Pinboard – Abhängigkeit und Änderung – Ableitung

Differenzenquotient – Sekantensteigung

Definition

Wenn eine Funktion f auf dem Intervall [a; b] definiert ist und sowohl x_0 als auch $x_0 + h$ in diesem Intervall liegen, dann heißt der Quotient $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ Differenzenquotient von f im Intervall $[x_0; x_0 + h]$.

Geometrische Bedeutung

Der Differenzenquotient ist die Steigung m_s der Geraden (Sekante) durch die Punkte $P(x_0 | f(x_0))$ und $Q(x_0 + h | f(x_0 + h))$ des Graphen der Funktion f.

Beispiel

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x,\ x \in \mathbb{R}$

Mit $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 + h \in \mathbb{R}$ erhält man

$P\left(x_0 \,\middle|\, \frac{1}{4}x_0^2 + x_0\right)$ und

$Q\left(x_0 + h \,\middle|\, \frac{1}{4}(x_0 + h)^2 + (x_0 + h)\right)$.

Folglich:

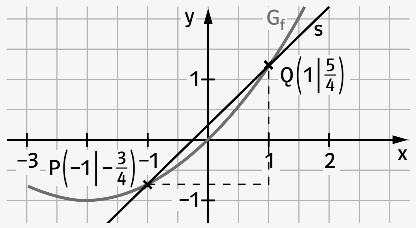
$m_s = \frac{\left(\frac{1}{4}(x_0 + h)^2 + (x_0 + h)\right) - \left(\frac{1}{4}x_0^2 + x_0\right)}{h}$

$m_s = \frac{\frac{1}{2}x_0 h + \frac{1}{4}h^2 + h}{h}$

$m_s = \frac{h \cdot \left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{4}h + 1\right)}{h}$

$m_s = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{4}h + 1$

In der Abbildung ist $x_0 = -1$ und $h = 2$ gewählt.



Die Sekantensteigung hat daher den Wert

$m_s = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2}$

$m_s = 1$

Differenzenquotient – Mittlere Änderungsrate

Definition

Wenn eine Größe g auf dem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ definiert ist und sowohl die Zeitpunkte t_0 als auch $t_0 + \Delta t$ in diesem Intervall liegen, dann heißt der Quotient $\frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t}$ mittlere Änderungsrate der Größe g auf dem Zeitintervall $[t_0; t_0 + \Delta t]$.

Physikalische Bedeutung

Wenn die Größe eine Länge s ist, dann bedeutet die mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ des im Zeitintervall $[t_0; t_0 + \Delta t]$ zurückgelegten Weges die durchschnittliche Geschwindigkeit des Körpers auf diesem Zeitintervall.

Beispiel

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Wenn ein Körper aus der Ruhe heraus mit der Beschleunigung a während der Zeit t beschleunigt wird, so gilt für den in dieser Zeit zurückgelegten Weg s:

$s(t) = \frac{1}{2}a \cdot t^2$

Für die mittlere Änderungsrate des Weges auf dem Zeitintervall $[t_0; t_0 + \Delta t]$ folgt daraus:

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot (t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}a \cdot t_0^2}{\Delta t}$

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{a \cdot t_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2}a \cdot \Delta t^2}{\Delta t}$

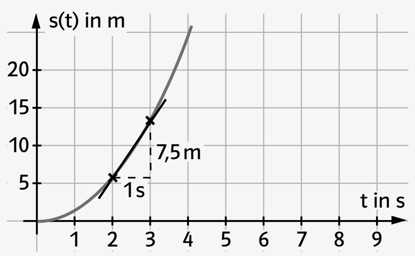
$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta t \cdot a \cdot \left(t_0 + \frac{1}{2} \cdot \Delta t\right)}{\Delta t}$

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = a \cdot \left(t_0 + \frac{1}{2} \cdot \Delta t\right)$

Mit $a = 3\frac{m}{s^2}$, $t_0 = 2\,s$, $\Delta t = 1\,s$ erhält man:

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 3\frac{m}{s^2} \cdot \left(2\,s + \frac{1}{2} \cdot 1\,s\right)$

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 7{,}5\frac{m}{s}$



Die Durchschnittsgeschwindigkeit während der dritten Sekunde beträgt $7{,}5\frac{m}{s}$.

