Klassenarbeit 3.1

1 (1 + 1 + 1 + 2 VP)
Die Wahrscheinlichkeiten für jedes der sechs Würfelergebnisse sind gleich, nämlich $\frac{1}{6}$.
a) *Es handelt sich um ein dreistufiges Zufallsexperiment. Nach der Pfadregel ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit das Produkt der drei Einzelwahrscheinlichkeiten.*
Die Pfadregel ergibt:
$p(111) = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$
$p(111) = \frac{1}{216}$

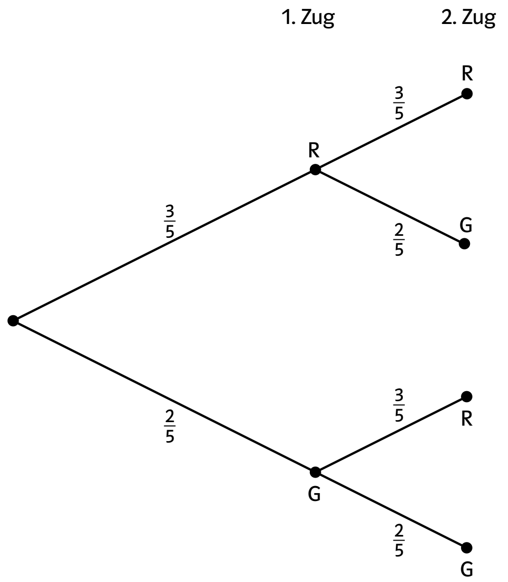
b) *Wenn keine „2" vorkommen darf, können fünf der sechs Zahlen vorkommen.*
Bei einem Wurf kommt als Ergebnis „keine 2" (kurz: $\bar{2}$) mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}$ zustande.
Die Pfadregel ergibt:
$p(\bar{2}\bar{2}\bar{2}) = \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)$
$p(\bar{2}\bar{2}\bar{2}) = \frac{125}{216}$

c) *Wenn nur Zahlen größer 3 vorkommen dürfen, kommen nur 4, 5, 6 in Frage. Das ist die Hälfte aller Würfelzahlen.*
$p(4 \text{ oder } 5 \text{ oder } 6) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$
$p(4 \text{ oder } 5 \text{ oder } 6) = \frac{1}{8}$

d) *Die einzige Wurfserie, bei der nicht mindestens einmal „6" auftritt, ist die, bei der keine einzige „6" vorkommt. Das Ereignis „Mindestens eine „6" ist das Gegenereignis zum Ereignis „Keine „6". Die Wahrscheinlichkeit für einen Wurf, der nicht „6" liefert, ist $\frac{5}{6}$.*
$p(\bar{6}\bar{6}\bar{6}) = \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)$
$p(\bar{6}\bar{6}\bar{6}) = \frac{125}{216}$
Bei allen anderen Würfen kommt mindestens eine „6" vor. Da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 sein muss, gilt:
p(mindestens eine „6") = $1 - p(\bar{6}\bar{6}\bar{6})$
p(mindestens eine „6") = $1 - \frac{125}{216}$
p(mindestens eine „6") = $\frac{91}{216}$

2 (3 + 1 + 1 + 1 VP)
Da die Urne drei rote und zwei grüne Kugeln enthält, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel $p(R) = \frac{3}{5}$, für das Ziehen einer grünen Kugel $p(G) = \frac{2}{5}$. Diese Wahrscheinlichkeiten ändern sich bei der zweiten Ziehung nicht, da die gezogenen Kugeln zurückgelegt werden.

a) Baumdiagramm



b) *Für das Ereignis „Zwei grüne Kugeln werden gezogen" gibt es einen Pfad im Baumdiagramm. Nach der Pfadregel sind die Wahrscheinlichkeiten an den Zweigen längs dieses Pfades zu multiplizieren.*
Mit der Pfadregel gilt:
$p(GG) = p(G) \cdot p(G)$
$p(GG) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$
$p(GG) = \frac{4}{25}$
Man erhält zwei grüne Kugeln mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{25}$ oder 16 %.

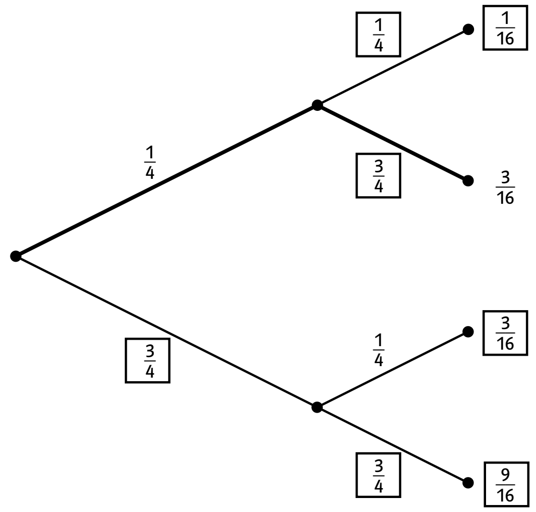
c) *Man erhält höchstens eine rote Kugel, wenn man keine zwei rote Kugeln erhält. Das Ereignis „Höchstens eine rote Kugel wird gezogen" ist daher das Gegenereignis zu „Zwei rote Kugeln werden gezogen".*
Bei Verwendung des Gegenereignisses gilt:
p(Höchstens eine rote Kugel)
= 1 − p(Zwei rote Kugeln)
p(Höchstens eine rote Kugel) = 1 − p(RR)
p(Höchstens eine rote Kugel) = 1 − p(R) · p(R)
p(Höchstens eine rote Kugel) = $1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$
p(Höchstens eine rote Kugel) = $1 - \frac{9}{25}$
p(Höchstens eine rote Kugel) = $\frac{16}{25}$
Man erhält mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{16}{25}$ oder 64% höchstens eine rote Kugel.

