 | 226 069.893,00 | 3.410 152.893,00 |
| 2013 | 3.410 152.893,00 | 242 120.855,40 | 3.652 273.748,40 |
| 2014 | 3.652 273.748,40 | 259 311.436,14 | 3.911 585.184,54 |
| 2015 | 3.911 585.184,54 | 277 722.548,10 | 4.189 307.732,64 |
| 2016 | 4.189 307.732,64 | 297 440.849,02 | 4.486 748.581,66 |
| 2017 | 4.486 748.581,66 | 318 559.149,30 | |

Das Stiftungskapital hat nach dieser Berechnung zu Beginn des Jahres 2017 in etwa die tatsächliche Höhe.

Joy hat vermutlich den Zinssatz, der sich insgesamt zwischen 2011 und 2017 ergeben hat, durch 6 (Jahre) geteilt. Dann ergeben sich in etwa 8,5 %.

## 1 Zinsen — Seiten 86, 87

### Seite 86

**Einstieg**

→ Kapital zu Beginn: 1200 €

| | Zinssatz | Zinsen | Kapital nach 1 Jahr |
|---|---|---|---|
| örtl. Geldinstitut | 0,50 % | 6 € | 1.206 € |
| riskantere Anlage | 1,40 % | 16,80 € | 1.216,80 € |
| Vater | | | 1.215 € |

→ Individuelle Lösungen; zum Beispiel:
Die riskantere Anlage in britischem Pfund ist am lukrativsten; die Zinsen vom örtlichen Institut fallen dagegen sehr gering aus. Die Anlage in britischem Pfund ist aber auf der anderen Seite etwas unsicher. Da das vom Vater versprochene Geld nur um 1,80 € weniger als die voraussichtliche Summe von der riskanteren Anlage liegt, sollte sich Ethan für den Vorschlag von seinem Vater entscheiden.

**1** a) $Z = K \cdot p\,\%$
$Z = 590 \cdot 6\,\%$
$Z = 590 \cdot 0{,}06$
$Z = 35{,}40$
Es werden nach einem Jahr 35,40 € Zinsen gezahlt.
b) $Z = K \cdot p\,\%$
$Z = 4200 \cdot 0{,}9\,\%$
$Z = 4200 \cdot 0{,}009$
$Z = 37{,}80$
Es werden nach einem Jahr 37,80 € Zinsen gezahlt.
c) $Z = K \cdot p\,\% \cdot \frac{t}{360}$
$Z = 2500 \cdot 2{,}4\,\% \cdot \frac{81}{360}$
$Z = 2500 \cdot 0{,}024 \cdot \frac{81}{360}$
$Z = 13{,}50$
Es werden nach 81 Tagen 13,50 € Zinsen gezahlt.
d) $Z = K \cdot p\,\% \cdot \frac{t}{360}$
$Z = 3850 \cdot 8{,}9\,\% \cdot \frac{72}{360}$
$Z = 3850 \cdot 0{,}089 \cdot \frac{72}{360}$
$Z = 68{,}53$
Es werden nach 72 Tagen 68,53 € Zinsen gezahlt.

e) 4 Monate = 120 Tage

$Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$Z = 15\,000 \cdot 1{,}3\% \cdot \frac{120}{360}$

$Z = 15\,000 \cdot 0{,}013 \cdot \frac{120}{360}$

$Z = 65{,}00$

Es werden nach 4 Monaten 65,00 € Zinsen gezahlt.

**Seite 87**

2

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| Kapital | 4500 € | 24 000 € | **30 000 €** |
| Zinssatz | 0,6 % | **0,4 %** | 2,5 % |
| Zeitraum | **120 Tage** | 3 Monate | 69 Tage |
| Zinsen | 9,00 € | 24,00 € | 143,75 € |

| | d) | e) |
|---|---|---|
| Kapital | 80 000 € | 125 000 € |
| Zinssatz | **11,2 %** | 8,5 % |
| Zeitraum | 63 Tage | **36 Tage** |
| Zinsen | 1568,00 € | 1062, 0 € |

Lösungen der Aufgaben:

zu a) $Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$9 = 4500 \cdot 0{,}6\% \cdot \frac{t}{360}$

$9 = 4500 \cdot 0{,}006 \cdot \frac{t}{360} \quad | \cdot 360$

$9 \cdot 360 = 4500 \cdot 0{,}006 \cdot t$

$t = \frac{9 \cdot 360}{4500 \cdot 0{,}006}$

t = 120 Tage

zu b) 3 Monate = 90 Tage

$Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$24 = 24\,000 \cdot p\% \cdot \frac{90}{360} \quad | \cdot 360$

$24 \cdot 360 = 24\,000 \cdot 90 \cdot p\%$

$p\% = \frac{24 \cdot 360}{24\,000 \cdot 90}$

$p\% = 0{,}004 = 0{,}4\%$

zu c) $Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$143{,}75 = K \cdot 2{,}5\% \cdot \frac{69}{360}$

$143{,}75 = K \cdot 0{,}025 \cdot \frac{69}{360} \quad | \cdot 360$

$143{,}75 \cdot 360 = K \cdot 0{,}025 \cdot 69$

$K = \frac{143{,}75 \cdot 360}{0{,}025 \cdot 69}$

K = 30 000 €

zu d) $Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$1568 = 80\,000 \cdot p\% \cdot \frac{63}{360} \quad | \cdot 360$

$1568 \cdot 360 = 80\,000 \cdot 63 \cdot p\%$

$p\% = \frac{1568 \cdot 360}{80\,000 \cdot 63}$

$p\% = 0{,}112 = 11{,}2\%$

zu e) $Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$1062 = 125\,000 \cdot 8{,}5\% \cdot \frac{t}{360}$

$1062 = 125\,000 \cdot 0{,}085 \cdot \frac{t}{360}$

$t = \frac{1062 \cdot 360}{125\,000 \cdot 0{,}085}$

t = 36 Tage

3 a) K = 4800 €; p % = 9,4 %;

t = 3 Wochen = 21 Tage

Gesucht sind die Sollzinsen Z.

$Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$Z = 4800 \cdot 9{,}4\% \cdot \frac{21}{360}$

$Z = 4800 \cdot 0{,}094 \cdot \frac{21}{360}$

$Z = 26{,}32$

Die Sollzinsen betragen 26,32 €.

b) K = 4800 €; t = 21 Tage; Z = 24,64 €

Gesucht ist der Zinssatz p %.

$Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$24{,}64 = 4800 \cdot p\% \cdot \frac{21}{360} \quad | \cdot 360$

$24{,}64 \cdot 360 = 4800 \cdot 21 \cdot p\%$

$p\% = \frac{24{,}64 \cdot 360}{4800 \cdot 21}$

$p\% = 0{,}088 = 8{,}8\%$

Das Geldinstitut hat einen Zinssatz von 8,8 % verlangt.

A a) $Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$Z = 2000 \cdot 1{,}2\% \cdot \frac{150}{360}$

Z = 10,00 €

b) $Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$66{,}42 = 24\,600 \cdot p\% \cdot \frac{81}{360} \quad |:24\,600 \quad | \cdot \frac{360}{81}$

$p\% = \frac{66{,}42 \cdot 360}{24\,600 \cdot 81} = 0{,}012$

$p\% = 1{,}2\%$

c) $Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$98{,}56 = K \cdot 9{,}9\% \cdot \frac{28}{360}$

$98{,}56 = K \cdot 0{,}099 \cdot \frac{28}{360} \quad |:0{,}099 \quad | \cdot \frac{360}{28}$

$K = \frac{98{,}56 \cdot 360}{0{,}099} \cdot 28 = 12\,800$

K = 12 800,00 €

d) $Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$77 = 17\,500 \cdot p\% \cdot \frac{18}{360} \quad |:17\,500 \quad | \cdot \frac{360}{18}$

$p\% = \frac{77 \cdot 360}{17\,500 \cdot 18} = 0{,}088$

$p\% = 8{,}8\%$


Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

e) $Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$10{,}88 = 6800 \cdot 0{,}8\% \cdot \frac{t}{360}$

$10{,}88 = 6800 \cdot 0{,}008 \cdot \frac{t}{360} \quad | \cdot 360$

$10{,}88 \cdot 360 = 6800 \cdot 0{,}008 \cdot t \quad | :(6800 \cdot 0{,}008)$

$t = \frac{10{,}88 \cdot 360}{6800 \cdot 0{,}008} = 72$

t = 72 Tage

**B** K = 3200,00 €

p% = 12%

t = 12 Tage

gesucht: Z

$Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$Z = 3200 \cdot 12\% \cdot \frac{12}{360}$

Z = 12,80 €

**Seite 87, links**

**4** K = 369,90 €; t = 180 Tage; p% = 0,8%

$Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$Z = 369{,}90\,€ \cdot 0{,}8\% \cdot \frac{180}{360}$

$Z = 369{,}90\,€ \cdot 0{,}08 \cdot \frac{1}{2}$

Z = 14,80 €

K + Z = 369,90 € + 14,80 € = 384,70 €

Herr Conrad muss nach einem halben Jahr 384,70 € bezahlen.

**5** a) t = 8 Monate = 240 Tage; p% = 1,1%;

Z = 418 €; gesucht ist K

$Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$418 = K \cdot 1{,}1\% \cdot \frac{240}{360}$

$418 = K \cdot 0{,}011 \cdot \frac{240}{360}$

$K = \frac{418 \cdot 360}{0{,}011 \cdot 240}$

K = 57 000 €

Das Kapital beträgt 57 000 €.

b) K = 25 000 €; t = 9 Monate = 270 Tage;

Höhe der Zinsen berechnen:

Z = 26 650 € − 25 000 €

Z = 1650 €

Zinssatz berechnen:

$Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$1650 = 25\,000 \cdot p\% \cdot \frac{270}{360}$

$p\% = \frac{1650 \cdot 360}{25\,000 \cdot 270}$

p% = 0,088 = 8,8%

Der Zinssatz betrug 8,8%.

c) Individuelle Recherche

Im Allgemeinen sind die Zinssätze bei Sparzinsen viel geringer als die Zinssätze bei Kreditzinsen. Letztere können mehr als das Zehnfache betragen.

Die Zinssätze für Sparzinsen im Jahr 2019 bewegen sich je nach Bank und Anlageform zwischen 0,0% und 1,5%. Meist betragen sie 0,5% bis 0,7%.

Die Zinssätze für Kreditzinsen (im gleichen Jahr) hängen von verschiedenen Faktoren, unter anderem der Kreditwürdigkeit des Kunden, ab und können z. B. zwischen 5,5% und 18,0% liegen.

**6** K = 35 000 €; p% = 1,1%; Z = 96,25 €

Gesucht ist der Zeitraum t.

$Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$96{,}25 = 35\,000 \cdot 1{,}1\% \cdot \frac{t}{360}$

$96{,}25 = 35\,000 \cdot 0{,}011 \cdot \frac{t}{360}$

$t = \frac{96{,}25 \cdot 360}{35\,000 \cdot 0{,}011}$

t = 90 Tage

Frau Schütt hat die Zinsen für einen Zeitraum von 90 Tagen bekommen.

**Seite 87, rechts**

**4** K = 3200 €; p% = 1,2%; Z = 6,40 €

Gesucht ist der Zeitraum t.

$Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$6{,}40 = 3200 \cdot 1{,}2\% \cdot \frac{t}{360}$

$6{,}40 = 3200 \cdot 0{,}012 \cdot \frac{t}{360}$

$t = \frac{6{,}40 \cdot 360}{3200 \cdot 0{,}012}$

t = 60 Tage

Luca hat sein Geld für 60 Tage angelegt.

**5** Ersparnis bei Sofortzahlung:

2853 € · 0,01 = 28,53 €

Kosten der Überziehung:

K = 1800 €; t = 16 Tage; p% = 11,0%

$Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$Z = 1800 \cdot 11\% \cdot \frac{16}{360}$

$Z = 1800 \cdot 0{,}11 \cdot \frac{16}{360}$

Z = 8,80 €

Frau Mundt spart 28,53 € bei Sofortzahlung, muss aber dafür 8,80 € an Zinsen zahlen; sie spart also insgesamt:

28,53 € − 8,80 € = 19,73 €.

Eine Sofortzahlung lohnt sich also; Frau Mundt zahlt damit knapp 20 € weniger.

6 a) Berechnung der Zinstage:
von 21.04. bis 30.04.: 10 Tage;
von Mai bis Juli: $3 \cdot 30 = 90$ Tage;
von 01.08. bis 28.08.: 28 Tage
Gesamtzahl:
$10 + 90 + 28 = 128$; also $t = 128$ Tage
b) $K = 22\,000$ €; $p\,\% = 9{,}9\,\%$
$Z = K \cdot p\,\% \cdot \frac{t}{360}$
$Z = 22\,000 \cdot 9{,}9\,\% \cdot \frac{128}{360}$
$Z = 22\,000 \cdot 0{,}099 \cdot \frac{128}{360}$
$Z = 774{,}40$
Die Zinsen betragen 774,40 €.

7 Berechnung der Zinstage in den USA:
- von 21.02. bis 29.02.: 8 Tage;
- für die ganzen Monate März, April und Mai berechnet man: $31 + 30 + 31 = 92$ Tage;
- von 01.06. bis 15.06.: 15 Tage

Gesamtzahl:
$8 + 92 + 16 = 116$; also $t = 115$ Tage
Berechnung der Zinsen:
$Z = K \cdot p\,\% \cdot \frac{t}{360}$
$Z = 20\,000 \cdot 8{,}8\,\% \cdot \frac{115}{366}$
$Z = 20\,000 \cdot 0{,}088 \cdot \frac{115}{366}$
$Z = 553{,}01$
In den USA zahlt Mary $553,01 Zinsen.
Berechnung der Zinstage in Deutschland:
- Februar: 10 Tage;
- März, April und Mai: $3 \cdot 30 = 90$ Tage
- von 01.06. bis 15.06.: 15 Tage

Gesamtzahl:
$10 + 90 + 15 = 115$; also $t = 115$ Tage
Berechnung der Zinsen:
$Z = K \cdot p\,\% \cdot \frac{t}{360}$
$Z = 20\,000 \cdot 0{,}088 \cdot \frac{115}{360}$
$Z = 562{,}22$
In Deutschland würde Mary $562,22 zahlen, also ca. 9 Dollar mehr als in den USA.
Tipp: 2020 ist ein Schaltjahr, der Februar hat also real 29 Tage. Für das ganze Jahr werden in den USA entsprechend 366 (statt 365) Tage berechnet.
In Deutschland hat allerdings ein Monat 30 Zinstage, daher berechnet man für die Zeit in Februar 10 Zinstage (statt 8, wie es real ist).

## 2 Zinseszinsen Seiten 88, 89

**Seite 88**

**Einstieg**
→ • Lea-Sophie (von Ende 2018 bis 2023)
2018: 5000 €
2019: $Z = 5000 \cdot 0{,}012 = 60$
Kapital: 5000 € + 60 € = 5060 €
2020: $Z = 5060 \cdot 0{,}012 = 60{,}72$
Kapital: 5060 € + 60,72 € = 5120,72 €
2021: $Z = 5120{,}72 \cdot 0{,}012 = 61{,}45$
Kapital: 5182,17 €
2022: $Z = 5182{,}17 \cdot 0{,}012 = 62{,}19$
Kapital: 5244,36 €
2023: $Z = 5244{,}36 \cdot 0{,}012 = 62{,}93$
Kapital: 5307,29 €

• Dorothee (von 1995 bis 2000)
1995: 5000 DM
1996: $Z = 5000 \cdot 0{,}07 = 350$
Kapital: 5000 + 350 = 5350 DM
1997: $Z = 5350 \cdot 0{,}07 = 374{,}50$
Kapital: 5350 + 374,50 = 5724,50 DM
1998: $Z = 5724{,}50 \cdot 0{,}07 = 400{,}72$
Kapital: 6125,22 DM
1999: $Z = 6125{,}22 \cdot 0{,}07 = 428{,}76$
Kapital: 6553,98 DM
2000: $Z = 6553{,}98 \cdot 0{,}07 = 458{,}78$
Kapital: 7012,76 DM

• Martina (von 1974 bis 1979)
1974: 5000 DM
1975: $Z = 5000 \cdot 0{,}105 = 525$
Kapital: 5000 + 525 = 5525 DM
1976: $Z = 5525 \cdot 0{,}105 = 580{,}13$
Kapital: 5525 + 580,13 = 6105,13 DM
1977: $Z = 6105{,}13 \cdot 0{,}105 = 641{,}04$
Kapital: 6746,17 DM
1978: $Z = 6746{,}17 \cdot 0{,}105 = 708{,}35$
Kapital: 7454,52 DM
1979: $Z = 7454{,}52 \cdot 0{,}105 = 782{,}72$
Kapital: 8237,24 DM

→ Individuelle Lösungen
→ Individuelle Lösungen
Der superschnelle Rechenweg geht über die Berechnung des Zinsfaktors q $\left(q = 1 + \frac{p}{100}\right.$, vgl. dazu Schulbuch, Seite 88$\left.\right)$.
Z.B. bei Lea-Sophie:
$q_1 = 1 + \frac{1{,}2}{100} = 1 + 0{,}012 = 1{,}012$
Kapital nach einem Jahr:
$5000\,€ \cdot 1{,}012 = 5060\,€$
Kapitel nach 2 Jahren:
$5060\,€ \cdot 1{,}012 = 5120{,}72\,€$ bzw.
$(5000\,€ \cdot 1{,}012) \cdot 1012 = 5120{,}72\,€$ bzw.
$5000\,€ \cdot 1{,}012^2 = 5120{,}72\,€$

Kapitel nach 3 Jahren:
$5000\,€ \cdot 1{,}012^2 \cdot 1{,}12 = 5182{,}17\,€$ bzw.
$5000\,€ \cdot 1{,}012^3 = 5182{,}17\,€$
Kapitel nach 4 Jahren:
$5000\,€ \cdot 1{,}012^3 \cdot 1{,}12 = 5244{,}35\,€$ bzw.
$5000\,€ \cdot 1{,}012^4 = 5244{,}35\,€$
Mit einer einzigen Rechnung erhält man also für das Kapital nach 5 Jahren:
$5000\,€ \cdot 1{,}012^5 = 5307{,}29\,€$.

