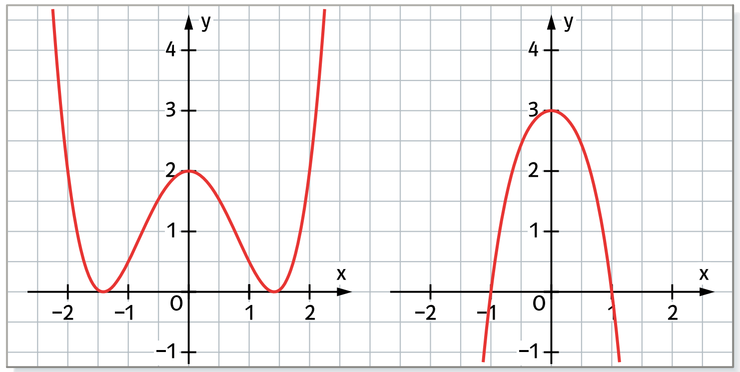
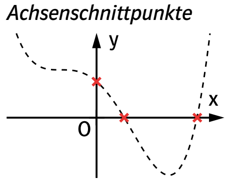


„Die Anzahl der Extrempunkte ist immer um eins größer als die Anzahl der Wendepunkte."
„Wenn das stimmt, dann haben Funktionsgraphen mit nur einem Extrempunkt niemals Wendepunkte."

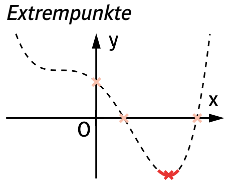
Ganzrationale Funktionen
Symmetrie:
– nur gerade Exponenten von x ⟹ Achsensymmetrie
– nur ungerade Exponenten von x ⟹ Punktsymmetrie

Mithilfe der Differenzialrechnung kann man charakteristische Eigenschaften von Funktionen und Graphen von Funktionen finden. Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften sowie die Bedingungen, die dafür erfüllt sein müssen.

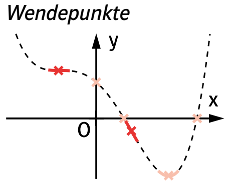
Achsenschnittpunkte

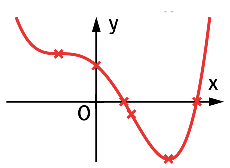


Extrempunkte



Wendepunkte





Bedingung	Eigenschaft der Funktion	Eigenschaft des Graphen
$f(-x) = f(x)$	Zu betragsgleichen x-Werten gehören gleiche Funktionswerte.	**Achsensymmetrie** zur y-Achse
$f(-x) = -f(x)$	Zu betragsgleichen x-Werten gehören betragsgleiche Funktionswerte mit verschiedenen Vorzeichen.	**Punktsymmetrie** zum Ursprung
$f(x_0) = 0$	x_0 ist eine **Nullstelle**.	$N(x_0\|0)$ ist der **Schnittpunkt mit der x-Achse**.
$f(0) = y_0$	y_0 ist der Funktionswert an der Stelle 0.	$P(0\|y_0)$ ist ein **Schnittpunkt mit der y-Achse**.
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ oder $f'(x_0) = 0$ und f' hat dort einen Vorzeichenwechsel von „+" nach „−"	x_0 ist eine **Extremstelle**. $f(x_0)$ ist ein **Maximum**.	$H(x_0\|f(x_0))$ ist ein **Hochpunkt**.
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ oder $f'(x_0) = 0$ und f' hat dort einen Vorzeichenwechsel von „−" nach „+"	x_0 ist eine **Extremstelle**. $f(x_0)$ ist ein **Minimum**.	$T(x_0\|f(x_0))$ ist ein **Tiefpunkt**.
$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ oder $f''(x_0) = 0$ und f'' hat dort einen Vorzeichenwechsel	x_0 ist eine **Wendestelle**.	$W(x_0\|f(x_0))$ ist ein **Wendepunkt**.
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ oder $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und f'' hat dort einen Vorzeichenwechsel	x_0 ist eine Wendestelle mit $f'(x_0) = 0$.	$S(x_0\|f(x_0))$ ist ein **Sattelpunkt**.

