4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(t) = t$ und die Integralfunktion $I_0(x) = \int_0^x t\,dt$ von f zur unteren Grenze 0.

a) Zeichnen Sie den Graphen von f und veranschaulichen Sie $I_0(3)$, $I_0(4)$ und $I_0(4) - I_0(3)$ als Flächeninhalte.

b) Geben Sie die Flächeninhalte aus Teilaufgabe a) an und bestimmen Sie einen Funktionsterm der Integralfunktion I_0.

c) Es sei F eine Stammfunktion von f. Bestimmen Sie $F(3)$, $F(4)$ und $F(4) - F(3)$. Was fällt Ihnen auf?

Erinnerung:
F ist Stammfunktion von f, wenn $F'(x) = f(x)$

Die Berechnung eines Integrals als Grenzwert von Unter- bzw. Obersumme ist aufwändig. Eine einfachere Bestimmungsmethode ergibt sich aus folgendem Satz:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (kurz: **HDI**)
Die Funktion $f: t \mapsto f(t)$ sei im Intervall $[a;b]$ definiert.
Dann gilt für die Integralfunktion I_a mit $I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$:

$I_a'(x) = f(x)$ für $x \in [a;b]$

Kurz: Die Integralfunktion I_a von f ist eine Stammfunktion von f.

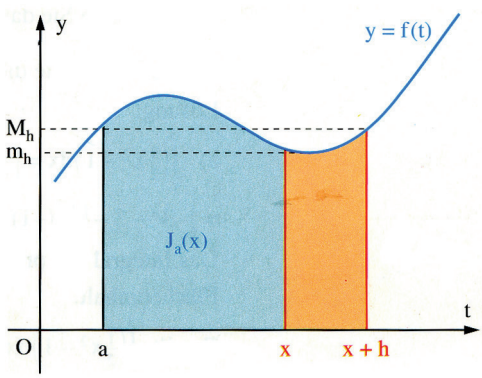
Integralrechnung (integrieren) und Differentialrechnung (ableiten) hängen auf das Engste zusammen:
$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$.

Beweis:
Der Differenzenquotient von I_a an der Stelle x ist: $\frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h}$.

Dabei entspricht $I_a(x+h) - I_a(x)$ dem Inhalt des rot markierten Streifens in der Figur.
f hat im Intervall $[x;x+h]$ einen größten Funktionswert M_h und einen kleinsten Funktionswert m_h. Es gilt:
$m_h \cdot h \leqq I_a(x+h) - I_a(x) \leqq M_h \cdot h$ oder

$$m_h \leqq \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} \leqq M_h.$$

Für $h \to 0$ streben sowohl m_h als auch M_h gegen $f(x)$. Also strebt auch der Differenzenquotient für $h \to 0$ gegen $f(x)$.
Damit gilt $I_a'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} = f(x)$.



Bemerkung
Der im obigen Hauptsatz dargestellte Zusammenhang wird vereinfacht auch so ausgedrückt: Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation.

Wie kann man nun mithilfe des Hauptsatzes ein Integral wie $\int_a^b f(x)\,dx = I_a(b)$ berechnen?
Ist F irgendeine Stammfunktion von f, dann gilt für die Integralfunktion $I_a(x) = F(x) + c$.
Die Konstante c ergibt sich so: Da $I_a(a) = F(a) + c = 0$ ist, folgt $c = -F(a)$.
Somit gilt für die gesuchte Integralfunktion $I_a(x) = F(x) - F(a)$.
Insbesondere ist dann $\int_a^b f(x)\,dx = I_a(b) = F(b) - F(a)$.

Satz

Die Funktion f sei in dem Intervall $[a;b]$ definiert. Ist F eine beliebige Stammfunktion von f in diesem Intervall, dann gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Statt $F(b) - F(a)$ schreibt man auch $[F(x)]_a^b$; es ist dann $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$.

Berechnung der Gesamtänderung einer Größe:

Der obige Satz liefert mit dem bereits aus Lerneinheit 2 bekannten Zusammenhang ein einfaches Berechnungsverfahren:

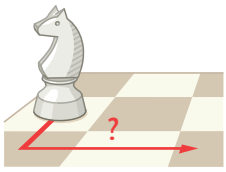
Ist $m(t)$ für $t \in [t_1;t_2]$ die momentane Änderungsrate einer Größe G, dann erhält man die Gesamtänderung $G(t_2) - G(t_1)$ der Größe im Intervall $[t_1;t_2]$ als Integral

$$G(t_2) - G(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} m(t)\,dt.$$

Damit lässt sich aus der momentanen Änderungsrate m einer Größe und ihrem Bestand $G(t_1)$ zum Zeitpunkt t_1 auch der Bestand $G(t_2)$ der Größe zum Zeitpunkt t_2 bestimmen:

$$G(t_2) = G(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} m(t)\,dt$$

Beispiel 1



Strategie: Rückwärts arbeiten. Zur Bestimmung von F rückwärts ableiten: F′ muss f ergeben.

Bestimmen Sie:

a) $\int_1^2 (3x^2 + 2x)\,dx$

b) $\int_1^e \frac{2}{x}\,d$

■ Lösung:

a) Mögliche Stammfunktion F mit $F(x) = x^3 + x^2$

$$\int_1^2 (3x^2 + 2x)\,dx = [x^3 + x^2]_1^2 = (2^3 + 2^2) - (1^3 + 1^2) = 10$$

b) Mögliche Stammfunktion F mit $F(x) = 2 \cdot \ln x$

$$\int_1^e \frac{2}{x}\,dx = [2 \cdot \ln x]_1^e = 2 \cdot \ln e - 2 \cdot \ln 1 = 2$$

Beispiel 2

a) Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)dx$ und deuten Sie das Ergebnis als Flächeninhalt.

b) Bestimmen Sie die Integralfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ zur unteren Grenze −1.

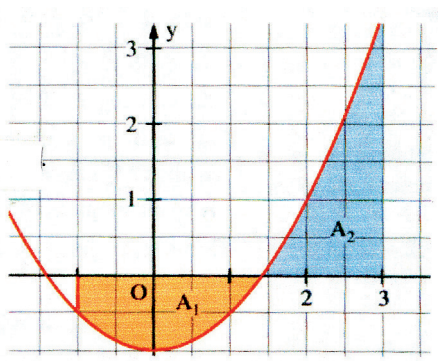
■ Lösung:

a) $\int_{-1}^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x\right]_{-1}^3$

$= \frac{1}{6} \cdot 3^3 - 3 - \left(\frac{1}{6} \cdot (-1)^3 - (-1)\right) = \frac{2}{3}$.

Das Integral entspricht der Flächenbilanz mit $A_1 < A_2$.

Es gilt $\int_{-1}^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)dx = -A_1 + A_2$.



b) Die gesuchte Integralfunktion I_{-1} ist eine Stammfunktion von f: $I_{-1}(x) = \frac{1}{6}x^3 - x + c$.

Es gilt $I_{-1}(-1) = 0$,

also $\frac{1}{6}(-1)^3 - (-1) + c = 0$; $c = -\frac{5}{6}$.

Die Integralfunktion von f zur unteren Grenze −1 ist $I_{-1}(x) = \frac{1}{6}x^3 - x - \frac{5}{6}$.

Man kann die Lösung von a) auch mit dem Ergebnis von b) bestimmen:

$\int_{-1}^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)dx = I_{-1}(3)$.