**Seite 89**

**1** a) $p\,\% = 3\,\%$
$q = 1 + \frac{p}{100}$
$q = 1 + \frac{3}{100}$
$q = 1{,}03$

b) $p\,\% = 2{,}8\,\%$
$q = 1 + \frac{p}{100}$
$q = 1 + \frac{2{,}8}{100}$
$q = 1{,}028$

c) $p\,\% = 12{,}5\,\%$
$q = 1 + \frac{p}{100}$
$q = 1 + \frac{12{,}5}{100}$
$q = 1{,}125$

d) $p\,\% = 0{,}8\,\%$
$q = 1 + \frac{p}{100}$
$q = 1 + \frac{0{,}8}{100}$
$q = 1{,}008$

**2** a) $q = 1{,}09$
$q = 1 + \frac{9}{100}$
$p\,\% = 9\,\%$

b) $q = 1{,}025$
$q = 1 + \frac{25}{1000}$
$q = 1 + \frac{2{,}5}{100}$
$p\,\% = 2{,}5\,\%$

c) $q = 1{,}158$
$q = 1 + \frac{158}{1000}$
$q = 1 + \frac{15{,}8}{100}$
$p\,\% = 15{,}8\,\%$

d) $q = 1{,}007$
$q = 1 + \frac{7}{1000}$
$q = 1 + \frac{0{,}7}{100}$
$p\,\% = 0{,}7\,\%$

**3** a) $K = 7000\,€$; $n = 5$ Jahre; $p\,\% = 1{,}6\,\%$
Bestimmung von q:
$q = 1 + \frac{p}{100}$
$q = 1 + \frac{1{,}6}{100}$
$q = 1{,}016$
$K_5 = K_0 \cdot q^5$
$K_5 = 7000 \cdot 1{,}016^5 = 7578{,}21$
$K_5 = 7578{,}21\,€$
Das Endkapital beträgt 7578,21 €.

b) $K_0 = 2500\,€$; $n = 8$ Jahre; $p\,\% = 1{,}3\,\%$
Bestimmung von q:
$q = 1 + \frac{p}{100}$
$q = 1 + \frac{1{,}3}{100}$; also $q = 1{,}013$
$K_8 = K_0 \cdot q^8$
$K_8 = 2500 \cdot 1{,}013^8 = 2772{,}14$
$K_8 = 2772{,}14\,€$
Das Endkapital beträgt 2772,14 €.

c) $K_0 = 20\,000\,€$; $n = 4$ Jahre; $p\,\% = 2{,}4\,\%$
Bestimmung von q:
$q = 1 + \frac{2{,}4}{100}$
$q = 1{,}024$
$K_4 = K_0 \cdot q^4$
$K_4 = 20\,000 \cdot 1{,}024^4 = 21\,990{,}23$
$K_4 = 21\,990{,}23\,€$
Das Endkapital beträgt 21 990,23 €.

d) $K_0 = 20\,000\,€$; $n = 4$ Jahre; $p\,\% = 3{,}6\,\%$
Bestimmung von q:
$q = 1 + \frac{3{,}6}{100}$
$q = 1{,}036$
$K_4 = K_0 \cdot q^4$
$K_4 = 20\,000 \cdot 1{,}036^4 = 23\,039{,}29$
$K_4 = 23\,039{,}29\,€$
Das Endkapital beträgt 23 039,29 €.

**4** a) $q = 1 + \frac{1{,}2}{100} \Rightarrow q = 1{,}012$
$K_3 = K_0 \cdot q^3$
$518{,}22 = K_0 \cdot 1{,}012^3$
$K_0 = \frac{518{,}22}{1{,}012^3} = 500\,003$
$K_0 = 500{,}00\,€$

b) $q = 1 + \frac{1{,}1}{100} \Rightarrow q = 1{,}011$
$K_8 = K_0 \cdot q^8$
$2182{,}93 = K_0 \cdot 1{,}011^8$
$K_0 = \frac{2182{,}93}{1{,}011^8} = 2000\,0026$
$K_0 = 2000{,}00\,€$

c) $q = 1 + \frac{0{,}9}{100} \Rightarrow q = 1{,}009$
$K_5 = K_0 \cdot q^5$
$8889{,}45 = K_0 \cdot 1{,}009^5$
$K_0 = \frac{8889{,}45}{1{,}009^5} = 8500\,0026$
$K_0 = 8500{,}00\,€$

**5** Da die Laufzeit bei allen Aufgaben $n = 8$ Jahre beträgt, ist jeweils $K = K$.
a) Zinsfaktor q berechnen:
$K_8 = K_0 \cdot q^8$
$1598{,}73 = 1500{,}00 \cdot q^8$
$q^8 = \frac{1598{,}73}{1500{,}00} \quad |\sqrt[8]{\ }$
$q = \sqrt[8]{\frac{1598{,}73}{1500{,}00}} = 1{,}0080$
$q = 1 + \frac{8}{1000}$
$q = 1 + \frac{0{,}8}{100}$
Damit erhält man den Zinssatz: $p\,\% = 0{,}8\,\%$.

b) Zinsfaktor q berechnen: $K_8 = K_0 \cdot q^8$

$1980{,}23 = 1800{,}00 \cdot q^8$

$q^8 = \frac{1980{,}23}{1800{,}00}$

$q = \sqrt[8]{\frac{1980{,}23}{1800{,}00}} = 1{,}0120$

$q = 1 + \frac{12}{1000}$

$q = 1 + \frac{1{,}2}{100}$

Damit erhält man den Zinssatz: $p\,\% = 1{,}2\,\%$.

c) Zinsfaktor q berechnen: $K_8 = K_0 \cdot q^8$

$41\,522{,}62 = 36\,000{,}00 \cdot q^8$

$q^8 = \frac{41\,522{,}62}{36\,000{,}00}$

$q = \sqrt[8]{\frac{41\,522{,}62}{36\,000{,}00}} = 1{,}0180$

$q = 1 + \frac{18}{1000}$

$q = 1 + \frac{1{,}8}{100}$

Damit erhält man den Zinssatz: $p\,\% = 1{,}8\,\%$.

d) Zinsfaktor q berechnen: $K_8 = K_0 \cdot q^8$

$66\,948{,}43 = 55\,000{,}00 \cdot q^8$

$q^8 = \frac{66\,948{,}43}{55\,000{,}00}$

$q = \sqrt[8]{\frac{66\,948{,}43}{55\,000{,}00}} = 1{,}0249$

$q = 1 + \frac{249}{10\,000}$

$q = 1 + \frac{2{,}49}{100}$

Damit erhält man den Zinssatz: $p\,\% = 2{,}49\,\%$.

**A** a) $p\,\% = 1{,}2\,\%$

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$K_{12} = 900 \cdot 1{,}012^{12}$

$K_{12} = 1038{,}51\,€$

b) $q = 1{,}014$

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$K_8 = 3000 \cdot 1{,}014^8$

$K_8 = 3352{,}93\,€$

c) $p\,\% = 2{,}2\,\%$

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$18\,853{,}40 = K_0 \cdot 1{,}022^9 \quad |:1{,}022^9$

$K_0 = \frac{18\,853{,}40}{1{,}022^9} = 15\,499{,}997$

$K_0 = 15\,500{,}00\,€$

d) $q = 1{,}0135$

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$75\,594{,}22 = K_0 \cdot 1{,}0135^9 \quad |:1{,}0135^9$

$K_0 = \frac{75\,594{,}22}{1{,}0135^9} = 67\,000{,}001$

$K_0 = 67\,000{,}00\,€$

e) Berechnung des Zinsfaktors q

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$923\,237{,}92 = 820\,000{,}00 \cdot q^n \quad |:820\,000{,}00$

$q^5 = \frac{923\,237{,}92}{820\,000{,}00} \quad |\sqrt[5]{\ }$

$q = \sqrt[5]{\frac{923\,237{,}92}{820\,000}} = 1{,}023\,99$

$q = 1{,}024$

$p\,\% = 2{,}4\,\%$

**Seite 89, links**

**6** Gesucht: Endkapital $K_5$

Zinsfaktor $q = 1{,}009$

$K_5 = K_0 \cdot q^5$

$K_5 = 3750 \cdot 1{,}009^5 = 3921{,}81$

$K_5 = 3921{,}81\,€$

**7** $K_0 = 5000\,€$; $p\,\% = 1{,}3\,\%$; $n = 6$ Jahre

gesucht: $K_6$

Zinsfaktor $q = 1{,}013$

$K_5 = K_0 \cdot q^5$

$K_5 = 5000 \cdot 1{,}013^6 = 5402{,}90$

$K_5 = 5402{,}90\,€$

**Seite 89, rechts**

**6** Gesucht: $p\,\%$

Berechnung von q:

$K_{12} = K_0 \cdot q^{12}$

$6422{,}08 = 5500 \cdot q^{12}$

$q^{12} = \frac{6422{,}08}{5500} \quad |\sqrt[12]{\ }$

$q = \sqrt[12]{\frac{6422{,}08}{5500}} = 1{,}0130$

$q = 1 + \frac{13}{1000}$

$q = 1 + \frac{1{,}3}{100}$

Damit erhält man: $p\,\% = 1{,}3\,\%$

**7** $K_0 = 12\,000\,€$; $K_5 = 12\,991{,}22\,€$

gesucht: $p\,\%$

Berechnung von q:

$K_5 = K_0 \cdot q^5$

$12\,991{,}22 = 12\,000 \cdot q^5$

$q^5 = \frac{12\,991{,}22}{12\,000} \quad |\sqrt[5]{\ }$

$q = \sqrt[5]{\frac{12\,991{,}22}{12\,000}} = 1{,}0160$

$q = 1 + \frac{16}{1000}$

$q = 1 + \frac{1{,}6}{100}$

Damit erhält man: $p\,\% = 1{,}6\,\%$

2 Zinseszinsen **Seite 90**

**Seite 90, links**

8 $K_5 = 10\,000\,€$; $p\,\% = 1{,}1\,\%$ $\Rightarrow$ $q = 1{,}011$
gesucht: $K_0$
$K_5 = K_0 \cdot q^5$
$10\,000 = K_0 \cdot 1{,}011^5$
$K_0 = \frac{10\,000}{1{,}011^5} = 9467{,}69$
$K_0 = 9467{,}69\,€$
Herr Bleul muss 9467,70 € anlegen, damit er nach 5 Jahren 10 000 € zur Verfügung hat.

9 Anfangskapital $K_0 = 8000\,€$
Luca: $n = 15$ Jahre; $K_{16} = 11\,252{,}83\,€$
Louis: $n = 11$ Jahre; $K_{12} = 10\,163{,}65\,€$
Luca
Zinsfaktor berechnen:
$K_{15} = K_0 \cdot q^{15}$
$11\,251{,}83 = 8000 \cdot q^{15}$
$q^{15} = \frac{11\,251{,}83}{8000}$
$q = \sqrt[15]{\frac{11\,251{,}83}{8000}} = 1{,}0230$
$\Rightarrow$ Zinssatz: $p\,\% = 2{,}3\,\%$
Louis
Zinsfaktor berechnen:
$K_{11} = K_0 \cdot q^{11}$
$11\,251{,}83 = 8000 \cdot q^{11}$
$q^{11} = \frac{10\,163{,}65}{8000}$
$q = \sqrt[11]{\frac{10\,163{,}65}{8000}} = 1{,}022$
$\Rightarrow$ Zinssatz: $p\,\% = 2{,}2\,\%$
Den höheren Zinssatz hatte Luca.

10 a) $n = 4$ Jahre; $p\,\% = 1{,}6\,\%$;
Kapital nach 4 Jahren: $K_4 = 2823{,}71\,€$
gesucht: $K_0$
$K_4 = K_0 \cdot q^4$
$2823{,}71 = K_0 \cdot 1{,}016^4$
$K_0 = \frac{2823{,}71}{1{,}016^4} = 2649\,996$
$K_0 = 2650{,}00\,€$
Das Anfangskapital betrug 2650,00 €.
b) Das Kapital von 2650 € muss für eine noch unbekannte Anzahl von Jahren x angelegt werden. Es gilt also:
$3000 = 2650 \cdot 1{,}016^x \quad |:2650$
$1{,}016^x = \frac{3000}{2650} = 1{,}13208$
Durch Ausprobieren erhält man:
$1{,}016^7 = 1{,}1175$ und $1{,}016^8 = 1{,}1354$.
Das Kapital muss also für knapp 8 Jahre angelegt werden, daher kann Aylin nach 8 Jahren die Reise antreten.
(Überprüfung: $2650 \cdot 1{,}016^8 = 3008{,}82$)

11 a) $n = 8$ Jahre; $p\,\% = 1{,}2\,\%$;
Endkapital: $K_8 = 6000{,}00\,€$
gesucht: $K_0$
$K_8 = K_0 \cdot q^8$
$6000 = K_0 \cdot 1{,}012^8$
$K_0 = \frac{6000}{1{,}012^8} = 5453{,}899$
$K_0 = 5453{,}90\,€$
Man muss mindestens 5453,90 € anlegen.
b) Mögliches Vorgehen:
Man berechnet den Zinsfaktor im 1. Jahr und überprüft anschließend, ob sich mit diesem Zinsfaktor auch in den nächsten Jahren die angegebenen Summen ergeben.
(Alternativ dazu könnte man die Zinsfaktoren von Jahr zu Jahr berechnen und vergleichen, ob diese gleich sind.)
Zinssatz im 1. Jahr:
$K_1 = K_0 \cdot q_1$
$2825{,}20 = 2800 \cdot q_1$
$q_1 = \frac{2825{,}20}{2800} = 1{,}009 \Rightarrow p_1\,\% = 0{,}9\,\%$
Nun überprüft man den Zinsfaktor für die folgenden Jahre:
2. Jahr:
$K_2 = K_1 \cdot q_1$
$2850{,}63 = 2825{,}20 \cdot 1{,}009$
$2850{,}63 = 2850{,}63$
$\Rightarrow$ Zinssatz bleibt gleich
3. Jahr:
$K_3 = K_2 \cdot q_1$
$2877{,}71 = 2850{,}63 \cdot 1{,}009$
$2877{,}71 \neq 2876{,}29$
$\Rightarrow$ Zinssatz etwas größer
4. und 5. Jahr:
$K_5 = K_3 \cdot q_1^2$
$2903{,}61 = 2877{,}71 \cdot 1{,}009^2$
$2903{,}61 \neq 2929{,}74$
$\Rightarrow$ Zinssatz im 4. und 5. Jahr niedriger
Das Kapital wurde im 2. Jahr mit dem gleichen Zinssatz wie im 1. Jahr verzinst; ab dem 3. Jahr hat sich der Zinssatz verändert (im 3. Jahr war er höher, im 4. und 5. Jahr war er niedriger als im 1. Jahr).