Ableitung – Tangentensteigung

Definition

Wenn eine Funktion f auf dem Intervall [a; b] definiert ist und der Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ für $h \to 0$ existiert, dann heißt dieser Grenzwert Ableitung von f an der Stelle x_0.

Er wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Es gilt: $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Man sagt: Die Funktion f ist an der Stelle x_0 ableitbar (differenzierbar).

Geometrische Bedeutung

Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 ableitbar ist, dann heißt die Gerade t durch den Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ mit der Steigung $f'(x_0)$ Tangente an den Graphen G_f im Punkt P.

Beispiel

Mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x,\ x \in \mathbb{R}$, erhält man den Differenzenquotienten:

$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\left(\frac{1}{4}(x_0 + h)^2 + (x_0 + h)\right) - \left(\frac{1}{4}x_0^2 + x_0\right)}{h}$

$= \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{4}h + 1$

Der Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$ existiert:

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{4}h + 1\right)$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{2}x_0 + 1$

Daher gilt für die Ableitung an der Stelle x_0:

$f'(x_0) = \frac{1}{2}x_0 + 1$

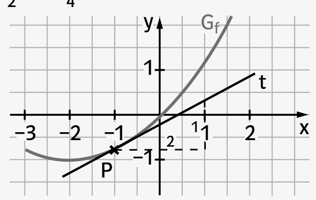
Mit $x_0 = -1$ ergibt sich die Tangentensteigung $m_t = \frac{1}{2}$.

Die Tangentenfunktion t an der Stelle $x_0 = -1$ hat daher die Gleichung:

$t(x) = f'(-1) \cdot (x - (-1)) + \left(-\frac{3}{4}\right)$

$t(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + 1) - \frac{3}{4}$

$t(x) = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{4}$



Ableitung – Momentane Änderungsrate

Definition

Wenn eine Größe g auf dem Intervall $[t_1; t_2]$ definiert ist und der Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t}$ für $\Delta t \to 0$ existiert, dann heißt dieser Grenzwert momentane Änderungsrate der Größe g zum Zeitpunkt t_0.

Er wird mit $g'(t_0)$ bezeichnet.

Physikalische Bedeutung

Wenn die Größe eine Länge s ist, dann bedeutet die momentane Änderungsrate $s'(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 die Momentangeschwindigkeit des Körpers zu diesem Zeitpunkt.

Beispiel

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Aus $s(t) = \frac{1}{2}\,a \cdot t^2$ folgt:

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot (t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}a \cdot t_0^2}{\Delta t}$

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = a \cdot \left(t_0 + \frac{1}{2} \cdot \Delta t\right)$

Der Grenzwert des Differenzenquotienten für $\Delta t \to 0$ existiert:

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = a \cdot t_0$

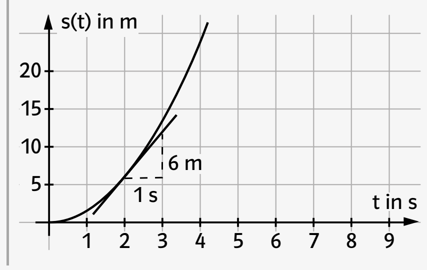
Daher gilt für die momentane Änderungsrate des Weges zum Zeitpunkt t_0:

$s'(t_0) = a \cdot t_0$

$v(t_0) = a \cdot t_0$

Mit $a = 3\frac{m}{s^2}$, $t_0 = 2\,s$ folgt die Momentangeschwindigkeit:

$v(2\,s) = 6\frac{m}{s}$



Ableitungsregeln

Lehrsätze	Beispiele	
Potenzregel Die Funktion f mit $f(x) = x^r$ und $r \in \mathbb{Q}$, ist differenzierbar. Es gilt: $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
	$f(x) = x = x^1$	$f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1$
	$f(x) = x^0 = 1$	$f'(x) = 0 \cdot x^{-1} = 0$
	$f(x) = x^{-1}$	$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
Faktorregel Die Funktion f mit $f(x) = r \cdot u(x)$ und $r \in \mathbb{R}$, ist differenzierbar, wenn die Funktion u differenzierbar ist. Es gilt: $f'(x) = r \cdot u'(x)$	$f(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot 2x^1 = 6x$
	$f(x) = \frac{1}{4}x^4$	$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3$
	$f(x) = \frac{2}{x} = 2 \cdot x^{-1}$	$f'(x) = 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$
	$f(x) = \frac{4}{3x} = \frac{4}{3} \cdot x^{-1}$	$f'(x) = \frac{4}{3} \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{4}{3x^2}$
Summenregel Die Funktion f mit $f(x) = u(x) + v(x)$ ist differenzierbar, wenn die Funktionen u und v differenzierbar sind. Es gilt: $f'(x) = u'(x) + v'(x)$	$f(x) = x^4 + 3 \cdot x$	$f'(x) = 4x^3 + 3$
	$f(x) = x^3 - 4x^2$	$f'(x) = 3x^2 - 8x$
	$f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^5 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + 3$	$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 5x^4 + \frac{1}{2} \cdot 2x^1 + 0 = \frac{10}{3}x^4 + x$
	$f(x) = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x} = 1 + 2 \cdot x^{-1}$	$f'(x) = 0 + 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$

Behold!

Don't use your computer for nothing important because you can't really trust it.

Don't waste the awesome power of the machine on trivial applications.

Bist du sicher?

1 Geben Sie jeweils die Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion f' an.

a) $f(x) = 6x^4 - 2x^3$ b) $f(x) = 0{,}6x - \frac{1}{3}x^4$

c) $f(x) = \frac{4}{x} + x$ d) $f(x) = \frac{5}{x^2} - 3$

e) $f(x) = (2x + 1)^2$

2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2$. Ihr Graph sei G_f.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Sekante durch $P(-1 | y_P)$ und $Q(2 | y_Q)$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $R(1 | y_R)$.

3 Zeichnen Sie zu den Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$ bzw. $g(x) = \frac{2}{x}$ die Graphen G_f bzw. G_g. Beantworten Sie die Fragen mithilfe der Graphen.

a) Wo schneidet der Graph der Ableitungsfunktion f' die x-Achse?

b) An welchen Stellen gibt es Tangenten an G_f mit Steigungen kleiner als 2?

c) In welchen Punkten des Graphen G_g ist die Tangentensteigung positiv?

d) In welchen Punkten des Graphen G_g gilt: $g'(x) < -2$?

4 Wenn ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $8\frac{m}{s}$ lotrecht nach oben geworfen wird, dann hat er gemessen von seiner Ausgangslage nach der Zeit t die Höhe h(t) erreicht, wobei gilt:

$h(t) = 8\frac{m}{s} \cdot t - 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2$

a) Wie hoch ist der Körper nach 1,5 s?

b) Wie groß ist die mittlere Änderungsrate der Höhe in der ersten Sekunde?

c) Wie schnell ist der Körper nach 1 s?

d) Nach welcher Zeit hat der Körper den höchsten Punkt seiner Bahn erreicht?

5 Bestimmen Sie näherungsweise die Funktionsgleichung der Tangente an den Graphen G_f im Punkt $P(-1{,}3 | y_P)$, falls gilt:

a) $f(x) = \frac{1}{8}(2x - 1)^4$ b) $f(x) = \sqrt{4 - x}$

Lösungen

1 a) $f'(x) = 24x^3 - 6x^2$ b) $f'(x) = 0{,}6 - \frac{4}{3}x^3$ c) $f'(x) = -\frac{4}{x^2} + 1$ d) $f'(x) = -\frac{10}{x^3}$ e) $f'(x) = 8x + 4$ **2** a) $P\left(-1\middle|-\frac{5}{2}\right)$, $Q(2 | -4)$, $s(x) = -\frac{1}{2}x - 3$ b) $R\left(1\middle|-\frac{3}{2}\right)$, $t(x) = -\frac{5}{2}x + 1$ **3** a) $x_1 \approx 1{,}15$, $x_2 \approx -1{,}15$ b) $-2 < x < 2$ c) In keinem Punkt d) In allen Punkten $P(x_P | y_P)$ mit $-1 < x_P < 0$ und $0 < x_P < 1$ **4** a) $h(1{,}5\,s) = 0{,}75\,m$ b) $\frac{h(1\,s) - h(0\,s)}{1\,s} = 3\frac{m}{s}$ c) $v(1\,s) = h'(1\,s) = -2\frac{m}{s}$ d) $h'(t_0) = 0$, falls $t_0 = 0{,}8\,s$ **5** a) $f(x) = -46{,}7x - 39{,}7$ b) $t(x) = -0{,}22x + 2{,}02$