Bemerkung
Man kann auch mithilfe der Pfadregel und Summenregel rechnen:
p(Höchstens eine rote Kugel)
= p(RG) + p(GR) + p(GG)
= $p(R) \cdot p(G) + p(G) \cdot p(R) + p^2(G)$
= $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

Lösungen

d) *Nur die zweite Kugel ist rot, wenn die erste Kugel grün und die zweite Kugel rot ist.*
Es gilt mit der Pfadregel:
$p(GR) = p(G) \cdot p(R)$
$p(GR) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$
$p(GR) = \frac{6}{25}$
Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{25}$ oder 24 % ist nur die zweite gezogene Kugel rot.

3 (2 + 3 VP)
a) Baumdiagramm



Bemerkung
Die Pfadregel ergibt am fett gezeichneten Pfad:
$\frac{1}{4} \cdot \square = \frac{3}{16}$.
Daraus folgt die Eintragung $\frac{3}{4}$ in dieses Kästchen.
Da die von einer Verzweigung ausgehenden Zweige zusammen mit der Wahrscheinlichkeit 1 beschriftet sein müssen, ergeben sich die anderen Wahrscheinlichkeiten an den Zweigen.

b) Beschreibung eines Zufallsexperiments
Beispiel:
Ein Glücksrad mit einem roten und einem grünen Feld wird zweimal gedreht und die Farbe des Feldes, auf die der Zeiger weist, wird notiert.
Der rote Kreisausschnitt hat einen Mittelpunktswinkel der Weite 90°, der grüne Kreisausschnitt hat einen Mittelpunktswinkel der Weite 270°. Damit ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten $p(R) = \frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$ und $p(G) = \frac{270°}{360°} = \frac{3}{4}$.

Bemerkungen
Selbstverständlich ist jedes andere Zufallsexperiment mit zwei Ergebnissen, die mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{3}{4}$ auftreten, korrekt. Das Zufallsexperiment muss zweimal durchgeführt werden und die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Ergebnisse dürfen sich beim zweiten Zug gegenüber dem ersten Zug nicht verändern.

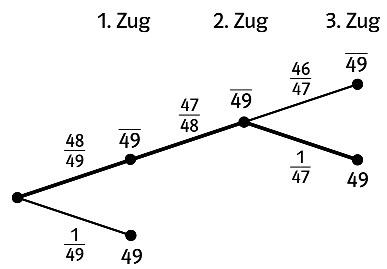
4 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 VP)
a) *Die Wahrscheinlichkeit für jede der 49 Kugeln ist beim ersten Zug gleich groß.*
Es gibt bei den Zahlen von 1 bis 49 nur 9 einstellige und 40 zweistellige Zahlen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste gezogene Kugel eine zweistellige Zahl trägt, ist daher $\frac{40}{49}$.

b) Zehn der 49 Kugeln haben eine Nummer, die höchstens 10 ist. Die erste gezogene Kugel hat daher mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{10}{49}$ höchstens die Nummer 10.

c) Die Wahrscheinlichkeit für eine „1" beim ersten Zug ist $p(1) = \frac{1}{49}$. Für die „2" beim zweiten Zug gibt es noch 48 Möglichkeiten. Daher gilt $p(2) = \frac{1}{48}$. Entsprechend folgt $p(3) = \frac{1}{47}$. Die Wahrscheinlichkeit p(123) für die ersten drei Ziehungen beträgt daher nach der Pfadregel:
$p(123) = p(1) \cdot p(2) \cdot p(3)$
$p(123) = \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{47}$
$p(123) \approx 0{,}000\,0090$

d) *Beachte, dass sich bei jeder Ziehung eine Kugel weniger in der Lostrommel befindet.*
Wenn die dritte gezogene Kugel „49" sein soll, dann darf die erste nicht „49" sein, was mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{48}{49}$ vorkommt. Die zweite Kugel darf dann ebenfalls nicht „49" sein. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{47}{48}$. Die dritte Kugel „49" kommt dann mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{47}$. Die dritte Kugel hat nach der Pfadregel die Nummer 49 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{48}{49} \cdot \frac{47}{48} \cdot \frac{1}{47} = \frac{1}{49}$.

Bemerkung
Ein reduzierter Baum zeigt alles. Für „nicht 49" wird die Abkürzung $\overline{49}$ verwendet.



e) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine der sechs Kugeln die Nummer 49 trägt, beträgt
$\frac{48}{49} \cdot \frac{47}{48} \cdot \frac{46}{47} \cdot \frac{45}{46} \cdot \frac{44}{45} \cdot \frac{43}{44} = \frac{43}{49}$.