12 a) Die Aussage ist richtig.
Individuelle Beispiele, zum Beispiel:
$K_0 = 1000\,€$; $p\,\% = 1{,}5\,\%$; $n = 5$ Jahre
$K_5 = K_0 \cdot q^5$
$K_5 = 1000 \cdot 1{,}015^5 = 1077{,}28$
$K_5 = 1077{,}28\,€$

verdoppeltes Kapital $K_0' = 2000\,€$
$K_5' = K_0' \cdot q^5$
$K_5' = 2000 \cdot 1{,}015^5 = 2154{,}57$
$K_5' = 2154{,}57\,€$
Es gilt: $K_5' = 2 \cdot K_5$; das Endkapital hat sich also verdoppelt.
b) Die Aussage ist falsch.
Überprüfen durch individuelle Beispiele, z.B.
$K_0 = 10\,000\,€$; $p\,\% = 4\,\%$; $n = 8$ Jahre
$K_8 = K_0 \cdot q^8$
$K_8 = 10\,000 \cdot 1{,}04^8 = 13\,685{,}69$
$K_8 = 13\,685{,}69\,€$
halb so großer Zinssatz $p'\,\% = 2\,\%$
$K_8' = K_0 \cdot q'^8$
$K_8' = 10\,000 \cdot 1{,}02^8 = 11\,716{,}59$
$K_8' = 11\,716{,}59\,€$
Es ist deutlich, dass das Endkapital sich nicht halbiert hat. Auch für die Gesamtzinsen gilt nicht, dass sie sich halbiert haben, denn man erhält:
$K_8 - K_0 = 3685{,}69\,€$ und $K_8' - K_0 = 1716{,}59\,€$
Und es gilt: $\frac{1}{2} \cdot 3685{,}69\,€ = 1842{,}85$.

**Seite 90, rechts**

**8** $n = 22$ Jahre; $K_0 = 19\,850\,€$
Endkapital $K_{22} = 32\,000\,€$
Berechnung des Zinsfaktors q:
$K_{22} = K_0 \cdot q^{22}$
$32\,000 = 19\,850 \cdot q^{22}$
$q^{22} = \frac{32\,000}{19\,850}$
$q = \sqrt[22]{\frac{32\,000}{19\,850}} = 1{,}02194 \approx 1{,}022$
$\Rightarrow$ Zinssatz: $p\,\% = 2{,}2\,\%$
Der Zinssatz hätte 2,2 % betragen müssen, damit derselbe Gewinn erzielt werden kann.

**9** a) $n = 3$ Jahre
Berechnung des jeweiligen Zinsfaktors
Xaver
$K_0 = 20\,000\,€$; $K_3 = 20\,630{,}51\,€$
$K_3 = K_0 \cdot q^3$
$20\,630{,}51 = 20\,000 \cdot q^3$
$q^3 = \frac{20\,630{,}51}{20\,000}$
$q = \sqrt[3]{\frac{20\,630{,}51}{20\,000}} = 1{,}0104$
$\Rightarrow$ Zinssatz: $p\,\% = 1{,}04\,\%$

Patrick
$K_0 = 18\,000\,€$; $K_3 = 18\,655{,}81\,€$
$K_3 = K_0 \cdot q^3$
$18\,655{,}81 = 18\,000 \cdot q^3$
$q^3 = \frac{18\,655{,}81}{18\,000}$
$q = \sqrt[3]{\frac{18\,655{,}81}{18\,000}} = 1{,}0120$
$\Rightarrow$ Zinssatz: $p\,\% = 1{,}2\,\%$
Xavers Zinssatz betrug 1,04 %, der von Patrick 1,2 %.
b) $n = 40$ Jahre
Xaver
$K_{40} = K_0 \cdot q^{40}$
$K_{40} = 20\,000 \cdot 1{,}0104^{40} = 30\,252{,}66$
$K_{40} = 30\,252{,}66\,€$
Patrick
$K_{40} = K_0 \cdot q^{40}$
$K_{40} = 18\,000 \cdot 1{,}012^{40} = 29\,006{,}34$
$K_{40} = 29\,006{,}34\,€$
Xavers Kapital wäre um etwa 1250 € größer.
c) Dies wäre erst nach 67 Jahren der Fall.
Für Patricks Kapital gilt dann:
$K_{67} = 18\,000 \cdot 1{,}012^{67} = 40\,028{,}27\,€$
Für Xavers Kapital gilt:
$K_{67} = 20\,000 \cdot 1{,}014^{67} = 40\,002{,}18\,€$.

**10** $K_0 = 12\,500\,€$; $p\,\% = 5{,}9\,\%$
systematisches Probieren, z.B.:
$K_{10} = K_0 \cdot q^{10}$
$K_{10} = 12\,500 \cdot 1{,}059^{10} = 22\,175{,}31\,€$
$K_{10} > 20\,000\,€$
Überprüfen von $K_8$:
$K_8 = K_0 \cdot q^8$
$K_8 = 12\,500 \cdot 1{,}059^8 = 19\,773{,}23\,€$
$K_8 < 20\,000\,€$
Überprüfen von $K_9$:
$K_9 = K_0 \cdot q^9$
$K_9 = 12\,500 \cdot 1{,}059^9 = 20\,939{,}85\,€$
Es ist also $K_9 > 20\,000\,€$ und $K_8 < 20\,000\,€$.
Damit erhält man:
Das Kapital ist nach 9 Jahren auf mehr als 20 000 € angewachsen.

**11** $K_0 = 7800\,€$; $p\,\% = 6{,}0\,\%$
a) Kapital nach 8 Jahren:
$K_8 = 7800 \cdot 1{,}06^8$
$K_8 = 12\,432{,}01\,€$
Entsprechend berechnet man:
$K_{10} = 13\,968{,}61\,€$
$K_{11} = 14\,806{,}73\,€$
$K_{12} = 15\,695{,}13\,€$
$K_{13} = 16\,636{,}84\,€$
b) Überprüfen an individuellen Zahlen; z.B.:
$K_0 = 10\,000\,€$; $p\,\% = 6{,}0$

Verdoppelt sich das Kapital nach $\frac{72}{p}$ Jahren?

$\frac{72}{6{,}0} = 12$ Jahre

$K_{12} = 10\,000 \cdot 1{,}06^{12}$

$K_{12} = 20\,121{,}96$ €

Das Kapital hat sich nach 12 Jahren etwas mehr als verdoppelt.

Die Faustformel liefert hier ein brauchbares Ergebnis.

c) Überprüfen an anderen Zinssätzen, z. B. $p\,\% = 1{,}2\,\%$; $K_0 = 10\,000$ €

Verdoppelt sich das Kapital nach $\frac{72}{p}$ Jahren?

$\frac{72}{1{,}2} = 60$ Jahre

$K_{60} = 10\,000 \cdot 1{,}012^{60}$

$K_{60} = 20\,456{,}47$ €

$K_{59} = 10\,000 \cdot 1{,}012^{59}$

$K_{59} = 20\,213{,}91$ €

Die Verdoppelung des Kapitals fand hier schon nach 59 Jahren statt; die Faustformel ist bei diesem Zinssatz nicht so genau.

Über dieses Ergebnis sollte nun diskutiert werden.

Mögliche Vermutung: Die Faustformel liefert bei kleinen Zinssätzen weniger genaue Ergebnisse. Dies kann z. B. anhand der Zinssätze von 1,0 %, 1,5 % bzw. 1,8 % überprüft werden. Schon ab einem Zinssatz von 2,0 % (Verdoppelungszeit 36 Jahre) ist der Effekt allerdings nicht mehr zu beobachten; die Faustformel liefert ab dieser Größe wieder richtige Ergebnisse.

Hinweis: Die Höhe des Kapitals spielt bei den Rechnungen keine Rolle (vgl. dazu auch die Aufgabe 12 a) auf Seite 90, links). Daher wählt man eine Zahl, mit der man gut rechnen kann.

## EXTRA: Tabellenkalkulation – Zinsrechnung am Computer Seite 91

### Seite 91

**1** a) Individuelle Ausführung

b) Das Endkapital verdoppelt, vervierfacht, verachtfacht, … sich.

**2** a) Individuelle Ausführung

b) Der Zinssatz beträgt 0,65 % (vgl. Spalte D des Tabellenblatts unten)

c) Der Zinssatz beträgt 1,4 % (vgl. Spalte E des Tabellenblattes).

E6 fx = (E7/E3)^(1/E5)

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Berechnung des Zinssatzes | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | Anfangskapital | K0 = | 8.500,00 € | 12.500 € | 7.250,00 € |
| 4 | Zinssatz | p% = | 0,85 % | 0,65 % | 1,40 % |
| 5 | Anzahl Jahre | n = | 7 | 5 | 6 |
| 6 | Zinsfaktor | q = | 1,0084888 | 1,006500067 | 1,01400006 |
| 7 | Endkapital | Kn = | 9.018,13 € | 12.911,57 € | 7.880,72 € |

**3** a) Die Formel lautet:
=C7/C6^C5

C3 fx = C7/C6^C5

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Berechnung des Anfangskapitals: | | |
| 2 | | | |
| 3 | Anfangskapital | K0 = | 6.500,00 € |
| 4 | Zinssatz | p% = | 0,75 % |
| 5 | Anzahl Jahre | n = | 6 |
| 6 | Zinsfaktor | q = | 1,0075 |
| 7 | Endkapital | Kn = | 6.798,04 € |

b) Das Anfangskapital beträgt 9200,00 €. (vgl. Spalte E des Tabellenblatts unten).

c) Das Anfangskapital beträgt 11 000,00 €. (vgl. Spalte F des Tabellenblatts).

F3 fx = F7/F6^F5

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Berechnung des Anfangskapitals: | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | Anfangskapital | K0 = | 6.500,00 € | | 9.200,00 € | 11.000,00 € |
| 4 | Zinssatz | p% = | 0,75 % | | 1,30 % | 1,75 % |
| 5 | Anzahl Jahre | n = | 6 | | 5 | 8 |
| 6 | Zinsfaktor | q = | 1,0075 | | 1,013 | 1,0175 |
| 7 | Endkapital | Kn = | 6.798,04 € | | 9.813,75 € | 12.637,70 € |

Abb. 1

K7 fx = K3*K6^K5

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Berechnung des Endkapitals | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | Anfangskapital | K0 = | 3.000,00 € | 6.000,00 € | 12.000 € | 24.000,00 € | 48.000,00 € | 96.000,00 € | 192.000,00 € | 384.000,00 € | 768.000,00 € |
| 4 | Zinssatz | p% = | 0,80 % | 0,80 % | 0,80 % | 0,80 % | 0,80 % | 0,80 % | 0,80 % | 0,80 % | 0,80 % |
| 5 | Anzahl Jahre | n = | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | Zinsfaktor | q = | 1,008 | 1,008 | 1,008 | 1,008 | 1,008 | 1,008 | 1,008 | 1,008 | 1,008 |
| 7 | Endkapital | Kn = | 3.121,94 € | 6.243,87 € | 12.488 € | 24.975,48 € | 49.950,97 € | 99.901,93 € | 199.803,87 € | 399.607,73 € | 799.215,47 € |



ACHTUNG: Sie arbeiten mit der Manuskriptfassung der Lösungen. Sie enthalten möglicherweise Fehler.
Gern können Sie Rückmeldungen an die folgende email-Adresse senden: SchnittpunktBW@klett.de
Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

**4** Das mögliche Vorgehen kann in den Teilaufgaben a) und b) jeweils auf dem Excelblatt verfolgt werden.
In Wirklichkeit ist aber eine Spalte ausreichend (vgl. Teilaufgabe c)): man trägt das Anfangskapital und den Zinsfaktor in die Spalte C ein, schreibt die Formel zur Berechnung des Endkapitals in C7 für ein bestimmtes n und verändert dann die Anzahl der Jahre solange, bis man in C7 das in der Aufgabenstellung angegebene Kapital $K_n$ erhalten hat.

a) Die Anlagedauer beträgt 9 Jahre.

E7 fx = E3*E6^E5

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Berechnung des Zeitraums: | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | Anfangskapital | K0 = | 12.000,00 € | 12.000,00 € | 12.000,00 € |
| 4 | Zinssatz | p% = | 0,08 % | 0,08 % | 0,08 % |
| 5 | Anzahl Jahre | n = | 5 | 8 | 9 |
| 6 | Zinsfaktor | q = | 1,008 | 1,008 | 1,008 |
| 7 | Endkapital | Kn = | 12.487,74 € | 12.789,85 € | 12.892,17 € |

b) Die Anlagedauer beträgt 7 Jahre.

D7 fx = D3*D6^D5

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Berechnung des Zeitraums: | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | Anfangskapital | K0 = | 15.250,00 € | 15.250,00 € |
| 4 | Zinssatz | p% = | 1,30 % | 1,30 % |
| 5 | Anzahl Jahre | n = | 8 | 7 |
| 6 | Zinsfaktor | q = | 1,013 | 1,013 |
| 7 | Endkapital | Kn = | 16.910,07 € | 16.693,06 € |

c) Die Anlagedauer beträgt 10 Jahre.

C7 fx = C3*C6^C5

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Berechnung des Zeitraums: | | |
| 2 | | | |
| 3 | Anfangskapital | K0 = | 50.000,00 € |
| 4 | Zinssatz | p% = | 0,75 % |
| 5 | Anzahl Jahre | n = | 10 |
| 6 | Zinsfaktor | q = | 1,0075 |
| 7 | Endkapital | Kn = | 53.879,13 € |

## 3 Exponentielles Wachstum. Exponentielle Abnahme Seiten 92, 93

### Seite 92

**Einstieg**

→ $p\,\% = 3{,}5\,\%$, also $q = 1{,}035$
Bestand nach einem Jahr:
$50\,000 \cdot 1{,}035 = 51\,750$
Der Bestand wird nach einem Jahr voraussichtlich auf 51 750 fm angewachsen sein.

→ Bestand nach 2 Jahren:
$(50\,000 \cdot 1{,}035) \cdot 1{,}035$
$= 50\,000 \cdot 1{,}035^2$
$= 53\,561{,}25$ fm
Bestand nach 3 Jahren:
$(50\,000 \cdot 1{,}035^2) \cdot 1{,}035$
$= 50\,000 \cdot 1{,}035^3$
$\approx 55\,435{,}89$ fm
Bestand nach 5 Jahren:
$((50\,000 \cdot 1{,}035^3) \cdot 1{,}035) \cdot 1{,}035$
$= 50\,000 \cdot 1{,}035^5$
$\approx 59\,384{,}32$ fm
Bestand nach 8 Jahren:
$50\,000 \cdot 1{,}035^8$
$\approx 65\,840{,}45$ fm
Bestand nach 15 Jahren:
$50\,000 \cdot 1{,}035^{15}$
$\approx 83\,767{,}44$ fm
Nach n Jahren wird der Bestand durch die Formel $50\,000 \cdot 1{,}035^n$ gegeben.

### Seite 93

**1**

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| $G_0$ | 150 mg | 230 mg | 8300 fm |
| p % | 9 % | 15 % | 4 % |
| n | 8 | 4 | 4 |
| q | 1,09 | 1,15 | 1,04 |
| $G_n$ | 298,9 mg | 402,3 mg | 9592,8 fm |

| | d) | e) | f) |
|---|---|---|---|
| $G_0$ | 15 000 fm | 20 000 € | 20 000 € |
| p % | 3,5 % | 7,5 % | 7,5 % |
| n | 5 | 8 | 12 |
| q | 1,035 | 1,075 | 1,075 |
| $G_n$ | 17 815,3 fm | 35 669,56 € | 47 635,59 € |

Die Berechnungen zu $G_n$ lauten jeweils:
a) $n = 8;\ q = 1{,}09$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$G_8 = 150 \cdot 1{,}09^8 = 298{,}9$
b) $n = 4;\ q = 1{,}15$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$G_4 = 230 \cdot 1{,}15^4 = 402{,}3$
c) $n = 4;\ q = 1{,}04$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$G_4 = 8200 \cdot 1{,}04^4 = 9592{,}8$
d) $n = 5;\ q = 1{,}035$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$G_5 = 15\,000 \cdot 1{,}035^5 = 17\,815{,}3$
e) $n = 8;\ q = 1{,}075$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$G_8 = 20\,000 \cdot 1{,}075^8 = 35\,669{,}56$

f) $n = 12$; $q = 1{,}075$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$G_{12} = 20\,000 \cdot 1{,}075^8 = 47\,635{,}59$

**2**

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| $G_0$ | 350 mg | 350 mg | 350 mg |
| p% | 5% | 5% | 5% |
| n | 7 | 20 | 45 |
| q | 0,95 | 0,95 | 0,95 |
| $G_n$ | 244,42 mg | 125,47 mg | 34,80 mg |

| | d) | e) | f) |
|---|---|---|---|
| $G_0$ | 1200 Bakt. | 1200 Bakt. | 1200 Bakt. |
| p% | 6% | 12% | 18% |
| n | 15 | 15 | 15 |
| q | 0,94 | 0,88 | 0,82 |
| $G_n$ | 474 Bakt. | 176 Bakt. | 61 Bakt. |

Die Berechnungen zu $G_n$ lauten jeweils:
a) $n = 7$; $q = 0{,}95$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$G_7 = 350 \cdot 0{,}95^7 = 244{,}42$
b) $n = 20$; $q = 0{,}95$
$G_{20} = 350 \cdot 0{,}95^{20} = 125{,}47$
c) $n = 45$; $q = 0{,}95$
$G_{45} = 350 \cdot 0{,}95^{45} = 34{,}80$
d) $n = 15$; $q = 0{,}94$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$G_{15} = 1200 \cdot 0{,}94^{15} = 474{,}35 \approx 474$
e) $n = 15$; $q = 0{,}88$
$G_{15} = 1200 \cdot 0{,}88^{15} = 176{,}37 \approx 176$
f) $n = 15$; $q = 0{,}82$
$G_{15} = 1200 \cdot 0{,}82^{15} = 61{,}15 \approx 61$

**3** a) Camembert:
$G_0 = 96{,}3\,t$; $n = 5$; $p\,\% = 3\,\%$
Gesucht: q und $G_5$
$q = 1{,}03$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$G_5 = 96{,}3 \cdot 1{,}03^5 = 111{,}6$
Gouda:
$G_0 = 112{,}8\,t$; $n = 5$; $p\,\% = 3\,\%$
Gesucht: q und $G_5$
$q = 1{,}03$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$G_5 = 112{,}8 \cdot 1{,}03^5 = 130{,}8$
In 5 Jahren wird die Käserei 11,6 t Camembert und 130,8 t Gouda jährlich verkaufen können.

b) $G_0 = 80\,t$; $n = 3$; $p\,\% = 6\,\%$
Gesucht: q und $G_3$
$q = 0{,}94$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$G_3 = 80 \cdot 0{,}94^3 = 66{,}45$
In 3 Jahren wird die Käserei voraussichtlich nur noch 66,45 t Edamer herstellen.