Wenn man darüber hinaus noch das Verhalten der Funktion für $|x| \to \infty$ untersucht, ist es oft möglich, den Graphen zu skizzieren, ohne noch weitere Werte berechnen zu müssen.

Typische Elemente einer Funktionsuntersuchung
1. Symmetrie
2. Verhalten für große und kleine x-Werte
3. Nullstellen und Funktionswert bei $x = 0$
4. Extremstellen und Extremwerte
5. Wendestellen und deren Funktionswerte

Ganzrationale Funktionen
Verhalten für große und kleine x-Werte:
Der Summand mit der höchsten Potenz von x ist entscheidend.

Beispiel 1
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$. Untersuche den Graphen der Funktion auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Hochpunkte und Tiefpunkte sowie auf Wendepunkte. Bestimme die Gleichung der Wendetangente und skizziere den Graphen mithilfe der Ergebnisse.
Lösung:
Symmetrie: Die Funktion ist ganzrational. Der Graph ist weder zur y-Achse noch zum Ursprung symmetrisch, da der Funktionsterm sowohl Potenzen von x mit geradem als auch solche mit ungeradem Exponenten enthält.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 2$ ergibt $P(0|2)$.
Schnittpunkte mit der x-Achse: Bedingung: $f(x_N) = 0$
$\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2 = 0$ hat die Lösung $x_1 = -1$, denn $\frac{1}{2}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2 + 2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2 = 0$
Weitere Nullstellen durch Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2\right) : (x+1) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \\ \underline{-\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)} \\ \qquad -2x^2 + 2 \\ \qquad \underline{-(-2x^2 - 2x)} \\ \qquad\qquad 2x + 2 \end{array}$$

$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$
$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{1} = 2$
f hat also eine einfache Nullstelle bei $x_1 = -1$ und eine doppelte Nullstelle bei $x_2 = 2$, also $N_1(-1|0)$ und $N_2(2|0)$.

Extrempunkte: Bedingung: $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$
$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x = \frac{3}{2}x(x-2) = 0$ hat die Lösungen $x_3 = 0$ und $x_4 = 2$.
Mit $f''(x) = 3x - 3$ erhält man $f''(0) = -3 < 0$ und $f''(2) = 3 > 0$.
x_3 und x_4 sind Extremstellen von f. Zusammen mit $f(0) = 2$ und $f(2) = 0$ ergibt sich:
$H(0|2)$ ist ein Hochpunkt und $T(2|0)$ ist ein Tiefpunkt des Graphen von f.

Wendepunkte: Bedingung: $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$
$f''(x) = 3x - 3 = 0$ ergibt $x_5 = 1$. Wegen $f'''(x) = 3 \neq 0$ ist x_5 eine Wendestelle von f.
Wegen $f(1) = \frac{1}{2}\cdot 1^3 - \frac{3}{2}\cdot 1^2 + 2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2 = 1$ ergibt sich:
$W(1|1)$ ist ein Wendepunkt des Graphen von f.

Wendetangente: $f'(1) = \frac{3}{2}\cdot 1^2 - 3\cdot 1 = -\frac{3}{2}$ ist der Wert der Steigung der Wendetangente.
Aus $1 = -\frac{3}{2}\cdot 1 + b$ ergibt sich $b = \frac{5}{2}$. Die Tangente also hat die Gleichung $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

Verhalten für $|x| \to \infty$:
Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x^3\right) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x^3\right) = -\infty$.

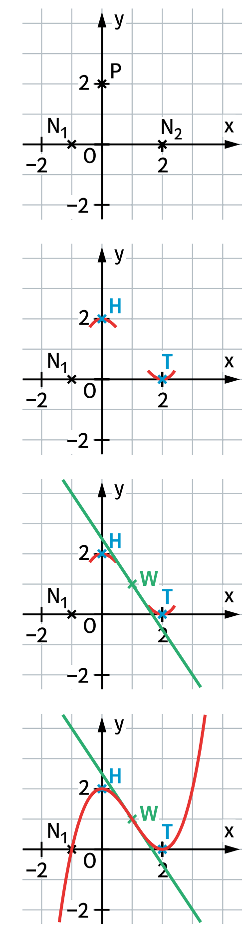


Fig. 1