**A** a) $q = 1{,}03$
$G_{10} = 2000 \cdot 1{,}03^{10}$
$G_{10} = 2687{,}8$
b) $q = 1{,}12$
$G_8 = 5000 \cdot 1{,}12^8$
$G_8 = 12\,379{,}8$
c) $q = 1{,}15$
$G_{12} = 400 \cdot 1{,}15^{12}$
$G_{12} = 2140{,}1$
d) $q = 1{,}202$
$G_{15} = 850 \cdot 1{,}202^{15}$
$G_{15} = 13\,427{,}2$

**B** a) $q = 0{,}96$
$G_6 = 750 \cdot 0{,}96^6$
$G_6 = 587{,}1$
b) $q = 0{,}92$
$G_4 = 1200 \cdot 0{,}92^4$
$G_4 = 859{,}7$
c) $q = 0{,}935$
$G_5 = 14\,000 \cdot 0{,}935^5$
$G_5 = 10\,004{,}3$
d) $q = 0{,}9675$
$G_9 = 200\,000 \cdot 0{,}9675^9$
$G_9 = 148\,555{,}5$

**C** $q = 1{,}2$; $G_0 = 70$
$G_n = 70 \cdot 1{,}2^n$
Nach 3 Tagen sind 121 g Algen vorhanden.
Nach 5 Tagen sind 174,2 g Algen vorhanden.
Nach 8 Tagen sind 301,0 g Algen vorhanden.
Nach 30 Tagen sind 16 616,3 g Algen vorhanden.

**Seite 93, links**

**4** a) $q = 1 + \frac{p}{100}$
$q = 1 + \frac{15{,}3}{100}$
$q = 1{,}153$
b) $q = 1 - \frac{p}{100}$
$q = 1 - \frac{13{,}5}{100}$
$q = 0{,}865$
c) $q = 1 + p\,\%$
$1{,}08 = 1 + p\,\%$
$0{,}08 = p\,\%$
$p\,\% = 8\,\%$
d) $q = 1 + p\,\%$
$0{,}85 = 1 + p\,\%$
$-0{,}15 = p\,\%$
$p\,\% = -15\,\%$

**5** $G_0 = 1000$ Blattläuse
Abnahme um $p\,\% = 35\,\%$; also $q = 0{,}65$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
Anzahl Blattläuse
- nach 2 Tagen:
  $G_2 = 1000 \cdot 0{,}65^2 = 422{,}5 \approx 422$
- nach 4 Tagen:
  $G_4 = 1000 \cdot 0{,}65^4 = 178{,}5 \approx 179$
- nach 7 Tagen:
  $G_7 = 1000 \cdot 0{,}65^7 = 49{,}0 \approx 49$
- nach 12 Tagen:
  $G_{12} = 1000 \cdot 0{,}65^{12} = 5{,}7 \approx 6$

Nach 2 Tagen sind etwa 422 Blattläuse vorhanden; nach 4 Tagen 179, nach 7 Tagen 49 und nach 12 Tagen noch 6.


Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

**Seite 93, rechts**

4 a) Das Jahr 2018 kann als das 2. Jahr nach Beginn der Abnahme betrachtet werden; es gilt also $G_2 = 4467{,}375$.
$p\,\% = 5\,\%$, also $q = 0{,}95$.
Gesucht ist $G_0$.
$G_2 = G_0 \cdot q^2$
$4467{,}375 = G_0 \cdot 0{,}95^2 \quad |:0{,}95^2$
$G_0 = \frac{4467{,}375}{0{,}95^2}$
$G_0 = 4950\,\text{kWh}$
Im Jahr 2016 hat die Familie 4950 kWh Strom verbraucht.
b) Bei dieser Rechnung geht man vom Jahr 2018 als Beginn der Abnahme aus (denn der Wachstumsfaktor soll sich nun ändern).
$G_0 = 4950\,\text{kWh}$; $G_1 = 4200\,\text{kWh}$
Gesucht ist q′
$G_1 = G_0 \cdot q'$
$4200 = 4950 \cdot q' \quad |:4950$
$q' = \frac{4200}{4950} = 0{,}940$
Man erhält also $p\,\% = -6\,\%$
Familie Klein muss im Jahr 2019 ihren Stromverbrauch um 6 % im Vergleich zum Jahr davor reduzieren.

3 Exponentielles Wachstum. Exponentielle Abnahme
Seite 94

**Seite 94, links**

6
- Maja hat den Wachstumsfaktor q falsch berechnet. Statt $q = 1{,}3$ lautet dieser $q = 1{,}03$. Da q so groß gewählt wurde (dieses q würde einem Wachstum von 30 % entsprechen), hat man für die Bakterienzahl nach 7 Stunden eine sehr große Zahl erhalten.
- Finja hat den richtigen Wachstumsfaktor verwendet und die Rechnung richtig ausgeführt. Beim Ergebnis hat sie aber einen Fehler gemacht: in der letzten Zeile hat sie $G_{10}$ statt $G_7$ geschrieben; auch die Anzahl der Bakterien sollte man lieber als ganze Zahl angeben, also: $G_7 = 615$.
- Enya hat mit $q = 0{,}97$ statt $q = 1{,}03$ gerechnet; also mit einer Abnahme statt einer Zunahme gerechnet. Die Anzahl der Bakterien ist dadurch kleiner als die ursprünglich angegebene.

7 a) $G_0 = 564\,\text{m}^3$; Abnahme um $p\,\% = 1{,}77\,\%$
$q = 0{,}9823$
gesucht: $G_3$
$G_3 = G_0 \cdot q^3$
$G_3 = 564 \cdot 0{,}9823^3 = 534{,}6$
Der Wasserverbrauch würde nach 3 Jahren $534{,}6\,\text{m}^3$ betragen.
b) Verbrauch im Vorjahr:
$G_1 = 150\,604\,\text{kWh}$;
Abnahme um $p\,\% = 12{,}0\,\%$; also $q = 0{,}88$
gesucht: $G_0$
$G_1 = G_0 \cdot q$
$150\,604 = G_0 \cdot 0{,}88 \quad |:0{,}88$
$G_0 = \frac{150\,604}{0{,}88} = 171\,140{,}9$
Der Verbrauch im Vorjahr betrug 171 140,9 kWh.
Verbrauch nach weiteren 4 Jahren:
$G_0 = 171\,140{,}9\,\text{kWh}$; $q = 0{,}88$
gesucht: $G_4$
$G_4 = G_0 \cdot q^4$
$G_4 = 171\,140{,}9 \cdot 0{,}88^4 = 102\,632{,}4$
Der Stromverbrauch würde 102 632,4 kWh betragen.
c) $G_0 = 27\,407\,\text{kWh}$; $G_2 = 24\,489\,\text{kWh}$
Gesucht: q; $G_3$
$G_2 = G_0 \cdot q^2$
$24\,489 = 27\,407 \cdot q^2 \quad |:27\,407$
$q^2 = \frac{24\,489}{27\,407} \quad |\sqrt{\ }$
$q = \sqrt{\frac{24\,489}{27\,407}} = 0{,}9364$
$G_3 = G_0 \cdot q^3$
$G_3 = 27\,407 \cdot 0{,}9364^3$
$G_3 = 22\,130$
Der Wachstumsfaktor liegt bei $q = 0{,}9364$. Bei gleichbleibender Abnahme würden im 3. Jahr noch 22 130 kWh Heizenergie verbraucht.
d) Individuelle Ergebnisse
Mögliche Argumente: Dass der Wachstumsfaktor über mehrere Jahre hinweg gleichbleibt, ist unwahrscheinlich. Wahrscheinlicher ist, dass während des Projektes die größten Einsparpotenziale erkannt werden und dass in den Folgejahren nur noch kleinere Verbesserungen stattfinden, bis sich ein niedrigeres Verbrauchsniveau eingependelt hat.

**Seite 94, rechts**

5 a) $G_0 = 2$ Schülerinnen; $n = 15$
$p\,\% = 20\,\%$, also $q = 1{,}2$
gesucht: $G_{15}$
$G_{15} = G_0 \cdot q^{15}$
$G_{15} = 2 \cdot 1{,}2^{15} = 30{,}8$
Nach 15 Minuten kennen das Gerücht etwa 31 Personen.

b) $G_0 = 31$ Schülerinnen und Schüler;
$n = 45$; $p\,\% = 5\,\%$, also $q = 1{,}05$
gesucht: $G_{45}$
$G_{45} = G_0 \cdot q^{45}$
$G_{45} = 31 \cdot 1{,}05^{45} = 278{,}5$
Nach weiteren 45 Minuten können nur maximal 279 Schüler informiert sein.
c) Individuelle Lösungen
In der Diskussion kann unter anderem darüber gesprochen werden, welches die Voraussetzungen für das Rechnen mit dem jeweiligen Wachstumsfaktor sind.
Zunächst einmal geht man davon aus, dass es keine Überschneidungen gibt, d.h. dass eine Schülerin oder ein Schüler, die einmal das Gerücht gehört haben, nicht nochmal von jemand anders informiert wird.
Bei der Verbreitung während des Unterrichts setzt man außerdem voraus, dass die Schülerinnen und Schüler, die das Gerücht kennen, innerhalb der verschiedenen Klassen gleichmäßig verteilt sind.

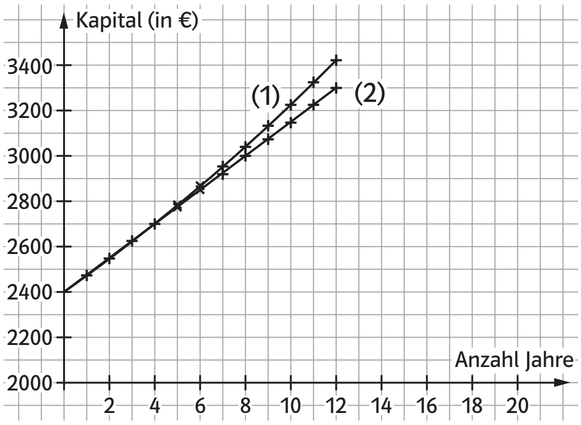
**6** a) Vorschlag (1)
$K_0 = 2400\,€$; $p\,\% = 2{,}5\,\%$

| Jahr | Gehalt in € |
|---|---|
| 1 | $G_1 = 2400 \cdot 1{,}03 = 2472{,}00$ |
| 2 | $G_2 = 2400 \cdot 1{,}03^2 = 2546{,}16$ |
| 3 | $G_3 = 2400 \cdot 1{,}03^3 = 2622{,}54$ |
| 4 | $G_4 = 2400 \cdot 1{,}03^4 = 2701{,}22$ |
| 5 | $G_5 = 2400 \cdot 1{,}03^5 = 2782{,}26$ |
| 6 | $G_6 = 2400 \cdot 1{,}03^6 = 2865{,}73$ |
| 7 | $G_7 = 2400 \cdot 1{,}03^7 = 2951{,}70$ |
| 8 | $G_8 = 2400 \cdot 1{,}03^8 = 3040{,}25$ |
| 9 | $G_9 = 2400 \cdot 1{,}03^9 = 3131{,}46$ |
| 10 | $G_{10} = 2400 \cdot 1{,}03^{10} = 3225{,}40$ |

Vorschlag (2)
$K_0 = 2400\,€$;
Wachstum: pro Jahr kommen 75 € dazu

| Jahr | Gehalt in € |
|---|---|
| 1 | $G_1 = 2400 + 75 = 2475$ |
| 2 | $G_2 = 2400 + 2 \cdot 75 = 2550{,}00$ |
| 3 | $G_3 = 2400 + 3 \cdot 75 = 2625{,}00$ |
| 4 | $G_4 = 2400 + 4 \cdot 75 = 2700{,}00$ |
| 5 | $G_5 = 2400 + 5 \cdot 75 = 2775{,}00$ |
| 6 | $G_6 = 2400 + 6 \cdot 75 = 2850{,}00$ |
| 7 | $G_7 = 2400 + 7 \cdot 75 = 2925{,}00$ |
| 8 | $G_8 = 2400 + 8 \cdot 75 = 3000{,}00$ |
| 9 | $G_9 = 2400 + 9 \cdot 75 = 3075{,}00$ |
| 10 | $G_{10} = 2400 + 10 \cdot 75 = 3150{,}00$ |

b) z.B. Liniendiagramm




c) Wie Herr Schwalbe sich entscheidet, hängt davon ab, ob er vorhat, langfristig bei der Firma zu bleiben. In den ersten drei Jahren wäre sein Gehalt bei Vorschlag (2) etwas höher, in allen folgenden Jahren wäre das Gehalt bei Vorschlag (1) höher – je länger er bleibt, desto deutlicher wird der Unterschied.

**7** a) Man geht davon aus, dass zu Beginn alle Lehrer und alle Schüler gesund sind. Vorausgesetzt wird ebenfalls, dass die Ansteckung gleichmäßig unter den Lehrern und den Schülern voranschreitet. Daher betrachtet man für diese Frage nur die Gruppe der Lehrerinnen und Lehrer.
$G_0 = 60$; $p\,\% = 15\,\%$
Wachstumsfaktor, der angibt, wie viele pro Woche gesund bleiben: $q = 0{,}85$
Gesucht ist $G_3$.
$G_3 = G_0 \cdot q^3$
$G_3 = 60 \cdot 0{,}85^3 = 36{,}85 \approx 37$
Nach drei Wochen sind noch 37 der Lehrkräfte gesund.
Die Wahrscheinlichkeit, dass Lehrerin Molsen erkrankt, beträgt:
$\frac{60-37}{60} \approx 0{,}383 = 38{,}3\,\%$.
b) $G_0 = 700$; $p\,\% = 15\,\%$, also $q = 0{,}85$
$G_3 = G_0 \cdot q^3$
$G_3 = 700 \cdot 0{,}85^3 = 429{,}89 \approx 430$
Nach drei Wochen sind noch 430 Schülerinnen und Schüler gesund.
Die Wahrscheinlichkeit, dass Jonte aus der Klasse 10 a erkrankt, beträgt:
$\frac{700-430}{700} \approx 0{,}386 = 38{,}6\,\%$.
c) Es wird vorausgesetzt, dass 35 % aus der Gruppe der Schülerinnen und Schüler wie auch 35 % aus der Gruppe der Lehrkräfte geschützt sind.

Zu a): $35\,\% \cdot 60 = 0{,}35 \cdot 60 = 21$
21 Lehrkräfte bleiben auf jeden Fall gesund.
D.h. die Grippe kann sich unter den restlichen $60 - 21 = 39$ ausbreiten. (Dabei geht man davon aus, dass der Prozentsatz der Ansteckungen gleich bleibt.)
$G_0' = 39$; $q = 0{,}85$
$G_3' = 39 \cdot 0{,}85^3 = 23{,}95 \approx 24$
Nach 3 Wochen sind $24 + 21 = 45$ der Lehrkräfte gesund.
Die Wahrscheinlichkeit, dass Lehrerin Molsen erkrankt, beträgt:
$\frac{60-45}{60} \approx 0{,}25 = 25\,\%$.
Zu b): $35\,\% \cdot 700 = 0{,}35 \cdot 700 = 245$
245 Schülerinnen und Schüler bleiben auf jeden Fall gesund. Die Grippe breitet sich unter den restlichen $700 - 245 = 455$ aus.
$G_0' = 455$; $q = 0{,}85$
$G_3' = 455 \cdot 0{,}85^3 = 279{,}4 \approx 280$
Nach 3 Wochen sind $245 + 280 = 525$ Schülerinnen und Schüler gesund.
Die Wahrscheinlichkeit, dass Jonte erkrankt, beträgt:
$\frac{700-525}{700} \approx 0{,}25 = 25\,\%$.

## 4 Exponentialgleichung: Logarithmus Seite 95

### Seite 95

**Einstieg**
→ Die Bank verspricht, das Geld zu verdoppeln, bei einem Zinssatz von 1,5 %. Der Zeitraum wird nicht benannt.
→ Individuelle Lösungen
Das Kapital von 5000 € hat sich nach 47 Jahren verdoppelt.
→ Gegeben sind:
$K_0 = 5000$; $K_n = 10\,000$; $p\,\% = 1{,}5\,\%$
Man muss die Gleichung lösen:
$10\,000 = 5000 \cdot 1{,}015^n$ bzw.
$\frac{10\,000}{5000} = 1{,}015^n$ bzw. $1{,}015^n = 2$
→ Die Gleichung kann man mit den bisherigen Mitteln nicht lösen, weil sich die unbekannte Größe im Exponenten befindet.
→ Individuelle Lösungen
Das Angebot macht zu Beginn einen sehr ansprechenden Eindruck; in Wirklichkeit ist aber die Zeit, in der das Kapital verdoppelt wird, extrem lang.
Das Angebot dürfte daher für die Meisten nicht so ansprechend sein.

### Seite 96

**1** a) $x = \log_5(25)$
$5^x = 25$
Lösung: $x = 2$
b) $x = \log_{11}(121)$
$11^x = 121$
Lösung: $x = 2$
c) $x = \log_2(0{,}25)$
$2^x = 0{,}25$
Lösung: $x = -2$
d) $x = \log_2(256)$
$2^x = 256$
Lösung: $x = 8$

**2** a) $2^x = 32$
$x = 5$
$x = \log_2(32)$
b) $8^x = 64$
$x = 2$
$x = \log_8(64)$
c) $3^x = 243$
$x = 5$
$x = \log_3(243)$
d) $5^x = 625$
$x = 4$
$x = \log_5(625)$

**3** a) $x = \log_2(65\,536)$
$x = \frac{\log(65\,536)}{\log(2)} = 16$
b) $x = \log_7(2401)$
$x = \frac{\log(2401)}{\log(7)} = 4$
c) $x = \log_{12}(20\,736)$
$x = 4$
d) $x = \log_3(19\,683)$
$x = 9$
e) $x = \log_3(6561)$
$x = 8$
f) $x = \log_4(4096)$
$x = 6$
g) $x = \log_4(4\,194\,304)$
$x = 11$
h) $x = \log_{4,5}(410\,0625)$
$x = 4$

**4** $K_0 = 8600\,€$; $p\,\% = 0{,}95\,\%$; $K_n = 9000\,€$
$q = 1{,}0095$
$K_n = K_0 \cdot q^n$
$9000 = 8600 \cdot 1{,}0095^n \quad |:8600$
$1{,}0095^n = \frac{9000}{8600}$
$n = \log_{1{,}0095}\left(\frac{9000}{8600}\right)$
$n = 4{,}808\ldots$
Das Kapital ist nach 5 Jahren auf mehr als 9000 € angewachsen.

**A** a) $\sqrt[x]{256} = 16$
$x = \log_{16}(256)$
$x = 2$
b) $19^x = 361$
$\sqrt[x]{361} = 19$
$x = 2$
c) $2^x = 1024$
$\sqrt[x]{1024} = 2$
$x = 10$
d) $\sqrt[x]{729} = 3$
$x = \log_3(729)$
$x = 6$
e) $\sqrt[x]{1024} = 4$
$x = \log_4(1024)$
$x = 5$

**B** a) $x = 25$ b) $x = 8$ c) $x = 5$ d) $x = 3$

### Seite 96, links

**5** a) $\log_5(25) = 1{,}861$
b) $\log_{12}(350) = 2{,}357$
c) $\log_6(0{,}8) = -0{,}125$
d) $\log_{12}(0{,}5) = -0{,}279$

ACHTUNG: Sie arbeiten mit der Manuskriptfassung der Lösungen. Sie enthalten möglicherweise Fehler.
Gern können Sie Rückmeldungen an die folgende email-Adresse senden: SchnittpunktBW@klett.de
Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

**6**

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| $K_0$ | 8000,00 € | 6500,00 € | 5000,00 € |
| $K_n$ | 8391,76 € | 6730,71 € | 5701,43 € |
| p % | 0,8 % | 0,7 % | 1,1 % |
| n | **6** | **5** | **12** |

Rechnungen:

a) $q = 1{,}008$

$q^n = \frac{K_n}{K_0}$

$1{,}008^n = \frac{8391{,}76}{8000{,}00}$

$n = \log_{1{,}008}\left(\frac{8391{,}76}{8000{,}00}\right)$

$n = 5{,}999\ldots$

b) $q = 1{,}007$

$q^n = \frac{K_n}{K_0}$

$1{,}007^n = \frac{6730{,}71}{6500{,}00}$

$n = \log_{1{,}007}\left(\frac{6730{,}71}{6500{,}00}\right)$

$n = 5{,}000\ldots$

c) $q = 1{,}011$

$q^n = \frac{K_n}{K_0}$

$1{,}011^n = \frac{5701{,}43}{5000{,}00}$

$n = \log_{1{,}011}\left(\frac{5701{,}43}{5000{,}00}\right)$

$n = 11\,999\ldots$

**7** Man berechnet, nach wie vielen Tagen noch rund 250 der Blumen blühen.
Es verblühen täglich 30 % der Blumen, also 70 % der Blumen blühen pro Tag weiterhin.

$G_0 = 1500;\ G_n = 250;\ p\,\% = 70\,\% \Rightarrow q = 0{,}7$

$250 = 1500 \cdot 0{,}7^n$

$0{,}7^n = \frac{250}{1500}$

$n = \log_{0{,}7}\left(\frac{250}{1500}\right)$

$n = 5{,}023\ldots$

Nach 5 Tagen blühen noch rund 250 Blumen.

**Seite 96, rechts**

**5** a) $80 \cdot 1{,}5^x = 1{,}25 \quad |:80$

$1{,}5^x = 0{,}016\,25$

$x = \log_{1{,}5}(0{,}016\,25)$

$x = -10\,257$

b) $7 \cdot 3{,}5^x - 0{,}125 = 300 + 0{,}125$

$7 \cdot 3{,}5^x = 300\,125 \quad |:7$

$3{,}5^x = 42\,875$

$x = \log_{3{,}5}(42\,875)$

$x = 3$

c) $30 = 5 \cdot (4^x - 2)$

$30 = 5 \cdot 4^x - 10 \quad |+10$

$40 = 5 \cdot 4^x \quad |:5$

$8 = 4^x$

$x = \log_4(8)$

$x = 1{,}5$

**6** Man berechnet, nach wie vielen Minuten vom Zeitpunkt $t = 0$ (09.00 Uhr) die Anzahl der Salmonellen die Zahl 100 000 überschritten hat.

$G_0 = 100$ Salmonellen;
$G_n = 100\,000$ Salmonellen; $p\,\% = 3{,}5\,\%$

$q = 1{,}035$

$G_n = G_0 \cdot q^n$

$100\,000 = 100 \cdot 1{,}035^n \quad |:100$

$1000 = 1{,}035^n$

$n = \log_{1{,}035}(1000)$

$n = 200{,}90$

Nach etwa 201 Minuten beträgt also die Anzahl der Salmonellen 100 000.
201 min = 3 h 21 min
Ab 12 Uhr sollte man demnach die Eierspeise nicht mehr essen.

**7** Man berechnet, nach wie vielen Stunden die Konzentration des Medikaments im Blut weniger als 100 ml beträgt.
Alle 12 Stunden werden 25 % des Medikaments abgebaut, es bleiben also jeweils 75 % übrig.

$G_0 = 500$ ml; $G_n = 100$ ml; $p\,\% = 75\,\%$

$q = 0{,}75$

$G_n = G_0 \cdot q^n$

$100 = 500 \cdot 0{,}75^n \quad |:500$

$\frac{1}{5} = 0{,}75^n$

$n = \log_{0{,}75}\left(\frac{1}{5}\right)$

$n = 5{,}59\ldots$

5,59 Stunden = 5 h 35,4 min
Nach etwa 5 Stunden 35 Minuten beträgt der Wirkstoffgehalt ca. 100 ml. Michel sollte also nach etwa 5 h 35 min wieder eine Infusion erhalten.

## EXTRA: Verdoppelungszeit und Halbwertszeit Seite 97

**Seite 97**

**1** a) Anzahl der Verdopplungszeiten:

$n = \frac{3\text{ Stunden}}{20\text{ Minuten}} = \frac{180\text{ Minuten}}{20\text{ Minuten}} = 9$

$G_0 = 50$ Bakterien; $q = 2$

$G_n = G_0 \cdot q^n$

$G_9 = 50 \cdot 2^9 = 25\,600$

Nach 3 Stunden sind 25 600 Bakterien vorhanden.

b) $G_0 = 50$ Bakterien;
$G_n = 10\,000\,000$ Bakterien

$G_n = G_0 \cdot q^n$

$10\,000\,000 = 50 \cdot 2^n \quad |:50$

$200\,000 = 2^n$

$n = \log_2(200\,000)$

$n = 17{,}6096\ldots$

$n \approx 17{,}61$

Das Ergebnis gibt die Anzahl der Verdopplungszeiten $T_2$ an, nach denen die Bakterienzahl auf 10 000 000 gewachsen ist.
Berechnung der Zeitstunden:
$1\,h = 3 \cdot 20\,min = 3$ Verdopplungszeiten $T_2$
$17{,}61 : 3 = 5{,}87$
$5{,}87\,h = 5\,h\ 52{,}2\,min$
Nach etwa 5 h 52 min sind mehr als 10 000 000 Bakterien vorhanden.

**2** a) Anzahl der Verdoppelungszeiten:
$n = \frac{\text{5 Stunden 30 Minuten}}{\text{30 Minuten}} = \frac{\text{330 Minuten}}{\text{30 Minuten}} = 11$
$G_0 = 50$ Bakterien; $q = 2$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$G_{11} = 50 \cdot 2^{11} = 102\,400$
Nach 5 Stunden 30 Minuten sind 102 400 Cholerabakterien vorhanden.
b) Anzahl der Verdoppelungszeiten:
$n = \frac{\text{7 Stunden}}{\text{30 Minuten}} = \frac{\text{420 Minuten}}{\text{30 Minuten}} = 14$
$G_{14} = 409\,600$ Cholerabakterien
Gesucht ist $G_0$.
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$409\,600 = G_0 \cdot 2^{14}$
$G_0 = \frac{409\,600}{2^{14}} = 25$
Bei Versuchsbeginn waren 25 Cholerabakterien vorhanden.
c) Mithilfe der Gleichung $G_n = G_0 \cdot 2^n$ wird die Anzahl der Verdopplungszeiten $T_2$ bestimmt; da $T_2 = 30\,min$ gilt, kann man anschließend die Anzahl der Minuten berechnen.
$G_0 = 30$ Bakterien; $G_n = 7680$ Bakterien
$G_n = G_0 \cdot 2^n$
$7680 = 30 \cdot 2^n \quad | : 30$
$256 = 2^n$
$n = \log_2(256)$
$n = 8$
$\rightarrow$ 8 Verdopplungszeiten $= 8 \cdot 30\,min = 240\,min$
Der Versuch endet nach 240 Minuten.

**3** a) Anzahl der Halbwertszeiten:
$n = \frac{\text{30 Tage}}{\text{8 Tage}} = 3{,}75$
$G_0 = 800\,mg$ Jod; $q = 0{,}5$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$G_{3{,}75} = 800 \cdot 0{,}5^{3{,}75} = 59{,}46$
Nach 30 Tagen sind noch etwa 59,5 mg radioaktives Jod vorhanden.
Tipp: Eine andere Möglichkeit mit dieser Fragestellung umzugehen, besteht darin, den Wachstumsfaktor q zu bestimmen, der den täglichen Zerfall angibt (dann hat man mit ganzzahligen Exponenten zu tun).
Da die Halbwertszeit 8 Tage beträgt, muss für den täglichen Zerfallsfaktor q die Gleichung $q^8 = 0{,}5$ gelten (nach 8 Tagen halbiert sich der Bestand).
Daraus erhält man:
$q = \sqrt[8]{0{,}5}$ bzw. $q = 0{,}5^{\frac{1}{8}}$.
Nun kann man mit Tagen rechnen:
$G_{30} = 800 \cdot \left(\sqrt[8]{0{,}5}\right)^{30} = 59{,}46$.
b) Mithilfe der Gleichung $G_n = G_0 \cdot 0{,}5^n$ wird die Anzahl der Halbwertszeiten $T_{\frac{1}{2}}$ bestimmt; da $T_{\frac{1}{2}} = 25\,min$ gilt, kann man anschließend die Anzahl der Minuten berechnen.
$G_0 = 30\,mg$; $G_n = 2\,mg$
$G_n = G_0 \cdot 0{,}5^n$
$2 = 30 \cdot 0{,}5^n \quad | : 30$
$\frac{1}{15} = 0{,}5^n$
$n = \log_{0{,}5}\left(\frac{1}{15}\right)$
$n = 3{,}91$
$\rightarrow$ 3,91 Halbwertzeiten $= 3{,}91 \cdot 25\,min = 97{,}75\,min$
Es dauert etwa 97 Minuten 45 Sekunden.

**4** a) physikalische Halbwertzeit: 6 Stunden
Anzahl der Halbwertszeiten:
$n = \frac{\text{1 Tag}}{\text{6 Stunden}} = \frac{\text{24 Stunden}}{\text{6 Stunden}} = 4$
$G_0 = 100\,\%$; $q = 0{,}5$
gesucht: $G_4$
$G_4 = 100\,\% \cdot 0{,}5^4$
$G_4 = 100\,\% \cdot 0{,}625 = 6{,}25\,\%$
Nach einem Tag sind noch 6,25 % einer Laborprobe vorhanden.
b) Halbwertzeit im Körper: 2,5 Stunden
Anzahl der Halbwertszeiten:
$n = \frac{\text{1 Tag}}{\text{2,5 Stunden}} = \frac{\text{24 Stunden}}{\text{2,5 Stunden}} = 9{,}6$
$G_0 = 100\,\%$; $q = 0{,}5$
gesucht: $G_{9{,}6}$
$G_{9{,}6} = 100\,\% \cdot 0{,}5^{9{,}6} \approx 0{,}13\,\%$
Nach einem Tag sind noch etwa 0,13 % Tc99m im Körper vorhanden.

## Basistraining Seite 99

### Seite 99

**1**

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| $K_0$ | 6000 € | 4800 € | **2130 €** |
| p % | 2 % | **1,2 %** | 9,0 % |
| t | 90 Tage | 80 Tage | 24 Tage |
| Z | **30 €** | 12,80 € | 12,78 € |

Rechnungen:

a) $Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$Z = 6000 \cdot 2\% \cdot \frac{90}{360}$

$Z = 6000 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{90}{360} = 30$

b) $Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$12{,}80 = 4800 \cdot p\% \cdot \frac{80}{360}$

$p\% = \frac{12{,}80 \cdot 360}{4800 \cdot 80} = 0{,}012 = 1{,}2\%$

c) $Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$12{,}78 = K \cdot 0{,}09 \cdot \frac{24}{360}$

$K = \frac{12{,}78 \cdot 360}{0{,}09 \cdot 24} = 2130$

**2** $Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$

$36{,}75 = 5250 \cdot 0{,}12 \cdot \frac{t}{360}$

$t = \frac{36{,}75 \cdot 360}{5250 \cdot 0{,}12} = 21$

$t = 21$ Tage

**3** Die Einträge in der zweiten und in der vierten Spalte sind falsch. Richtig ist:
2. Spalte: $q = 1{,}35 \rightarrow p\% = 35\%$
4. Spalte: $p\% = 12\% \rightarrow q = 1{,}12$

**4** Um zu überprüfen, welches Kärtchen passt, kann man die Werte aus den Kärtchen in die Formel einsetzen und die entstandenen Zinsen berechnen.

- Kärtchen oben links:
  $p\% = 3{,}6\%$; $t = 65$ Tage
  $Z = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$
  $Z = 3500 \cdot 0{,}036 \cdot \frac{65}{360}$
  $Z = 22{,}75\,€ \rightarrow$ Das Kärtchen passt.
- Kärtchen oben rechts:
  $p\% = 11{,}8\%$; $t = 20$ Tage
  $Z = 3500 \cdot 0{,}117 \cdot \frac{20}{360}$
  $Z = 22{,}75 \rightarrow$ Das Kärtchen passt.
- Kärtchen unten links:
  $p\% = 11{,}8\%$; $t = 20$ Tage
  Dieses Kärtchen passt nicht. Das kann hier man ohne rechnerische Überprüfung entscheiden: ein Vergleich mit den Angaben auf dem Kärtchen oben rechts zeigt, dass die Anzahl der Tage gleich geblieben ist, der Zinssatz aber sich etwas unterschiedlich ist. Damit passen die Angaben nicht.
- Kärtchen unten rechts:
  $p\% = 12{,}5\%$; $t = 19$ Tage
  $Z = 3500 \cdot 0{,}125 \cdot \frac{19}{360}$
  $Z = 23{,}09\,€ \rightarrow$ Das Kärtchen passt nicht.

**5** a) $q = 0{,}02$ b) $q = 0{,}093$
c) $q = 0{,}1285$ d) $p\% = 12\%$
e) $p\% = 3\%$ f) $p\% = -6\%$

**6**

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| $K_0$ | 2400,00 € | 1825,00 € | 2500,00 € |
| p% | 1,1% | 1,8% | 2,2% |
| n | 6 Jahre | 3 Jahre | 4 Jahre |
| $K_n$ | **2562,82 €** | **1925,33 €** | **2727,37 €** |

Beispielrechnung zu a):
$q = 1{,}011$
$K_n = K_0 \cdot 1{,}011^n$
$K_6 = 2400 \cdot 1{,}011^6 = 2562{,}82\,€$

**7**

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| p% | 1,2% | 1,6% | 2,1% |
| n | 4 Jahre | 5 Jahre | 4 Jahre |
| $K_n$ | 6503,00 € | 4330,41 € | 9236,81 € |
| $K_0$ | **6200,00 €** | **4000,00 €** | **8500,00 €** |

Beispielrechnung zu a):
$q = 1{,}012$
$K_n = K_0 \cdot 1{,}011^n$
$6503{,}00 = K_0 \cdot 1{,}012^4 \quad |:1{,}012^4$
$K_0 = \frac{6503{,}00}{1{,}012^4} = 6200{,}00\,€$

**8**

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| $K_0$ | 830,00 € | 1500,00 € | 7500,00 € |
| n | 2 Jahre | 2 Jahre | 4 Jahre |
| $K_n$ | 850,04 € | 1639,95 € | 7773,67 € |
| p% | **1,2%** | **4,56%** | **0,9%** |

Beispielrechnung zu a):
Zinsfaktor q berechnen
$K_n = K_0 \cdot q^n$
$850{,}04 = 830{,}00 \cdot q^2$
$q^2 = \frac{850{,}04}{830{,}00}$
$q = \sqrt{\frac{850{,}04}{830{,}00}} = 1{,}0120$
Damit erhält man: $p\% = 1{,}2\%$

**9** $K_0 = 3000\,€$; $n = 11$ Jahre;
Endkapital $K_n = 3500\,€$
Zinsfaktor q berechnen
$K_n = K_0 \cdot q^n$
$3500 = 3000 \cdot q^{11}$
$q^{11} = \frac{3500}{3000}$
$q = \sqrt[11]{\frac{3500}{3000}} = 1{,}0141$
Damit erhält man: $p\% = 1{,}41\%$

Der Zinssatz muss also mindestens 1,41 % betragen, damit Mia zum 18. Geburtstag über 3500 € verfügen kann.

**10** Endkapital $K_n = 4134{,}83$ €;
$n = 7$ Jahre; $p\,\% = 1{,}6\,\%$ $\rightarrow$ $q = 1{,}016$
gesucht: $K_0$
$K_n = K_0 \cdot q^n$
$4134{,}83 = K_0 \cdot 1{,}016^7$
$$K_0 = \frac{4134{,}83}{1{,}016^7} = 3699{,}999\ldots$$
Clara hatte 3700,00 € angelegt.

**11** Zeitraum von 2004 bis 2017: $n = 13$ Jahre
Bestand am Ende: $G_n = 1860$ Tiere
$p\,\% = 1{,}213\,\%$; also $q = 1{,}01213$
gesucht: $G_0$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$1860 = G_0 \cdot 1{,}01213^{13}$
$$G_0 = \frac{1860}{1{,}01213^{13}} = 1590{,}16\ldots$$
2004 gab es etwa 1590 Pandas.

**12** a) Zeitraum von 1990 bis 2005: $n = 15$ Jahre
$G_0 = 4300$; $G_n = 6200$
gesucht: q
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$6200 = 4300 \cdot q^{15}$
$$q^{15} = \frac{6200}{4300}$$
$$q = \sqrt[15]{\frac{6200}{4300}} = 1{,}0247$$
Man erhält also: $p\,\% = 2{,}47\,\%$
Die Einwohnerzahl wuchs durchschnittlich um ca. 2,47 % jährlich.
b) Zeitraum von 1975 bis 1990: $n = 15$ Jahre
$G_n = 4300$; $p\,\% = 3{,}4\,\%$
gesucht: $G_0$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$4300 = G_0 \cdot 1{,}034^{15}$
$$G_0 = \frac{4300}{1{,}034^{15}} = 2604{,}11\ldots$$
1975 betrug die Einwohnerzahl der Stadt Niederkoog 2604.
c) Zeitraum von 2005 bis 2020: $n = 15$ Jahre
$G_0 = 6200$; Abnahme um $p\,\% = 0{,}8\,\%$
$q = 0{,}992$
gesucht: $G_n$
$G_n = G_0 \cdot q^n$
$G_{15} = 6200 \cdot 0{,}992^{15} = 5496{,}25\ldots$
Die Einwohnerzahl im Jahr 2020 beträgt etwa 5496.

## Anwenden. Nachdenken Seiten 100 – 101

**Seite 100**

**13** $K_0 = 175\,000$ €; $K_8 = 210\,000$ €
gesucht: p %
Zinsfaktor q berechnen
$K_n = K_0 \cdot q^n$
$210\,000 = 175\,000 \cdot q^8$
$$q^8 = \frac{210\,000}{175\,000} = 1{,}2$$
$$q = \sqrt[8]{1{,}2} = 1{,}023$$
Die Wertsteigerung entspricht einer Gesamtverzinsung von 20 % bzw. einem jährlichen Zinssatz von etwa 2,3 %.

**14** a) $K_0 = 5000$ €; $p\,\% = 2{,}2\,\%$; $n = 4$ Jahre
$q = 1{,}022$
$K_4 = 5000 \cdot 1{,}022^4 = 5454{,}73$
Herr Hirsch hat nach 4 Jahren 5454,73 € auf dem Konto.
b) $K_0 = 4000$ €; $K_5 = 5242{,}11$ €
gesucht: p %
Zinsfaktor q berechnen
$K_5 = K_0 \cdot q^5$
$5242{,}11 = 4000 \cdot q^5$
$$q^5 = \frac{5242{,}11}{4000}$$
$$q = \sqrt[5]{\frac{5242{,}11}{4000}} = 1{,}0556$$
Man erhält: $p\,\% = 5{,}56\,\%$
Das Geld von Frau Reh wurde zu einem Zinssatz von 5,56 % verzinst.
c) Herr Hirsch
$K_0 = 5000$ €; $p\,\% = 2{,}2\,\%$; $n = 15$ Jahre
$K_{15} = 5000 \cdot 1{,}022^{15} = 6930{,}00$
Frau Reh
$K_0 = 4000$ €; $p\,\% = 5{,}56\,\%$; $n = 15$ Jahre
$K_{15} = 4000 \cdot 1{,}0556^{15} = 9006{,}39$
Frau Reh hätte nach 15 Jahren 9006,39 €, Herr Hirsch hätte (nur) 6930,00 €.
d) Gesucht ist das Jahr n, für das gilt:
$5000 \cdot 1{,}022^n = 4000 \cdot 1{,}0556^n$
Lösen der Gleichung:
$$5000 \cdot 1{,}022^n = 4000 \cdot 1{,}0556^n \quad |:4000$$
$$\frac{5000}{4000} \cdot 1{,}022^n = 1{,}0556^n \quad |:1{,}022^n$$
$$\frac{5000}{4000} = \frac{1{,}0556^n}{1{,}022^n}$$
$$1{,}25 = \left(\frac{1{,}0556}{1{,}022}\right)^n$$
$$n = \log_{\frac{1{,}0556}{1{,}022}}(1{,}25) = 6{,}90$$
Herr Hirsch und Frau Reh haben am Ende des 7. Jahres annähernd gleich viel Geld.

**15** a) $K_0 = 10\,000$ €; $n = 6$ Jahre
gesucht: $K_6$
- A-Bank
  $p\,\% = 1{,}8\,\%$; also $q = 1{,}018$
  $K_6 = 10\,000 \cdot 1{,}018^6 = 11\,129{,}78$
- B-Bank
  $p\,\% = 1{,}65\,\%$; zusätzlich Prämie 1 %
  $K_6 = 10\,000 \cdot 1{,}0165^6 = 11\,031{,}75$
  Prämie 1 % bei Auszahlung:
  $11\,031{,}75 \cdot 1{,}01 = 11\,142{,}06$

Herr Savucu würde 11 129,78 € bei der A-Bank und 11 142,06 € bei der B-Bank erhalten. Das Angebot der B-Bank ist günstiger. Falls keine anderen Faktoren für oder gegen die Entscheidung sprechen, dann sollte er sich für das Angebot der B-Bank entscheiden.

b) $K_0 = 10\,000$ €; $n = 7$ Jahre
gesucht: $K_7$
- A-Bank
  $K_7 = 10\,000 \cdot 1{,}018^7 = 11\,330{,}12$
- B-Bank
  $K_7 = 10\,000 \cdot 1{,}0165^7 = 11\,213{,}77$
  + Prämie 1 %:
  $11\,213{,}77 \cdot 1{,}01 = 11\,325{,}91$

Bei einer Laufzeit von 7 Jahren ist das Angebot der A-Bank etwas günstiger. B-Bank bietet aber ohnehin eine Laufzeit von maximal 6 Jahren, daher müsste Herr Pädt sich sowieso für A-Bank entscheiden.

c) Zinsfaktor q der C-Bank berechnen:
Damit das Angebot der C-Bank für Herrn Savucu nach 6 Jahren günstiger als bei der B-Bank ist, muss gelten:
$10\,000 \cdot q^6 > 11\,142{,}06$ (1)
Damit das Angebot der C-Bank für Herrn Pädt nach 7 Jahren günstiger als bei der A-Bank ist, muss gelten:
$10\,000 \cdot q^7 > 11\,330{,}12$ (2)
Damit erhält man:
aus (1): $q^6 > \frac{11\,142{,}06}{10\,000}$
$q > \sqrt[6]{\frac{11\,142{,}06}{10\,000}} = 1{,}0182$
aus (2): $q^7 > \frac{11\,330{,}12}{10\,000}$
$q > \sqrt[7]{\frac{11\,330{,}12}{10\,000}} = 1{,}0180$
Der Zinsfaktor muss also mindestens 1,0182 (bzw. der Zinssatz mindestens 1,82 %) betragen, damit das Angebot bei C-Bank in beiden Fällen günstiger ist.

**16** a) prozentuale Steigerung von 2016 bis
$\frac{45{,}23 - 21{,}85}{21{,}85} = 1{,}070 = 107{,}0\,\%$
Der Wert der Aktie ist von 2016 bis 2019 um 107 % gestiegen.

b) $K_0 = 21{,}85$; $K_3 = 45{,}23$
Zinsfaktor q berechnen
$45{,}23 = 21{,}85 \cdot q^3$
$q^3 = \frac{45{,}23}{21{,}85}$
$q = \sqrt[3]{\frac{45{,}23}{21{,}85}} = 1{,}2745$
Man erhält also: $p\,\% = 27{,}45\,\%$
Ein Kapitalbesitzer hätte sein Geld zu einem jährlichen Zinssatz von 27,45 % anlegen müssen, um den gleichen Wertzuwachs zu erzielen.

c) $K_0 = 45{,}23$ €; $p\,\% = 2{,}6\,\%$; $n = 5$ Jahre
$q = 1{,}026$
Endkapital berechnen:
$K_5 = K_0 \cdot q^5$
$K_5 = 45{,}23 \cdot 1{,}026^5$
$K_5 = 51{,}42$ €
Nach fünf Jahren ist die Aktie 51,42 wert.

**17** $K_0 = 12\,000$ €; $n = 4$ Jahre;
Gesamtzuwachs in 4 Jahren: 10,8 %; d.h. es gilt:
$K_4 = 12\,000 \cdot 1{,}108 = 13\,296$
gesucht: Zinssatz p %
Für den zugehörigen Zinsfaktor q gilt:
$K_4 = K_0 \cdot q^4$
$13\,296 = 12\,000 \cdot q^4$
$q^4 = \frac{13\,296}{12\,000} = 1{,}108$
$q = \sqrt[4]{1{,}108}$
$q = 1{,}026$
Der jährliche Zinssatz beträgt 2,6 %.
Anmerkung: Es ist nicht notwendig, das Endkapital auszurechnen, man kann so vorgehen, indem man die zwei Gleichungen miteinander vergleicht:
$K_4 = 12\,000 \cdot 1{,}108$ und
$K_4 = 12\,000 \cdot q^4$
Wenn man die rechten Seiten gleich setzt und durch 12 000 dividiert, erhält man direkt:
$q^4 = 1{,}108$, also $q = \sqrt[4]{1{,}108} = 1{,}026$.

**18** Herr Srour:
$K_0 = 8000$ €; $n = 4$ Jahre; $p\,\% = 2{,}4\,\%$
Endkapital berechnen:
$K_4 = 8000 \cdot 1{,}024^4 = 8796{,}09$
Nach 4 Jahren erzielt Herr Srour ein Endkapital von 8796,09 €.
Frau Srour:
$K_0 = 8000$ €; $n = 3$ Jahre
Endkapital nach 3 Jahren: $K_3 = 8796{,}09$ €
gesucht: p %

Zinsfaktor q berechnen
$K_3 = K_0 \cdot q^3$
$8796{,}09 = 8000 \cdot q^3$
$q^3 = \frac{8796{,}09}{8000}$
$q = \sqrt[3]{\frac{8796{,}09}{8000}} = 1{,}0321$
Daraus erhält man: $p\,\% = 3{,}21\,\%$
Frau Srour muss ihr Geld zu einem Zinssatz von 3,21 % anlegen, damit sie nach 3 Jahren dasselbe Endkapital erzielen kann, wie ihr Mann nach 4 Jahren.
Anmerkung: Man kann schneller rechnen, indem man nur die jeweiligen Zinsfaktoren vergleicht (ohne das Endkapital auszurechnen). Es muss gelten:
$8000 \cdot 1{,}024^4 = 8000 \cdot q^3$
$1{,}024^4 = q^3$
Also: $q = \sqrt[3]{1{,}024^4} = 1{,}0321.$

**19** a) $K_0 = 8000\,€$;
Gesamtzinsen: $Z = 539{,}59\,€$
1. Jahr: $p_1\,\% = 1{,}8\,\% \rightarrow q_1 = 1{,}018$
2. Jahr: $p_2\,\% = 2{,}3\,\% \rightarrow q_2 = 1{,}023$
3. Jahr:
gesucht: $p_3\,\%$ bzw. Zinsfaktor $q_3$
- Kapital $K_1$ am Ende des 1. Jahres:
  $K_1 = K_0 \cdot 1{,}018$
  $K_1 = 8000 \cdot 1{,}018$
- Kapital $K_2$ am Ende des 2. Jahres:
  $K_2 = K_1 \cdot 1{,}023$
  $K_2 = 8000 \cdot 1{,}018 \cdot 1{,}023$
- Kapital $K_3$ am Ende des 3. Jahres:
  $K_3 = K_2 \cdot q$
  $K_3 = 8000 \cdot 1{,}018 \cdot 1{,}023 \cdot q_3$

Für das Kapital $K_3$ am Ende des 3. Jahres gilt wiederum:
$K_3 = K_0 + Z$
$K_3 = 8000 + 539{,}59 = 8539{,}59$
Man erhält also:
$8000 \cdot 1{,}018 \cdot 1{,}023 \cdot q_3 = 8539{,}59$
$q_3 = \frac{8539{,}59}{8000 \cdot 1{,}018 \cdot 1{,}023} = 1{,}02499\ldots$
Also ist $p_3\,\% = 2{,}5\,\%$.
Der Zinssatz für das 3. Jahr betrug 2,5 %.
b) Für den Zinsfaktor q zum jährlichen gleichbleibenden Zinssatz p % muss gelten:
$K_3 = K_0 \cdot q^3$
$8539{,}59 = 8000 \cdot q^3$
$q^3 = \frac{8539{,}59}{8000}$
$q = \sqrt[3]{\frac{8539{,}59}{8000}} = 1{,}02199\ldots$
Damit ist $p\,\% = 2{,}5\,\%$.
Der jährliche gleichbleibende Zinssatz würde 2,2 % betragen.

**Seite 101**

**20** a) $G_2 = 972$ Bakterien; gesucht: $G_0$
$972 = G_0 \cdot 0{,}9^2$
$G_0 = \frac{972}{0{,}9^2}$
$G_0 = 1200$ Bakterien
b) $G_{12} = G_0 \cdot 0{,}9^{12}$
$G_{12} = 1200 \cdot 0{,}9^{12} = 338{,}9\ldots$
$G_{12} = 339$ Bakterien

**21** $G_0 = 80\,\text{mg}$ Coffein;
Halbwertszeit: $T_{\frac{1}{2}} = 3\,\text{h}$
Lisa kann einschlafen, wenn sie 7 Stunden vor der Schlafenzeit keinen Energiedrink getrunken hat. Da das Coffein 30 Minuten benötigt, um in den Blutkreislauf zu gelangen (also erst ab diesem Zeitpunkt abgebaut werden kann), rechnet man mit einer Abbauzeit von 6,5 h. Gesucht ist also $G_{6,5}$.
Bestimmen des stündlichen Abbaufaktors q:
Nach 3 Stunden ist die Hälfte abgebaut, d.h.
$q^3 = 0{,}5$
$q = \sqrt[3]{0{,}5}$ bzw. $q = 0{,}5^{\frac{1}{3}}$
Damit erhält man:
$G_{6,5} = G_0 \cdot q^{6,5}$
$G_{6,5} = 80 \cdot \left(0{,}5^{\frac{1}{3}}\right)^{6,5} = 17{,}8$
7 Stunden nachdem Lisa den Energiedrink getrunken hat, befinden sich noch ca. 17,8 mg Coffein in ihrem Körper.

**22** a)

| Zeit in Wochen | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Fläche in $m^2$ | 20 | 40 | 80 | 160 | 320 |

| Zeit in Wochen | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| Fläche in $m^2$ | 640 | 1280 | 2560 | 5120 |

Da der Badesee eine Fläche von $5000\,m^2$ hat, wird er nach 8 Wochen komplett von den Algen bedeckt sein.
b) Die Verdopplungszeit beträgt 7 Tage.
Gesucht ist der prozentuale Zuwachs pro Tag.
Bestimmen des täglichen Wachstumsfaktors q:
$q^7 = 2$
$q = \sqrt[7]{2} = 1{,}104$
Damit beträgt das tägliche Wachstum 10,4 %.

**23** a) Abnahme um $p\,\% = 12\,\% \rightarrow q = 0{,}88$
Auf der Wasseroberfläche (0 m) hat man eine Helligkeit von 100 %; also $B_0 = 100\,\%$. Die Helligkeit $G_n$ in einer Tiefe von n Metern im Vergleich zur Helligkeit an der Wasseroberfläche wird gegeben durch die Gleichung:
$G_n = 100\,\% \cdot 0{,}88^n$


Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

Für $n = 1\,m$; $2\,m$ bzw. $5\,m$ erhält man:
$G_1 = 100\,\% \cdot 0{,}88 = 88\,\%$
$G_2 = 100\,\% \cdot 0{,}88^2 \approx 77{,}4\,\%$
$G_5 = 100\,\% \cdot 0{,}88^5 \approx 52{,}8\,\%$
Die Helligkeit in 1 m (2 m; 5 m) Wassertiefe beträgt 88 % (77,4 %; 52,8 %) der Helligkeit auf der Wasseroberfläche.
b) Gesucht ist die Wassertiefe n (in Metern), bei der gilt:
$100\,\% \cdot 0{,}88^n = 20\,\%$
$0{,}88^n = 0{,}2$
$n = \log_{0{,}88}(0{,}2) = 12{,}59\ldots$
Ab einer Tiefe von 13 m beträgt die Helligkeit weniger als 20 %.

**24** a) Im Jahr, an dem die Zählung anfängt (Jahr 0), hat man: $G_0 = 100\,\%$
Wachstum um $p\,\% = 4\,\%$, also $q = 1{,}04$
$G_n = 100\,\% \cdot 1{,}04^n$
Nach 2 Jahren:
$G_2 = 100\,\% \cdot 1{,}04^2 = 108{,}16\,\%$
→ Wirtschaft gewachsen um 8,16 %
Nach 10 Jahren: $G_{10} = 100\,\% \cdot 1{,}04^{10} \approx 148{,}0\,\%$
→ Wirtschaft gewachsen um ca. 48,0 %
Nach 25 Jahren: $G_{25} = 100\,\% \cdot 1{,}04^{25} \approx 266{,}6\,\%$
→ Wirtschaft gewachsen um ca. 166,6 %
b) Individuelle Lösungen
Die Rechnungen in a) zeigen, dass ein jährliches Wachstum von 4 % innerhalb von wenigen Jahren zu enormen Steigerungsraten des Wirtschaftswachstums führt, die auf die Dauer vermutlich weder haltbar noch sinnvoll sind.

**25** a) $G_0 = 42\,000\,€$
jährliche Abnahme um $p\,\% = 15\,\%$
→ $q = 0{,}85$
Der Wert des Autos nach n Jahren wird gegeben durch die Formel:
$G_n = G_0 \cdot 0{,}85^n$
$G_3 = 42\,000 \cdot 0{,}85^3 = 25\,793{,}25\,€$
$G_5 = 42\,000 \cdot 0{,}85^5 = 18\,635{,}62\,€$
$G_{10} = 42\,000 \cdot 0{,}85^{10} = 8268{,}72\,€$
Der Wert des Autos beträgt nach 3 Jahren 25 793,25 €; nach 5 Jahren 18 635,62 €; nach 10 Jahren 8268,72 €.
b) Gesucht wird das Jahr n, für das gilt:
$42\,000 \cdot 0{,}85^n = 1000$
$0{,}85^n = \frac{1000}{42\,000}$
$n = \log_{0{,}85}\left(\frac{1000}{42\,000}\right) = 22{,}998\ldots$
$n = 23$
Nach 23 Jahren hat das Auto einen Wert unter 1000 €.

**26** Anfangsmenge: $G_0 = 100\,\%$
Abnahme um $p\,\% = 10{,}3\,\%$ → $q = 0{,}897$
$G_n = 100\,\% \cdot 0{,}897^n$
Gesucht ist die Anzahl von Tagen n, für die gilt:
$G_n = \frac{1}{4} \cdot 100\,\%$.
$100\,\% \cdot 0{,}897^n = \frac{1}{4} \cdot 100\,\%$
$0{,}897^n = \frac{1}{4}$
$n = \log_{0{,}897}\left(\frac{1}{4}\right) = 12{,}75\ldots$
Nach 13 ganzen Tagen ist erstmals weniger als $\frac{1}{4}$ der Anfangsmenge vorhanden.

**27** a) $G_0 = 24$ Kaninchen; $n = 70$ Jahre
$G_{70} = 10$ Milliarden Kaninchen
$= 10^{10}$ Kaninchen
gesucht: Wachstumsfaktor q
$10^{10} = 24 \cdot q^{70}$
$q^{70} = \frac{10^{10}}{24}$
$q = \sqrt[70]{\frac{10^{10}}{24}} = 1{,}3278\ldots \approx 1{,}328$
b) $G_0 = 24$ Kaninchen; $q = 1{,}328$
Gesucht ist die Verdopplungszeit, also die Anzahl von Jahren n, für die gilt:
$G_0 \cdot q^n = 2 \cdot G_0$.
$24 \cdot 1{,}328^n = 2 \cdot 24 \quad |:24$
$1{,}328^n = 2$
$n = \log_{1{,}328}(2) = 2{,}44\ldots$
Die Verdopplungszeit beträgt etwa 2,44 Jahre bzw. 2 Jahre und 160 Tage.
c) $G_0 = 10^{10}$ Kaninchen; $n = 25$ Jahre
$G_{25} = 10^8$ Kaninchen
gesucht: Wachstumsfaktor q
$10^8 = 10^{10} \cdot q^{25}$
$q^{25} = \frac{10^8}{10^{10}} = 0{,}01$
$q = \sqrt[25]{0{,}01} = 0{,}83176\ldots \approx 0{,}832$
Der Wachstumsfaktor beträgt etwa 0,832.
d) $G_0 = 10^{10}$ Kaninchen; $q = 0{,}832$
Gesucht ist die Halbwertszeit, also die Anzahl von Jahren n, für die gilt:
$G_0 \cdot q^n = \frac{1}{2} \cdot G_0$.
$10^{10} \cdot 0{,}832^n = \frac{1}{2} \cdot 10^{10} \quad |:10^{10}$
$0{,}832^n = \frac{1}{2}$
$n = \log_{0{,}832}\left(\frac{1}{2}\right) = 3{,}768\ldots$
Die Halbwertszeit beträgt etwa 3,77 Jahre bzw. 3 Jahre und 280 Tage.

## EXTRA: Alternative Anlageformen Seiten 102, 103

### Seite 102

**28** Individuelle Lösungen

**29** Individuelle Lösungen

**30** a) Die Anlage für Roman ist vermutlich ein Sparbrief, eventuell auch ein Tagesgeldkonto.
Mit dem Geld für Simona und Anja wurden Aktien gekauft. Die Aktien von Anja haben ein deutliches Plus eingebracht; die Aktien von Simona dagegen haben in diesem Zeitraum einen Verlust verzeichnet.

b) Roman

$2000 \cdot q^3 = 2066{,}73$

$q^3 = \frac{2066{,}73}{2000}$

$q = \sqrt[3]{\frac{2066{,}73}{2000}} = 1{,}0110\ldots$

jährlicher Zinssatz: $p\,\% = 1{,}1\,\%$

Anja

$2000 \cdot q^3 = 3499{,}00$

$q^3 = \frac{3499}{2000}$

$q = \sqrt[3]{\frac{3499}{2000}} = 1{,}2049\ldots$

jährlicher Zinssatz: $p\,\% = 20{,}5\,\%$

c) Simona

$2000 \cdot q^3 = 1913{,}40$

$q^3 = \frac{1913{,}40}{2000}$

$q = \sqrt[3]{\frac{1913{,}40}{2000}} = 0{,}98595\ldots$

$\rightarrow p\,\% = -1{,}405\,\%$

Der Verlust von Simona entspricht einem negativen jährlichen Zinssatz von etwa 1,4 %.

d) Anjas Aktien haben nach 3 Jahren einen Wert von 3499,00 €. Wenn sie zu diesem Zeitpunkt die Aktien verkauft, dann hat sie in drei Jahren einen Gewinn von 1499,00 € gemacht. Hierzu ist eine Abgeltungssteuer von 25 % fällig (hinzu kommen Solidaritätszuschlag und Kirchensteuer, die in der Rechnung unten nicht berücksichtigt werden). D. h. es bleiben höchstens 75 % des Gewinns übrig.

$0{,}75 \cdot 1499{,}00\,€ = 1124{,}25\,€$

Zu dieser Summe addieren sich 2000 € Kapital (2000 € + 1124,25 € = 3124,25 €). Damit stehen Anja für Führerschein und Leichtkraftrad viel weniger als 3499,00 € zur Verfügung.

### Seite 103

**31** a) Individuelle Erstellung

b) Nach vier Jahren (am 31.05 2022) wird Frau Bühring über ein Kapital von 7365,37 € verfügen (vgl. Zeile 53 des Tabellenblatts, das wie auf Seite 103 des Schulbuchs angelegt ist).

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Ratensparen | | | | | |
| 2 | | Anfangszahlung | 2.500,00 € | Zinssatz | 0,85 % | |
| 3 | | Monatsrate | 100,00 € | | | |
| 4 | Datum | Kapital am Monatsanfang | Einzahlung | neues Kapital | Monatszinsen | Kapital am Monatsanfang |
| 5 | 01.06.18 | 0,00 € | 2.500,00 € | 2.500 € | 0,00 € | 2.500,00 € |
| 6 | 01.07.18 | 2.500,00 € | 100,00 € | 2.600,00 € | 1,84 € | 2.601,84 € |
| 7 | 01.08.18 | 2.601,84 € | 100,00 € | 2.701,84 € | 1,91 € | 2.703,76 € |
| 8 | 01.09.18 | 2.703,76 € | 100,00 € | 2.803,76 € | 1,99 € | 2.805,74 € |
| 9 | 01.10.18 | 2.805,74 € | 100,00 € | 2.905,74 € | 2,06 € | 2.907,80 € |
| 10 | 01.11.18 | 2.907,80 € | 100,00 € | 3.007,80 € | 2,13 € | 3.009,93 € |
| 11 | 01.12.18 | 3.009,93 € | 100,00 € | 3.109,93 € | 2,20 € | 3.112,13 € |
| 12 | 01.01.19 | 3.112,13 € | 100,00 € | 3.212,13 € | 2,28 € | 3.214,41 € |
| 13 | 01.02.19 | 3.214,41 € | 100,00 € | 3.314,41 € | 2,35 € | 3.316,76 € |
| 14 | 01.03.19 | 3.316,76 € | 100,00 € | 3.416,76 € | 2,42 € | 3.419,18 € |
| 15 | 01.04.19 | 3.419,18 € | 100,00 € | 3.519,18 € | 2,49 € | 3.521,67 € |
| 16 | 01.05.19 | 3.521,67 € | 100,00 € | 3.621,67 € | 2,57 € | 3.624,23 € |
| 17 | 01.06.19 | 3.624,23 € | 100,00 € | 3.724,23 € | 2,64 € | 3.726,87 € |
| 18 | 01.07.19 | 3.726,87 € | 100,00 € | 3.826,87 € | 2,71 € | 3.829,58 € |
| 19 | 01.08.19 | 3.829,58 € | 100,00 € | 3.929,58 € | 2,78 € | 3.932,37 € |
| 20 | 01.09.19 | 3.932,37 € | 100,00 € | 4.032,37 € | 2,86 € | 4.035,22 € |
| 21 | 01.10.19 | 4.035,22 € | 100,00 € | 4.135,22 € | 2,93 € | 4.138,15 € |
| 22 | 01.11.19 | 4.138,15 € | 100,00 € | 4.238,15 € | 3,00 € | 4.241,15 € |
| 23 | 01.12.19 | 4.241,15 € | 100,00 € | 4.341,15 € | 3,07 € | 4.344,23 € |
| 24 | 01.01.20 | 4.344,23 € | 100,00 € | 4.444,23 € | 3,15 € | 4.447,38 € |
| 25 | 01.02.20 | 4.447,38 € | 100,00 € | 4.547,38 € | 3,22 € | 4.550,60 € |
| 26 | 01.03.20 | 4.550,60 € | 100,00 € | 4.650,60 € | 3,29 € | 4.653,89 € |
| 27 | 01.04.20 | 4.653,89 € | 100,00 € | 4.753,89 € | 3,37 € | 4.757,26 € |
| 28 | 01.05.20 | 4.757,26 € | 100,00 € | 4.857,26 € | 3,44 € | 4.860,70 € |
| 29 | 01.06.20 | 4.860,70 € | 100,00 € | 4.960,70 € | 3,51 € | 4.964,21 € |
| 30 | 01.07.20 | 4.964,21 € | 100,00 € | 5.064,21 € | 3,59 € | 5.067,80 € |
| 31 | 01.08.20 | 5.067,80 € | 100,00 € | 5.167,80 € | 3,66 € | 5.171,46 € |
| 32 | 01.09.20 | 5.171,46 € | 100,00 € | 5.271,46 € | 3,73 € | 5.275,20 € |
| 33 | 01.10.20 | 5.275,20 € | 100,00 € | 5.375,20 € | 3,81 € | 5.379,00 € |
| 34 | 01.11.20 | 5.379,00 € | 100,00 € | 5.479,00 € | 3,88 € | 5.482,88 € |
| 35 | 01.12.20 | 5.482,88 € | 100,00 € | 5.582,88 € | 3,95 € | 5.586,84 € |
| 36 | 01.01.21 | 5.586,84 € | 100,00 € | 5.686,84 € | 4,03 € | 5.690,87 € |
| 37 | 01.02.21 | 5.690,87 € | 100,00 € | 5.790,87 € | 4,10 € | 5.794,97 € |
| 38 | 01.03.21 | 5.794,97 € | 100,00 € | 5.894,97 € | 4,18 € | 5.899,14 € |
| 39 | 01.04.21 | 5.899,14 € | 100,00 € | 5.999,14 € | 4,25 € | 6.003,39 € |
| 40 | 01.05.21 | 6.003,39 € | 100,00 € | 6.103,39 € | 4,32 € | 6.107,72 € |
| 41 | 01.06.21 | 6.107,72 € | 100,00 € | 6.207,72 € | 4,40 € | 6.212,11 € |
| 42 | 01.07.21 | 6.212,11 € | 100,00 € | 6.312,11 € | 4,47 € | 6.316,58 € |
| 43 | 01.08.21 | 6.316,58 € | 100,00 € | 6.416,58 € | 4,55 € | 6.421,13 € |
| 44 | 01.09.21 | 6.421,13 € | 100,00 € | 6.521,13 € | 4,62 € | 6.525,75 € |
| 45 | 01.10.21 | 6.525,75 € | 100,00 € | 6.625,75 € | 4,69 € | 6.630,44 € |
| 46 | 01.11.21 | 6.630,44 € | 100,00 € | 6.730,44 € | 4,77 € | 6.735,21 € |
| 47 | 01.12.21 | 6.735,21 € | 100,00 € | 6.835,21 € | 4,84 € | 6.840,05 € |
| 48 | 01.01.22 | 6.840,05 € | 100,00 € | 6.940,05 € | 4,92 € | 6.944,97 € |
| 49 | 01.02.22 | 6.944,97 € | 100,00 € | 7.044,97 € | 4,99 € | 7.049,96 € |
| 50 | 01.03.22 | 7.049,96 € | 100,00 € | 7.149,96 € | 5,06 € | 7.155,02 € |
| 51 | 01.04.22 | 7.155,02 € | 100,00 € | 7.255,02 € | 5,14 € | 7.260,16 € |
| 52 | 01.05.22 | 7.260,16 € | 100,00 € | 7.360,16 € | 5,21 € | 7.365,37 € |


Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.

c) Die Summe von 10 000 € wird am 30.06.2024 überschritten, also nach genau 6 Jahren und einem Monat.
Das Kapital beträgt dann 10 020,07 €.
d) Hätte sie 200 € monatlich bezahlt, dann hätte sie nach vier Jahren 12 146,15 €.

**32** a) Individuelle Erstellung
Hinweise zur Erstellung:
In Spalte C werden die Monatszinsen, die aus der Restschuld des Vormonats in Spalte E errechnet werden (vgl. Formel für C6 im Tabellenblatt auf Seite 103 des Schulbuchs).
Der Tilgungsbetrag in Spalte D wird jeweils berechnet, indem man die Monatszinsen des jeweiligen Monats aus der Rückzahlungsrate abzieht.
Für die Restschuld in E muss man den Tilgungsbetrag in dem jeweiligen Monat aus der Restschuld des Vormonats abziehen.
b) Es ist sinnvoll, in Zeile C5 zwei Dollarzeichen zu verwenden, damit der Eintrag aus E5 (die Rückzahlungsrate) mit dem Zinssatz aus E2 richtig multipliziert werden kann (also mit der Zahl 0,484 und nicht 4,84). Alternativ dazu gibt man der Zelle E2 den Namen „Prozent“.
c) Frau Bergmann kann ihr Ziel erreichen. Nach genau 5 Jahren, am 31.05.23, ist sie schuldenfrei. Die letzte Rate ist dabei etwas kleiner als der Rest: sie beträgt 940,00 € − 6,71 € = 933,29 € (vgl. Exceldatei).

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Annuitätendarlehen | | | Darlehensbetrag: | 50.000,00 € |
| 2 | | | | Zinssatz: | 4,84 % |
| 3 | | monatliche Rückzahlungsrate: | | | 940,00 € |
| 4 | Datum | Rückzahlung | Monatszinsen | Tilgungsbetrag | Restschuld |
| 5 | 30.06.18 | 940,00 € | 201,67 € | 738,33 € | 49.261,67 € |
| 6 | 31.07.18 | 940,00 € | 198,69 € | 741,31 € | 48.520,36 € |
| 7 | 31.08.18 | 940,00 € | 195,70 € | 744,30 € | 47.776,05 € |
| 8 | 31.09.18 | 940,00 € | 192,70 € | 747,30 € | 47.028,75 € |
| 9 | 31.10.18 | 940,00 € | 189,68 € | 750,32 € | 46.278,43 € |
| 10 | 31.11.18 | 940,00 € | 186,66 € | 753,34 € | 45.525,09 € |
| 11 | 31.12.18 | 940,00 € | 183,62 € | 756,38 € | 44.768,71 € |
| 12 | 31.01.19 | 940,00 € | 180,57 € | 759,43 € | 44.009,27 € |
| 13 | 28.02.19 | 940,00 € | 177,50 € | 762,50 € | 43.246,78 € |
| 14 | 31.03.19 | 940,00 € | 174,43 € | 765,57 € | 42.481,21 € |
| 15 | 30.04.19 | 940,00 € | 171,34 € | 768,66 € | 41.712,55 € |
| 16 | 31.05.19 | 940,00 € | 168,24 € | 771,76 € | 40.940,79 € |
| 17 | 30.06.19 | 940,00 € | 165,13 € | 774,87 € | 40.165,92 € |
| 18 | 31.07.19 | 940,00 € | 162,00 € | 778,00 € | 39.387,92 € |
| 19 | 31.08.19 | 940,00 € | 158,86 € | 781,14 € | 38.606,78 € |
| 20 | 30.09.19 | 940,00 € | 155,71 € | 784,29 € | 37.822,50 € |
| 21 | 31.10.19 | 940,00 € | 152,55 € | 787,45 € | 37.035,05 € |
| 22 | 30.11.19 | 940,00 € | 149,37 € | 790,63 € | 36.244,42 € |
| 23 | 31.12.19 | 940,00 € | 146,19 € | 793,81 € | 35.450,61 € |
| 24 | 31.01.20 | 940,00 € | 142,98 € | 797,02 € | 34.653,59 € |
| 25 | 29.02.20 | 940,00 € | 139,77 € | 800,23 € | 33.853,36 € |
| 26 | 31.03.20 | 940,00 € | 136,54 € | 803,46 € | 33.049,90 € |
| 27 | 30.04.20 | 940,00 € | 133,30 € | 806,70 € | 32.243,21 € |
| 28 | 31.05.20 | 940,00 € | 130,05 € | 809,95 € | 31.433,25 € |
| 29 | 30.06.20 | 940,00 € | 126,78 € | 813,22 € | 30.620,03 € |
| 30 | 31.07.20 | 940,00 € | 123,50 € | 816,50 € | 29.803,54 € |
| 31 | 31.08.20 | 940,00 € | 120,21 € | 819,79 € | 28.983,74 € |
| 32 | 30.09.20 | 940,00 € | 116,90 € | 823,10 € | 28.160,64 € |
| 33 | 31.10.20 | 940,00 € | 113,58 € | 826,42 € | 27.334,23 € |
| 34 | 30.11.20 | 940,00 € | 110,25 € | 829,75 € | 26.504,47 € |
| 35 | 31.12.20 | 940,00 € | 106,90 € | 833,10 € | 25.671,37 € |
| 36 | 31.01.21 | 940,00 € | 103,54 € | 836,46 € | 24.834,92 € |
| 37 | 28.02.21 | 940,00 € | 100,17 € | 839,83 € | 23.995,08 € |
| 38 | 31.03.21 | 940,00 € | 96,78 € | 843,22 € | 23.151,86 € |
| 39 | 30.04.21 | 940,00 € | 93,38 € | 846,62 € | 22.305,24 € |
| 40 | 31.05.21 | 940,00 € | 89,96 € | 850,04 € | 21.455,21 € |
| 41 | 30.06.21 | 940,00 € | 86,54 € | 853,46 € | 20.601,74 € |
| 42 | 31.07.21 | 940,00 € | 83,09 € | 856,91 € | 19.744,84 € |
| 43 | 31.08.21 | 940,00 € | 79,64 € | 860,36 € | 18.884,47 € |
| 44 | 30.09.21 | 940,00 € | 76,17 € | 863,83 € | 18.020,64 € |
| 45 | 31.10.21 | 940,00 € | 72,68 € | 867,32 € | 17.153,33 € |
| 46 | 30.11.21 | 940,00 € | 69,19 € | 870,81 € | 16.282,51 € |
| 47 | 31.12.21 | 940,00 € | 65,67 € | 874,33 € | 15.408,18 € |
| 48 | 31.01.22 | 940,00 € | 62,15 € | 877,85 € | 14.530,33 € |
| 49 | 28.02.22 | 940,00 € | 58,61 € | 881,39 € | 13.648,94 € |
| 50 | 31.03.22 | 940,00 € | 55,05 € | 884,95 € | 12.763,99 € |
| 51 | 30.04.22 | 940,00 € | 51,48 € | 888,52 € | 11.875,47 € |
| 52 | 31.05.22 | 940,00 € | 47,90 € | 892,10 € | 10.983,36 € |
| 53 | 30.06.22 | 940,00 € | 44,30 € | 895,70 € | 10.087,66 € |
| 54 | 31.07.22 | 940,00 € | 40,69 € | 899,31 € | 9.188,35 € |
| 55 | 31.08.22 | 940,00 € | 37,06 € | 902,94 € | 8.285,41 € |
| 56 | 30.09.22 | 940,00 € | 33,42 € | 906,58 € | 7.378,83 € |
| 57 | 31.10.22 | 940,00 € | 29,76 € | 910,24 € | 6.468,59 € |
| 58 | 30.11.22 | 940,00 € | 26,09 € | 913,91 € | 5.554,68 € |
| 59 | 31.12.22 | 940,00 € | 22,40 € | 917,60 € | 4.637,08 € |
| 60 | 31.01.23 | 940,00 € | 18,70 € | 921,30 € | 3.715,79 € |
| 61 | 28.02.23 | 940,00 € | 14,99 € | 925,01 € | 2.790,77 € |
| 62 | 31.03.23 | 940,00 € | 11,26 € | 928,74 € | 1.862,03 € |
| 63 | 30.04.23 | 940,00 € | 7,51 € | 932,49 € | 929,54 € |
| 64 | 31.05.23 | 940,00 € | 3,75 € | 936,25 € | **−6,71 €** |

d) Hätte Frau Bergmann eine monatliche Rate von 600,00 € vereinbart, dann wäre sie am 30.11 2026 schuldenfrei gewesen, sie hätte also weitere 3,5 Jahre lang den Kredit zurückzahlen müssen. (Die letzte Rate würde dabei 461,28 € statt 600,00 € betragen.)

33 a) Das Kapital, das zurückgezahlt werden muss, beträgt zusammen mit der Bearbeitungsgebühr:
15 000,00 € · 1,015 = 15 225, 00 €.
Um die Höhe der Rückzahlungsrate zu bestimmen, kann man das Tabellenblatt aus Aufgabe 32 verwenden – mit Einträgen in E1: 15 225,00 € und in E2: 5,6 %. Damit Herr Horn nach 3 Jahren schuldenfrei ist, muss der Kredit bis zum 31.05.21 abbezahlt sein. Man kann verschiedene Beträge für die Rückzahlungsrate ausprobieren und die jeweilige Dauer der Rückzahlung ausrechnen lassen. Es ergibt sich ein Betrag zwischen 465,00 € und 470,00 €.
b) Rückzahlung bis zum 31.05.21 mit einer monatlichen Rückzahlungsrate von 465,00 €.
Die letzte Rate beträgt:
465,00 € – 179,10 € = 285,90 €.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Annuitätendarlehen | | | Darlehensbetrag: | 15.225,00 € |
| 2 | | | | Zinssatz: | 5,60 % |
| 3 | | monatliche Rückzahlungsreate | | | 465,00 € |
| 4 | Datum | Rückzahlung | Monats-zinsen | Tilgungsbetrag | Restschuld |
| 5 | 30.06.18 | 465,00 € | 71,05 € | 393,95 € | 14.831,05 € |
| 6 | 31.07.18 | 465,00 € | 69,21 € | 395,79 € | 14.435,26 € |
| 7 | 31.08.18 | 465,00 € | 67,36 € | 397,64 € | 14.037,63 € |
| 8 | 30.09.18 | 465,00 € | 65,51 € | 399,49 € | 13.638,14 € |
| 9 | 31.10.18 | 465,00 € | 63,64 € | 401,36 € | 13.236,78 € |
| 10 | 30.11.18 | 465,00 € | 61,77 € | 403,23 € | 12.833,55 € |
| 11 | 31.12.18 | 465,00 € | 59,89 € | 405,11 € | 12.428,44 € |
| 12 | 31.01.19 | 465,00 € | 58,00 € | 407,00 € | 12.021,44 € |
| 13 | 28.02.19 | 465,00 € | 56,10 € | 408,90 € | 11.612,54 € |
| 14 | 31.03.19 | 465,00 € | 54,19 € | 410,81 € | 11.201,73 € |
| 15 | 30.04.19 | 465,00 € | 52,27 € | 412,73 € | 10.789,01 € |
| 16 | 31.05.19 | 465,00 € | 50,35 € | 414,65 € | 10.374,36 € |
| 17 | 30.06.19 | 465,00 € | 48,41 € | 416,59 € | 9.957,77 € |
| 18 | 31.07.19 | 465,00 € | 46,47 € | 418,53 € | 9.539,24 € |
| 19 | 31.08.19 | 465,00 € | 44,52 € | 420,48 € | 9.118,76 € |
| 20 | 30.09.19 | 465,00 € | 42,55 € | 422,45 € | 8.696,31 € |
| 21 | 31.10.19 | 465,00 € | 40,58 € | 424,42 € | 8.271,89 € |
| 22 | 30.11.19 | 465,00 € | 38,60 € | 426,40 € | 7.845,49 € |
| 23 | 31.12.19 | 465,00 € | 36,61 € | 428,39 € | 7.417,11 € |
| 24 | 31.01.20 | 465,00 € | 34,61 € | 430,39 € | 6.986,72 € |
| 25 | 29.02.20 | 465,00 € | 32,60 € | 432,40 € | 6.554,32 € |
| 26 | 31.03.20 | 465,00 € | 30,59 € | 434,41 € | 6.119,91 € |
| 27 | 30.04.20 | 465,00 € | 28,56 € | 436,44 € | 5.683,47 € |
| 28 | 31.05.20 | 465,00 € | 26,52 € | 438,48 € | 5.244,99 € |
| 29 | 30.06.20 | 465,00 € | 24,48 € | 440,52 € | 4.804,47 € |
| 30 | 31.07.20 | 465,00 € | 22,42 € | 442,58 € | 4.361,89 € |
| 31 | 31.08.20 | 465,00 € | 20,36 € | 444,64 € | 3.917,25 € |
| 32 | 30.09.20 | 465,00 € | 18,28 € | 446,72 € | 3.470,53 € |
| 33 | 31.10.20 | 465,00 € | 16,20 € | 448,80 € | 3.021,72 € |
| 34 | 30.11.20 | 465,00 € | 14,10 € | 450,90 € | 2.570,82 € |
| 35 | 31.12.20 | 465,00 € | 12,00 € | 453,00 € | 2.117,82 € |
| 36 | 31.01.21 | 465,00 € | 9,88 € | 455,12 € | 1.662,71 € |
| 37 | 28.02.21 | 465,00 € | 7,76 € | 457,24 € | 1.205,46 € |
| 38 | 31.03.21 | 465,00 € | 5,63 € | 459,37 € | 746,09 € |
| 39 | 30.04.21 | 465,00 € | 3,48 € | 461,52 € | 284,57 € |
| 40 | 31.05.21 | 465,00 € | 1,33 € | 463,67 € | **–179,10 €** |

ACHTUNG: Sie arbeiten mit der Manuskriptfassung der Lösungen. Sie enthalten möglicherweise Fehler.
Gern können Sie Rückmeldungen an die folgende email-Adresse senden: SchnittpunktBW@klett.de
Die Verkaufsauflage erscheint im Frühjahr 2020 unter der ISBN 978-3-12-744303-5.